

# 1 EDV-gerechte Aufbereitung von allgemeinen ebenen Stabwerken <sup>1</sup>

## 1.1 Einführung in das verallgemeinerte Weggrößenverfahren

Das PASCAL-Programm FEM3.PAS, aber auch die BASIC-Programme FEM1.BAS bis FEM6.BAS in [1] sowie die Mehrzahl der marktgängigen Stabwerkprogramme beruhen auf dem verallgemeinerten Weggrößenverfahren, das oft auch *Matrizenverfahren* oder *Finite-Element-Methode* genannt wird. Die theoretische Herleitung der Matrixgleichung

$$\mathbf{G}_R \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \quad (1)$$

mit  $\mathbf{G}_R$  = Gesamtsteifigkeitsmatrix mit Berücksichtigung der Randbedingungen  
 $\mathbf{v}$  = Vektor der verallgemeinerten Knotenverschiebungen und  
 $\mathbf{F}$  = Vektor der verallgemeinerten Knotenkräfte

ist z. B. in [1] ausführlich wiedergegeben. Im folgenden sollen vor allem die zur Anwendung von Stabwerkprogrammen erforderlichen Begriffe vorgestellt werden.

Das Stabwerk wird durch *Knoten* und *Stäbe*, die jeweils zwei Knoten verbinden, definiert (vgl. Bild 1).

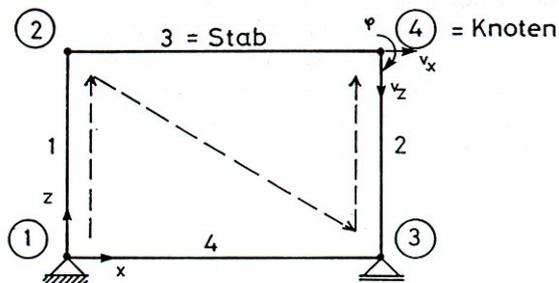


Bild 1 Stabwerk, Knoten und Stäbe

Unter Belastung verformt sich das Stabwerk, wobei der Verformungszustand durch jeweils drei *Freiheitsgrade* in den Knoten des Systems, die

- Horizontalverschiebung  $v_x$ ,
- Vertikalverschiebung  $v_z$  (in negative  $z$ -Richtung) und
- Verdrehung  $\varphi$

vollständig beschrieben werden kann. In den Lagerknoten wird die Anzahl der Freiheitsgrade entsprechend den dort vorhandenen kinematischen Bindungen reduziert. So ist im Beispiel nach Bild 1  $v_x = v_z = 0$  im Knoten 1 und  $v_z = 0$  im Knoten 3, d. h., die Gesamtzahl der Freiheitsgrade beträgt hier  $f = 3 \cdot 4 - 3 = 9$ .

<sup>1</sup> aus Dietz/Falter: Ebene Stabwerke auf MS-DOS-Rechnern, 3. Aufl. 1994, Werner-Verlag, Düss.dorf

Die Gesamtzahl  $f$  der Freiheitsgrade des Stabwerksystems wird beim Weggrößenverfahren auch *Grad der geometrischen Unbestimmtheit* genannt. Die Freiheitsgrade sind die Unbekannten des Gleichungssystems (1), die im Vektor  $\mathbf{v}$  in der Reihenfolge der Knotennummerierung zusammengefaßt sind.

Auf der rechten Seite der Matrixgleichung (1) stehen in dem Vektor  $\mathbf{F}$  die *verallgemeinerten Knotenkräfte*

- in  $x$ -Richtung die Einzelkraft  $F_x$
- in negativer  $z$ -Richtung die Einzelkraft  $F_z$  und
- in Drehrichtung das Moment  $M$

Die Reihenfolge der Elemente des Kraftvektors  $\mathbf{F}$  entspricht der des Verschiebungsvektors  $\mathbf{v}$ , d. h., für Bild 1 gilt knotenweise

$$\mathbf{F} = (M_1, F_{x2}, F_{z2}, M_2, F_{x3}, M_3, F_{x4}, F_{z4}, M_4)$$

Die verallgemeinerten Knotenkräfte sind zum einen die in den Knoten wirkenden Knotenlasten, zum anderen bei beliebigen Einwirkungen auf das Stabwerk (Stabbelastungen, Wärmeinwirkungen, Stützensenkungen usw.) die auf die Knoten bezogenen äquivalenten Kraftgrößen.

Zur vollständigen Beschreibung des Gleichungssystems (1) fehlt noch die Matrix  $\mathbf{G}_R$ . Sie besteht aus  $f \cdot f$  Elementen  $g_{i,k}$ , die aus den *Einzelsteifigkeitsmatrixen*  $\mathbf{E}$  der Elemente (= Stäbe) berechnet und entsprechend der Verknüpfungsvorschrift zwischen Stäben und Knoten in die *Gesamtsteifigkeitsmatrix*  $\mathbf{G}$  gespeichert werden. Nach dem Streichen derjenigen Zeilen und Spalten, die zu den kinematischen Bindungen der Auflager gehören, ergibt sich die *reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix*  $\mathbf{G}_R$  mit den folgenden wichtigen Eigenschaften:

- Symmetrie zur Hauptdiagonalen, d. h.  $g_{i,k} = g_{k,i}$
- positive Hauptdiagonalelemente (gilt uneingeschränkt nur bei Theorie I. Ordnung!)
- Bandstruktur, d. h., alle Elemente außerhalb eines Bandes der Breite  $b$  rechts von der Hauptdiagonalen und unterhalb derselben haben den Wert Null

Diese Eigenschaften von  $\mathbf{G}_R$  sind vor allem aus programmtechnischen Gründen von Bedeutung. Sie werden i. d. R. für eine effektive Programmierung genutzt, da der Hauptspeicher eines Rechners immer begrenzt ist, selbst wenn z. B. die Möglichkeit der Verwendung virtueller Speicher besteht.

Die Größe des zu berechnenden Stabwerks wird damit wie folgt eingeschränkt: Bei BASIC-Programmen geschieht dies *dynamisch*, d. h., die Werte  $f$  und  $b$  werden vom Programm aus den Systemparametern (Knoten- und Stabnummern und deren Zuordnung) berechnet, und erst danach wird der Variablenspeicher aufgeteilt (vgl. FEM1.BAS bis FEM9.BAS in [1]). Bei PASCAL- und FORTRAN-Programmen erfolgt dies im Regelfall *statisch*,  $f$  und  $b$  und damit die Speicherbelegung sind im Deklarationsteil der Programmquelle festgelegt (vgl. Eröffnungsmenü zu FEM3.PAS, Abschnitt 2.5.1). Manche PASCAL-Compiler bieten zusätzliche Möglichkeiten zur Kontrolle des freien und des belegten Speicherbereichs, hiervon wird jedoch im Programm FEM3 noch kein Gebrauch gemacht. Dagegen wird ab Version 5.1 eine "halb-dynamische" Methode zur Speicherung von zweidimensionalen Matrizen verwendet,

wodurch Stabwerke mit größeren Knoten- und Stabzahlen als in früheren Versionen möglich werden.

Da sich die Bandbreite aus der Beziehung

$$b = \text{maximale Knotennummerndifferenz} \cdot 3 + 1$$

ergibt, ist es in vielen Fällen möglich,  $b$  durch geschickte Knotennumerierung zu minimieren: Nach Bild 1 ergibt eine Numerierung in N-Form (gestrichelte Pfeilrichtung) die Bandbreite

$$b = (4 - 2) \cdot 3 + 1 = 7,$$

dagegen eine Numerierung über den Umfang des Rechtecks den ungünstigeren Wert

$$b = (4 - 1) \cdot 3 + 1 = 10!$$

## 1.2 Systemaufbereitung

### 1.2.1 Einheiten

Das Programm FEM3.PAS ist einheitenfrei. Der Benutzer entscheidet zu Beginn der Berechnung, welche Einheiten für Längen und Kräfte benutzt werden sollen, und rechnet erforderlichenfalls Größen, die mit anderen Einheiten vorliegen, in die Standardeinheiten um.

Es empfiehlt sich die Wahl der Standardeinheiten

m (Meter) für Längen und  
kN (Kilonewton) für Kräfte

Die gewählten Einheiten gelten dann für *alle* Eingabegrößen (System- und Belastungsgrößen) sowie für *alle* Ergebnisse (Verschiebungen, Schnitt- und Auflagergrößen). Sie werden in den Protokollen mit ausgegeben.

Die ggf. erforderlichen Umrechnungen sollen an den folgenden typischen Beispielen demonstriert werden:

Elastizitätsmodul Holz:  $E = 10000 \text{ MN/m}^2 = 10^7 \text{ kN/m}^2$   
Stahl:  $E = 21000 \text{ kN/cm}^2 = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$

IPE 200      Fläche:  $A = 28,5 \text{ cm}^2 = 0,00285 \text{ m}^2$   
Flächenmoment 2. Grades:  $I_y = 1940 \text{ cm}^4 = 0,194 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$

### 1.2.2 Koordinatensysteme

Für das Programm FEM3 gelten verschiedene, problemangepaßte Koordinatensysteme:

- für die Systemgeometrie ein globales System mit nach oben positiver  $z$ -Achse
- für verallgemeinerte Knotenlasten, -verschiebungen und Auflagerreaktionen ein globales  $x$ -/ $z$ -/ $\varphi$ -System mit nach unten positiver  $z$ -Achse und mit rechtsdrehend positivem Winkel  $\varphi$
- für Stabbelastungen (Rechteck- oder Trapezlasten) wie vor in der globalen  $x$ - und  $z$ -Richtung
- für Stabschnittgrößen lokale Koordinatensysteme (vgl. Abschnitt 1.2.4)

Diese Regelungen führen zu verständlichen und aus der Handstatik gewohnten Vorzeichen. Zum Beispiel sind Eigenlasten positiv einzugeben, und die Schnittgrößen sind an der Bezugsfaser orientiert.

*Anmerkung: Von einigen Programmanbietern wird die strenge Regelung mit einheitlichen rechtshändigen Koordinatensystemen bevorzugt (z. B. [9]), was bei Interpretation der Eingabe- und Ergebnisdaten und Vergleichen sorgfältig beachtet werden muß!*

### 1.2.3 Knoten

Knoten *müssen* an den folgenden Stellen des ebenen Stabwerks angeordnet werden (vgl. Bild 2):

- an Auflagern
- an Zwischengelenken
- an Knicken und Verzweigungen
- an Steifigkeitssprüngen ( $I_1 \neq I_2$ )
- an Lastangriffspunkten und bei Laständerungen (vgl. Abschnitt 1.3)

Zusätzlich *können* Knoten an Stellen vorgesehen werden, wo die Ausgabe von Zwischenergebnissen gewünscht wird. Dies ist nicht erforderlich, wenn die vorgesehene Stelle z. B. auf einem 1/10-Punkt des Stabes liegt und eine Ausgabe für 1/10-Punkte angewählt wird.

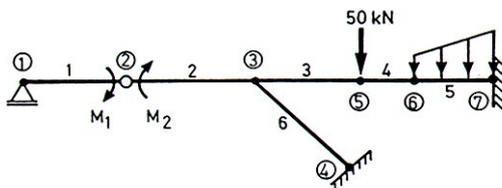


Bild 2 Beispiel für Knotennummerierung

Die Knoten werden durch Koordinatenpaare  $x$  und  $z$  im globalen Koordinatensystem beschrieben, vgl. Bild 1. Wird der Ursprung des Koordinatensystems in die linke untere Ecke des Stabwerks gelegt, so ergeben sich nur positive  $x$ - und  $z$ -Werte, was die Eingabe vereinfacht.

Die Knoten werden numeriert (vgl. Zahlen im Kreis), wobei eine möglichst kleine Differenz zwischen den Nummern benachbarter Knoten anzustreben ist. Dies führt nach Abschnitt 1.1 zu einem geringeren Speicherbedarf und damit auch zu geringeren Rechenzeiten.

*Auflagerknoten* müssen dem Programm so mitgeteilt werden, daß ein-, zwei- und dreiwertige Lager und ihre Verschiebungsrichtungen unterschieden werden. Dies bewirkt ein dreistelliger Code mit den Ziffern

- 0 = fest (unterdrückter Freiheitsgrad) und
- 1 = verschieblich (Freiheitsgrad vorhanden)

für die  $x$ -,  $z$ - und Drehrichtung. Für den Knoten 1 nach Bild 2 lautet der Code 101, für die Knoten 4 und 7 dagegen 000.

*Anmerkung: Einige Programme verwenden den o. g. Lagercode in der umgekehrten Bedeutung, nämlich 1 für fest und 0 für verschieblich!*

Gleitlager mit schrägen Verschiebungsrichtungen können durch einen Pendelstab in der Richtung der Lagerreaktion simuliert werden. Eine direkte Eingabe von schrägen einwertigen Lagern ist im Programm FEM3 nicht vorgesehen.

Es ist selbstverständlich, daß das Auflagersystem *vollständig* sein muß. Dies ist gleichbedeutend mit der *kinematischen Bestimmtheit* des Stabwerks, die in schwierigen Fällen z. B. mit dem Polplan zu überprüfen ist. Die Nichteinhaltung dieser Forderung führt bei verschiedenen Stabwerkprogrammen zu durchaus unterschiedlichen Reaktionen, vgl. Beispiele 3.12 und 3.13. Auch "fast verschiebliche Systeme" sind zu vermeiden.

#### 1.2.4 Stäbe

Die Lage eines Stabes  $j$  im Stabwerk und dessen Richtung wird durch die Nummer des Anfangsknotens  $i$  und des Endknotens  $k$  eindeutig beschrieben, vgl. Bild 3. Die Bedingung  $i < k$  ist bei der Eingabe zu beachten!

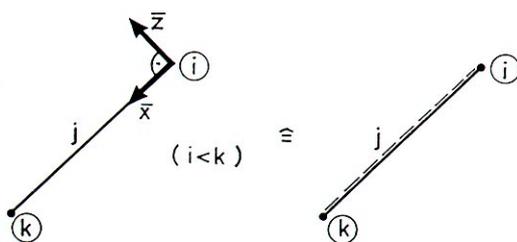


Bild 3 Beispiel für das lokale Stabkoordinatensystem

Die lokale Stabachse  $\bar{x}$  wird durch die Richtung "i nach k" festgelegt. Durch Drehung um  $90^\circ$  im Uhrzeigersinn ergibt sich die lokale  $\bar{z}$ -Achse (Bezugsfaser oder "gestrichelte Zone"). Wird also nach Bild 3 numeriert (mit  $x_i > x_k$ ), so liegt die Bezugsfaser oberhalb des Stabes.

Im Gegensatz zur Numerierung der Knoten hat die Stabnumerierung keinen Einfluß auf die Größe des Gleichungssystems. Sie ist beliebig, es ist jedoch ratsam, Stäbe mit gleichen Querschnittswerten zu Stabgruppen zusammenzufassen - dadurch wird die Eingabe häufig erheblich vereinfacht (vgl. Abschnitt 2.5.1).

Für jeden Stab bzw. jede Stabgruppe müssen die Querschnittswerte  $A$  und  $I_y$  (bzw.  $I_z$  bei Biegung um die schwache Achse) eingegeben werden. Wie alle ebenen Stabwerkprogramme mit *drei* Freiheitsgraden je Knoten berücksichtigt auch das Programm FEM3 die *Längskraftverformungen*. Hieraus folgt, daß die Eingaben für  $E$ ,  $A$  und  $I_y$  realistisch sein müssen.

In Lehrbüchern für Baumechanik und Statik werden häufig Aufgaben behandelt, in denen für  $E$  und  $A$  keine Werte gegeben sind und  $I_y$  für alle Stäbe konstant gesetzt wird. Werden diese Größen in der Programmeingabe allesamt gleich 1 gesetzt (ein häufiger Anfängerfehler), so ergeben sich u. U. die folgenden Probleme bei den elektronisch berechneten Ergebnissen:

- a) sehr große Verschiebungen, die meist das vorgegebene Zahlenformat der Ausgabe überschreiten und
- b) falsche Schnittgrößen, was durch Vergleich mit den Ergebnissen der Fachliteratur ersichtlich wird

Der Fehlertyp a wird durch "vernünftige" Werte für die Biegesteifigkeit  $EI$  vermieden. Zum Beispiel kann der Elastizitätsmodul an üblichen Baustoffen orientiert und mit  $10^7$  oder  $10^8$  kN/m<sup>2</sup> eingegeben werden. Für die Eingabe von  $I$  sollte zuvor ein zum statischen System passendes Profil gewählt und der Wert von  $I$  - ggf. gerundet - aus der Profiltafel übernommen werden.

Der Fehlertyp b ist durch das Verhältnis  $I:A$  bedingt. Bei der oben geschilderten Vorgehensweise beträgt es 1:1, bei realistischen Querschnitten und bei Verwendung der Einheit Meter dagegen z. B.

- für IPE 240       $I:A = 1:100 \text{ m}^2$
- für  $\ddot{y}$  12/24 cm       $I:A = 1:200 \text{ m}^2$

Wird also mit  $A = I = 1$  gerechnet, so ist das System 100- bis 200mal dehnweicher gegenüber realen Systemen, und die entsprechend vergrößerten Normalkraftverformungen verfälschen die Ergebnisse. Sind allerdings keine Normalkräfte vorhanden (z. B. beim Durchlaufträger), dann tritt der Fehler b nicht auf.

Es wird empfohlen, auch für  $A$  den Wert eines "passenden" Profils einzugeben. Soll das Stabwerk jedoch *dehnstarr* berechnet werden, so ist der 10- bis 100fache Flächenwert zu wählen, z. B.  $A = 1 \text{ m}^2$  für übliche Walzträger.

Gelegentlich sind Systeme zu berechnen, deren Tragglieder aus *verschiedenen Werkstoffen* (Holz, Stahl, Stahlseile, Beton usw.) bestehen. Der Elastizitätsmodul ist in solchen Fällen für den vorherrschenden Werkstoff einzugeben ( $E = E_1$ ). Die Tragglieder (Stäbe) aus den Werkstoffen 2, 3 usw. erhalten dann die wie folgt umgerechneten Flächenwerte (vgl. Beispiel 3.8):

$$\begin{aligned} A'_i &= A_i \cdot E_2 / E_1 & I'_i &= I_i \cdot E_2 / E_1 \\ A'_k &= A_k \cdot E_3 / E_1 & I'_k &= I_k \cdot E_3 / E_1 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Mit der Anzahl  $n_i$  der Stabintervalle wird die Zahl der Zwischenergebnisse ( $n_i-1$ ) festgelegt. Ein Stab muß mindestens in ein, maximal in 10 Intervalle unterteilt werden.

### 1.2.5 Zwischengelenke

Kommt in einem Stabwerk ein Zwischengelenk vor, so ist nach den Regelungen im Abschnitt 1.2.3 an dieser Stelle zuvor ein Knoten definiert worden. Beim Programm FEM3 sind Biegemomenten- sowie  $N$ - und  $Q$ -Gelenke in den *globalen* Richtungen möglich, andere Programme erlauben u. U. auch lokale  $N$ - und  $Q$ -Gelenke.

Die Beschreibung von Zwischengelenken erfolgt mit dem Code, der auch bei der Definition von Lagerknoten im Abschnitt 1.2.3 verwendet wurde. Da jedoch ein gelenkiger Anschluß an *beiden* Stabenden möglich ist, ist der Code jetzt sechsstellig: drei Ziffern für den Stabanfang und drei für das Stabende. Ein Pendelstab z. B. erhält die Ziffernfolge 001 001.

Ein einzelnes Zwischengelenk darf nur einmal definiert werden. Zum Beispiel wird das Gelenk im Knoten 2 nach Bild 2 als Stabendgelenk des Stabes 1 (000 001) *oder* als Gelenk am Anfang des Stabes 2 (001 000) beschrieben. Überzählige Gelenkvereinbarungen führen zu einem kinematisch unbestimmten System und damit zum Abbruch der Berechnung.

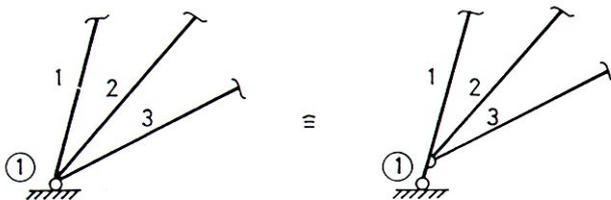


Bild 4 Beispiel für den Gelenkanschlusß mehrerer Stäbe an einen Lagerknoten

Sind nach Bild 4 mehrere Stäbe in einem Punkt gelenkig gelagert, so ist wie folgt einzugeben:

- Stab 1 mit dem Lagerknoten 1 (Code 001)
- Stab 2 gelenkig an Stab 1 (Code 001 000)
- Stab 3 gelenkig an Stab 1 (Code 001 000)

Bei dem Beispiel wird unterstellt, daß der Knoten 1 Anfangsknoten der Stäbe 2 und 3 ist.

## 1.3 Lastaufbereitung

### 1.3.1 Knotenlasten

Knotenlasten sind am globalen Koordinatensystem orientiert. Es sind die Knotennummer, die Kräfte  $F_x$  (positiv nach rechts) und  $F_z$  (positiv nach unten) sowie das Moment  $M$  (positiv im Uhrzeigersinn) einzugeben, z. B. für den Knoten 5 nach Bild 2 die vier Zahlen

5 0 50 0

Es gelten dabei die vom Benutzer zu Beginn der Eingabe festgelegten Einheiten (etwa die Standardeinheiten: kN, m).

Bei der Festlegung von Zwischengelenken sind zusätzliche Freiheitsgrade entstanden, so daß hier entsprechende zusätzliche Knotenlasten eingegeben werden können. Wird z. B. das Zwischengelenk im Knoten 2 nach Bild 2 als Gelenk am Anfang des Stabes 2 (Code 001000) definiert, so können links und rechts von diesem Gelenk zwei voneinander unabhängige Einzelmomente eingegeben werden:

1.  $M_1$  als "Knotenlast" am Knoten 2
2.  $M_2$  als "Knotenlast am Zwischengelenk" (Anfang Stab 2)

### 1.3.2 Stabbelastungen

Mit dem Programm FEM3 können Stabbelastungen berechnet werden, die in  $x$ - und  $z$ -Richtung wirken und linear verteilt sind. Die Eingabe erfolgt durch Angabe der Stabnummer, der beiden vertikalen Lastordinaten  $p_1$  und  $p_2$  (positiv nach unten) und der beiden horizontalen Lastordinaten  $p_3$  und  $p_4$  (positiv nach rechts) jeweils am Stabanfang und -ende.

Da Stabbelastungen *global* beschrieben werden, sind bei um den Winkel  $\alpha$  geneigten Stäben für einige Lastfälle Umrechnungen erforderlich, vgl. Beispiel 3.1:

- Eigenlasten, sofern sie auf die Stablänge bezogen sind,  $p_1 = p_2 = g/\cos \alpha$ ,  $p_3 = p_4 = 0$
- Windlasten, konstanter Wasserdruck  $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = w$  ( $\alpha < 90^\circ$ )
- Schneelasten, nach DIN 1055 auf die Grundfläche bezogen,  $p_1 = p_2 = s$ ,  $p_3 = p_4 = 0$

Zu beachten ist, daß die Eingabe der Stabbelastungen zunächst mit der  $z$ -Richtung beginnt und danach die Belastungsgrößen in  $x$ -Richtung folgen. Eine verteilte Momentenbelastung ist ungewöhnlich und daher nicht mit aufgenommen - sie könnte ggf. auf andere Weise (Kräftepaare) simuliert werden.

Verteilte Belastungen, die in der Richtung der Stabachse wirken, sollten durch Knotenlasten ersetzt werden. Dies gilt auch für andere Belastungsarten wie Teilgleichlasten, Einzelmomente usw., wenn an den Laständerungsstellen keine Knoten eingeführt worden sind.

### 1.3.3 Zwangsverformungen an Auflagern

Zwangsverformungen sind Auflagerverschiebungen  $v_x$  und  $v_z$  oder Verdrehungen  $\varphi$ , die als feste Werte, z. B. in DIN-Vorschriften oder Planungsunterlagen, gegeben sind. Sie erzeugen bei statisch unbestimmten Auflagersystemen Zwängungen und damit Schnittgrößen.

Die Vorzeichenregelung entspricht den Knotenlasten, also ist z. B. eine Stützensenkung positiv einzugeben.

Mit dem Programm FEM3 sind Zwangsverformungen nur an Auflagerknoten und nur in der Richtung unterdrückter Freiheitsgrade (Code 0) möglich.

### 1.3.4 Wärmeeinwirkungen

Wärmeeinwirkungen erzeugen in einem Stabwerk - abhängig vom Auflagersystem - Verformungen und/oder Spannungen. Der Lastfall wird für die Herleitung der Knotenlasten [1] und für die Eingabe in das Programm FEM3 in die folgenden zwei Lastanteile getrennt:

- *Temperaturschwankung*  $t_S$  der Schwerachse des Stabes, bei Erwärmung positiv
- *Temperaturunterschied*  $t_U$  zwischen den beiden Randfasern des Querschnittes, bei Rechtsdrehung am Anfangsknoten des Stabes positiv (vgl. Bild 5)

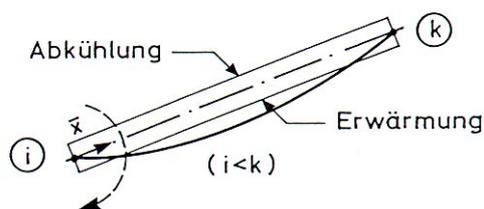


Bild 5 Vorzeichenregelung für Temperaturunterschied  $t_U$

Bei Wärmeeinwirkungen ist die für das Stabwerk konstante Temperaturdehnzahl  $\alpha_t$  einzugeben, beim Anteil Temperaturunterschied zusätzlich die Stabdicke in der gewählten Einheit (vgl. Beispiel 3.3).

Sind in einem Stabwerk Werkstoffe mit unterschiedlichen Temperaturdehnzahlen vorhanden (Beton, Kunststoffe usw.), so kann dies durch Umrechnung über die Temperaturwerte  $t_S$  und  $t_U$  berücksichtigt werden, z. B.

$$\begin{aligned}
 t_{S1} &= t_S && \text{für Stäbe mit } \alpha_{t1} \\
 t_{S2} &= t_S \cdot \alpha_{t2} / \alpha_{t1} && \text{für Stäbe mit } \alpha_{t2} \text{ usw.}
 \end{aligned}$$

## 1.4 Weitere Hinweise zur Problemaufbereitung

### 1.4.1 Verwendung von Eingabefeldern

Die Aufbereitung des Stabwerksystems und der Lastfälle für die elektronische Berechnung sollte nicht am Bildschirm, sondern mit Bleistift und Papier erfolgen. Auch eine sehr benutzerfreundliche Oberfläche eines Programms kann den Vorgang der Problemanalyse nicht ersetzen. Hierfür sind wie oben beschrieben vorrangig mechanische Grundkenntnisse und nur im geringeren Umfang EDV-Wissen und -Fertigkeiten Voraussetzung!

Dem Anfänger wird für eine übersichtliche und vollständige Eingabe die Verwendung von Eingabefeldern (vgl. Bild 6) empfohlen. Die freien umrandeten Felder sind vor der Sitzung am Rechner auszufüllen - diese Daten werden dann in derselben Reihenfolge vom Rechner verlangt, wobei noch Steuerbefehle für Menüwechsel, Auswahl von Menüpunkten, Hilfen usw. hinzukommen (vgl. Abschnitt 2). Vor dem Eintragen der Werte in das Formular ist eine Systemskizze mit der Knoten- und Stabnumerierung anzufertigen. Wichtig ist ferner eine Dokumentation aller für den Rechenlauf bedeutsamen Informationen (Datum, Projekt, Position, gewählte Einheiten usw.).

Geübte Anwender von Stabwerkprogrammen können ggf. auf die Verwendung des Eingabefelders verzichten, die Systemskizze und der Dokumentationsteil sollte jedoch stets schriftlich festgehalten und dem gedruckten Eingabeprotokoll beigelegt werden.

### 1.4.2 Speichern der Eingabedaten

Für die spätere Weiterbearbeitung eines Projektes, für nachträgliche Änderungen oder zur Weiterverarbeitung der Daten mit Postprozessoren (vgl. Abschnitt 1.6) ist das Abspeichern der System-, Belastungs- und ggf. auch der Ergebnisdaten erforderlich. Im Formulkopf sind Eintragungen vorgesehen, die das Wiederauffinden von Dateien und die Zuordnung zu Projekten erleichtern.

Soll z. B. die Variante 1 des Bauteils "Pfette" für den Auftrag "Weber" auf einer Diskette abgelegt werden, so kann wie folgt vorgegangen werden:

- Anlegen des Unterverzeichnisses "weber" mit md weber (vor dem Aufruf von FEM3)
- Eingabe des Dateinamens für das *System* mit Laufwerk und Pfadangaben  
a: weber\pfev1  
(die Erweiterung .F3S wird vom Programm ergänzt)
- Eingabe des Dateinamens für die *Belastungen* lastfallweise  
a:weber\pfev1-1  
a:weber\pfev1-2 usw.  
(die Erweiterung .F3B wird vom Programm ergänzt)

*Anmerkung: Bei den BASIC-Versionen FEM2.BAS und FEM3.BAS nach [1] werden die Dateinamen aus den Eingaben für "Laufwerk", "Pfad", "Projekt" und "Lastfallbezeichnung" programmintern gebildet.*

**Programm FEM3.PAS**

- ebenes Stabwerk -

gewählte Einheiten:

Datum \_\_\_\_\_  
 Kräfte \_\_\_\_\_  
 Längen : \_\_\_\_\_

**1. Sicherung der Eingabedaten**

Diskette ( ) 5.25" ( ) 3.5" Disk.-Nr./Name \_\_\_\_\_  
 Festplatte ( ) Laufwerk (c, d, ...) \_\_\_\_\_ Pfad \_\_\_\_\_

Systemskizze

Dateiname System

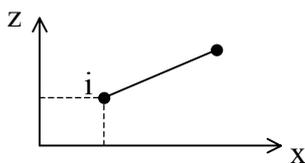
Dateiname Belastun

**2. Projekt**

Position

Elastizitätsmodul E=

**3. Knotenkoordinaten/Auflagerbedingungen**



Globales Koordinatensystem

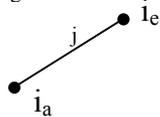
Auflagercode:  
 0 = fest, 1 = frei  
 (Ersatzwert 1, nicht einzugeben)

Kn.-Nr.	X	z	xR	zR	φR
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

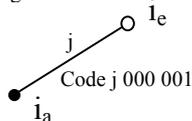
xR = x-Richtung, zR = z-Richtung, φR = φ-Richtung

**4. Zuordnung Stäbe/Knoten/Querschnittswerte/Intervalle/Zwischengelenke**

ohne Zwischen-gelenk



mit Zwischen-gelenk



$i_a < i_e$  !

Stab Nr.	Knoten Anfang/Ende		Querschnittswerte		Inter- valle ni	Zwischengelenke (l=Gelenk)					
	ia	ie	A	I		Anfang			Ende		
						xR	zR	φR	xR	zR	φR
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											

Bild 6a Eingabeformular System

**Programm FEM3.PAS**

- ebenes Stabwerk -

gewählte Einheiten:

Kräfte \_\_\_\_\_

Längen \_\_\_\_\_

Eingabe Belastung

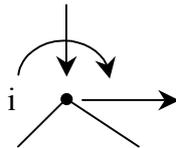
5. Lastfallbezeichnung \_\_\_\_\_

Lastfall \_\_\_\_\_

6. Theorie I. Ordnung ( ) II. Ordnung ( )

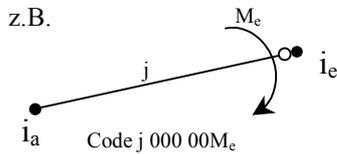
7. Knotenlasten (global)

positive Knotenlasten:



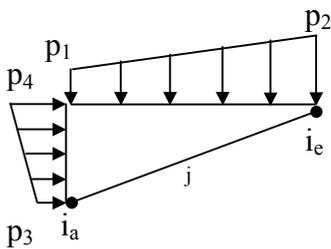
Kn.-Nr.	Fx	Fz	M

8. Knotenlasten an Zwischengelenken (global)



Stab Nr.	Anfang			Ende		
	Fx	Fz	M	Fx	Fz	M

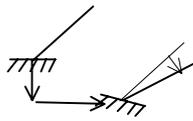
9. Stabbelastung (global)



Stab Nr.	vertikal		horizontal	
	p1=Anfang	p2=Ende	p3=Anfang	p4=Ende

10. Zwangsverformungen (global)

positive Zwangsverformungen (nur Lagerknoten)



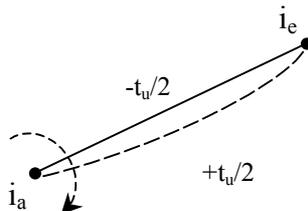
Kn.-Nr.	vx	vz	φ

11. Wärmeeinwirkungen, Temperaturdehnzahl  $\alpha_t =$  \_\_\_\_\_

Temperaturschwankung  $t_s$

Stab Nr.	tS

Temperaturunterschied  $t_U$  (d = Stabdicke)



Stab Nr.	tU	d

Bild 6b Eingabeformular Belastung

### 1.4.3 Graphische Kontrollen der System- und Belastungseingabe

Stabwerkprogramme für Mikrocomputer sind heute in der Regel so ausgelegt, daß schon während der Bearbeitung eines Problems graphische Eingabe- und Ergebnisdarstellungen möglich sind. Dadurch können Eingabefehler früh erkannt und unnötige Druckausgaben vermieden werden. Ferner wird das zeitraubende Durchsehen von Zahlenkolonnen reduziert.

Das Programm FEM3.PAS bietet in der Version 5.1 die Möglichkeit, eine erste Prüfung unmittelbar nach der Systemeingabe vorzunehmen. Aus der Bildschirmgraphik werden grob falsche Koordinaten, falsche Verknüpfungen zwischen Knoten, falsche Zwischengelenke und falsche Auflager ersichtlich. Die Fehler müssen korrigiert, und das System muß neu abgespeichert werden, ehe mit der Belastungseingabe fortgesetzt wird. Zur Kontrolle der Lastorte und -richtungen sowie Ordinaten steht ebenfalls eine Bildschirmgraphik zur Verfügung.

## 1.5 Berechnung und Ergebnisse

### 1.5.1 Berechnung

Nach der Eingabe, der Eingabekontrolle und dem Abspeichern der Eingabedaten wird in FEM3.PAS die Berechnung durch die Wahl des Ausgabemediums gestartet.

Zunächst berechnet das Programm die Anzahl der Freiheitsgrade  $f$  des Systems und die Bandbreite  $b$  der Koeffizientenmatrix und zeigt die Werte auf dem Bildschirm an. Werden die in der Version 5.1 festgelegten Höchstwerte

$$\max f = 420 \text{ und } \max b = 60$$

überschritten, unterbricht das PASCAL-Programm die Berechnung mit einer Fehlermeldung und kehrt in das Hauptmenü zurück. Abhilfen sind wie folgt möglich:

- neue Numerierung zur Verkleinerung der Bandbreite  $b$
- Verkleinerung des Systems
- Anwendung des BASIC-Programms FEM3.BAS, wobei die von FEM3.PAS erstellten Eingabedateien verwendet werden können

Bei Fortsetzung der Berechnung wird das Gleichungssystem (1) mit dem Gaußschen Algorithmus gelöst. Singuläre Gleichungssysteme werden durch einfache Abfragen der Hauptdiagonalelemente  $|g_{i,i}| < 10^{-5}$  abgefangen. Sie bewirken einen Abbruch der Berechnung mit der Bildschirmmeldung "Gleichungssystem nicht lösbar, System überprüfen". Da verschiebliche Stabwerke zu singulären Gleichungssystemen führen, ist nun eine Überprüfung des Auflagersystems auf Vollständigkeit (ggf. mit dem Polplan) oder des Auflagercodes erforderlich.

*Vorsicht:* Bei größeren Stabwerksystemen ist es möglich, daß das hier verwendete Kriterium  $|g_{i,i}| < 10^{-5}$  nicht mehr greift. Hier ist eine besondere Sorgfalt bei der Wahl der Auflagerbedingungen unumgänglich!

### 1.5.2 Allgemeine Knotenverschiebungen

Die Knotenverschiebungen in  $x$ - und  $z$ -Richtung (nach rechts und nach unten positiv) werden in der gewählten Längeneinheit mit fünf Nachkommastellen gedruckt. Somit ist bei der Wahl der Standardeinheit  $m$   $0,01$  mm die kleinste ausgegebene Verschiebung. Verdrehungen  $\varphi$  sind im Bogenmaß zu verstehen. Um  $\varphi$  in Grad zu erhalten, ist mit dem Wert  $57,3$  zu multiplizieren. Verdrehungen  $\varphi$  werden nur am Stabanfang und am Stabende ausgegeben.

Werden alle Verschiebungen gleich Null ausgedruckt, so können hierfür die folgenden Gründe vorliegen:

- Es wurden keine Belastungen eingegeben.
- Es treten keine Knoten- und Stabdrehwinkel auf (z. B. beim Durchlaufträger mit konstanten Feldweiten und Randeinspannung unter Gleichlast, wenn nur Anfangs- und Endverschiebungsgrößen berechnet wurden).
- Die Werte von  $E$  und/oder  $I$  wurden zu groß eingegeben (z. B.  $I = 1$  m<sup>4</sup> bei einem Hallenrahmen).

Sind die Verschiebungen sehr groß (u. U. Formatüberlauf), so ist nach den folgenden Fehlerursachen zu suchen:

- Die Dehnsteifigkeiten  $EA$  der Stäbe und/oder die Biegesteifigkeiten  $EI$  sind zu klein (z. B.  $E = 1$  kN/m<sup>2</sup>), oder
- das System ist "fast verschieblich" (vgl. Beispiel 3.15).

### 1.5.3 Schnittgrößen

Die Schnittgrößen  $N$ ,  $Q$  und  $M$  werden in der gewählten Kraft- und Längeneinheit mit den aus der Stabstatik gewohnten Vorzeichen ausgegeben (vgl. Abschnitt 1.2.4). Die Bezeichnungen  $N$  und  $Q$  entsprechen den Längskräften und Querkäften. Die Stabkennzahlen  $\varepsilon$  werden bei der Berechnung nach Theorie II. Ordnung hinzugefügt.

Die Schnittgrößenausgabe ist auf fünf Vor- und drei Nachkommastellen formatiert. In Ausnahmefällen (z. B. Großbrücke nach Beispiel 3.8) sollte durch Wahl der Krafteinheit MN die Zahlengröße reduziert werden.

### 1.5.4 Auflagerreaktionen

Für die Auflagerreaktionen gelten dieselben Vorzeichenregelungen wie für Knotenkräfte. Das heißt insbesondere, daß nach oben gerichtete Stützkkräfte ein *negatives* Vorzeichen haben!

Dem Benutzer des Programms FEM3 wird die Nachrechnung der Gleichgewichtsbedingungen empfohlen. Bei Nichterfüllung kann auch eine falsche Belastungseingabe Ursache sein, z. B. bei Verwechslung der  $x$ - und  $z$ -Richtung oder bei einem Vorzeichenfehler.

*Anmerkung: Manche Programme führen die Gleichgewichtskontrollen intern durch [9]. Dennoch sollte der Anwender zumindest  $\Sigma H$  und  $\Sigma V$  mit den "beabsichtigten" Belastungen und den elektronisch berechneten Auflagerreaktionen bilden!*

### 1.5.5 Graphische Kontrollen der Ergebnisse

Durch die graphische Ausgabe der Ergebnisse ist eine weitere Überprüfung der System- und Lasteingaben möglich. Insbesondere sollten die Rand- und Übergangsbedigungen sorgfältig beachtet werden. Ein Stabwerkprogramm mit den heute üblichen graphischen Fähigkeiten ermöglicht es ohne zusätzlichen Aufwand, anhand der Biegelinien auf die Plausibilität der Schnittkräfte zu schließen. Die hohe Auflösung der Zustandslinien wird durch eine gleichbleibende Anzahl der Stabintervalle gewährleistet.

## 1.6 Datenschnittstelle und Weiterverarbeitung

Zusätzlich zu den Eingabedateien \*.F3S und \*.F3B können vor Verlassen des Programms FEM3 noch die Ergebnisse in der Datei \*.F3E abgespeichert werden. Diese drei Dateien bilden dann eine Datenschnittstelle zu anderen Programmen (Postprozessoren).

Mit dem Programm FEM3K.PAS werden alle Eigenwerte (Knicklasten) des mit FEM3.PAS erzeugten Stabwerks ermittelt und die Knickbiegelinien dargestellt.

Das Programm *KOMB2.BAS (Version 5.0)* bildet die Min/max-Kombinationen aus mehreren Verkehrslastfällen und zusätzlichen Einzelverkehrslasten (z. B. nach DIN 1072). Ferner ist eine einfache Überlagerung aus mehreren Grundlastfällen ( $g, p, s$  usw.) mit festen Lastfaktoren möglich, vgl. Beispiel 3.11.

Um komplexe Aufgaben zu bearbeiten, können ggf. weitere Programme (PROFIL mit zugehörigen Dateien für Walzprofile, KNICK usw., vgl. Anhang 3) angeschlossen werden.

## 1.7 Berechnungen nach Theorie II. Ordnung

### 1.7.1 Vorbemerkungen

Nach einigen Berechnungsvorschriften (DIN 1052, DASt-Richtlinie 008, DIN 18 800 Teil 2) kann der Stabilitätsnachweis für ein Stabwerk als Spannungsnachweis mit den Schnittgrößen aus Theorie II. Ordnung geführt werden. Für eine solche Berechnung sind die  $\gamma$ -fachen Lasten einzuführen, wobei neue Sicherheitskonzepte (GruSiBau, DIN 18 800 Teil 1) die Teilsicherheitsbeiwerte  $\gamma_F$  für Einwirkungen und  $\gamma_M$  für Widerstände verwenden. Als ein zusätzlicher Lastfall sind geometrische Ersatzimperfektionen (Ersatzlasten für Vorkrümmungen und Schrägstellungen der Stäbe) zu wählen, "die sich der zum niedrigsten Knickeigenwert gehörenden Verformungsfigur möglichst gut anpassen" (DIN 18 800 Teil 2).

Nach der Berechnung der maßgebenden Lastkombination nach Theorie II. Ordnung wird der Stabilitätsnachweis nach DIN 188 00 Teil 2 wie folgt geführt:

- als *Spannungsnachweis* (Verfahren Elastisch-Elastisch)

$$\sigma = N^{II.O.}/A + M^{II.O.}/W; \quad \sigma/\sigma_{R,d} \leq 1 \quad (2a)$$

( $\sigma_{R,d}$  = Grenzspannung,  $\gamma_M = 1,1$  = Teilsicherheitsbeiwert für den Widerstand)

- falls an nur einer Stelle des Stabwerks die Bedingung (2a) nicht erfüllt wird, als
- *Interaktionsnachweis* der Querschnittstragfähigkeit (Verfahren Elastisch-Plastisch)

$$N^{II.O.}/N_{Pl,d} + 0,9 \cdot M_{II.O.}/M_{Pl,d} \leq 1 \quad \text{bei } V/V_{Pl,d} \leq 0,33 \quad \text{und } N/N_{Pl,d} > 0,1 \quad (2b)$$

(Auszug aus Tabelle 16, DIN 18 800 Teil 1 mit  $N_{Pl,d}$   $M_{Pl,d}$  und  $V_{Pl,d}$  = Grenzschnittgrößen im vollplastischen Zustand)

- nach *Fließgelenktheorie II. Ordnung* (Verfahren Plastisch-Plastisch) durch Ansatz von Fließgelenken an den Stellen des Systems, an denen Gleichung (2a) nicht erfüllt ist und Neurechnung bis zum Versagen des Systems

Für die drei Nachweisformen wird eine Erweiterung des Stabwerkprogramms benötigt, in der das Gleichgewicht der Kräfte am verformten System gebildet wird (= Theorie II. Ordnung). Hierfür sind beim verallgemeinerten Weggrößenverfahren zwei verschiedene Verfahren möglich:

- getrennte Ermittlung der Einflüsse aus Theorie II. Ordnung und Addition als geometrische Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{G}_G$  in die Gleichung (1)

$$(\mathbf{G}_R + \mathbf{G}_G) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \quad (3a)$$

mit iterativer Verbesserung von  $\mathbf{G}_G$  [2], [12]

- Herleitung der von der Stabkennzahl  $\varepsilon = l \cdot \sqrt{N/EI}$  abhängigen Elemente  $g_{i,k}$  der Steifigkeitsmatrix und der Lastgrößen am geometrisch bestimmten System

$$\mathbf{G}_R(\varepsilon) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F}(\varepsilon), \quad (3b)$$

wobei eine Iteration nur erforderlich ist, wenn sich die Längskräfte im System und damit die Stabkennzahlen  $\varepsilon(N)$  ändern [1], [12] usw.

Das Programm FEM3.PAS verwendet die zuletzt genannte Methode, vgl. [1].

### 1.7.2 Iterationen

Bei Berechnungen nach Theorie II. Ordnung wird die Iterationsschranke  $\delta$  gleich 5 ‰ gesetzt. Als zu iterierende Größe wird die Maximalverschiebung des Systems nach Theorie I. Ordnung gewählt. Sind alle Verschiebungen betragsmäßig kleiner als  $10^{-5}$ , so wird als Iterationsgröße das maximale Biegemoment des Systems nach Theorie I. Ordnung benutzt. Zu beachten ist, daß zur Iteration nur Größen am Stabanfang und -ende berücksichtigt werden.

Der Abbruch der Iteration erfolgt bei

$$|(v_{\text{neu}} - v_{\text{alt}})/v_{\text{alt}} \cdot 1000| < \delta \quad (4)$$

wobei  $v_{\text{neu}}$  aus dem aktuellen und  $v_{\text{alt}}$  aus dem vorangegangenen Iterationsschritt gebildet wird. Nach dem 50. Iterationsschritt wird die Berechnung auch ohne Erfüllung des Abbruchkriteriums beendet. In diesem Fall sind die Ergebnisse in der Regel nicht brauchbar, siehe unten.

### 1.7.3 Berechnung und Ergebnisse

Für jeden Iterationsschritt wird die zugehörige Verschiebungsgröße  $v_{\text{neu}}$  ausgegeben. Damit ist eine Kontrolle der Iteration möglich: Eine große Anzahl von Iterationsschritten ist ein Hinweis dafür, daß der Druckkraftzustand des Systems nahe bei der *Knicklast* liegt. Dies wird auch durch den Vergrößerungsfaktor

$$\alpha = v^{\text{II.O.}}/v^{\text{I.O.}} \quad (5)$$

angezeigt, der dann überproportional anwächst.

Hat die Wertefolge  $v_{\text{neu}}$  keinerlei Konvergenzeigenschaft oder sind die Werte unsinnig (z. B. gegen die Kräfte gerichtet, vgl. Beispiel 4.1, Fall b, Bild 37b), so ist dies ein Hinweis auf Druckkraftzustände oberhalb der *Knicklast*, d. h., das Gleichgewicht ist labil.

*Anmerkung: Daß solche Konvergenzprobleme bei Handrechnungen oder in Programmen zusätzlich von der Zahlengenauigkeit beeinflusst werden können, zeigt das Beispiel 4.5. TURBO-PASCAL verwendet jedoch 6 Bytes für real-Variable (FORTRAN und BASIC: 4 Bytes), d. h., die in Berechnungen mit FEM3.PAS gegebene Zahlengenauigkeit von etwa 11 Stellen ist meist ausreichend.*

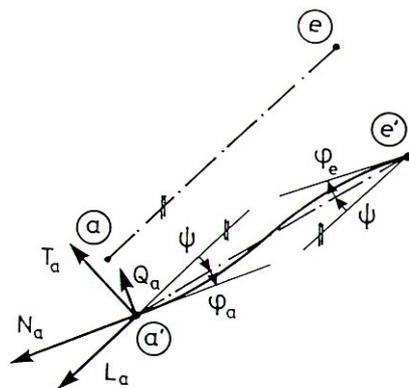
Für das praktische Vorgehen bei Stabilitätsnachweisen nach Theorie II. Ordnung wird empfohlen,

- zunächst den Tragsicherheitsnachweis nach Theorie I. Ordnung unter Gebrauchslasten zu führen (zwecks Ausschluß unsinniger Systeme bzw. Lastzustände und zur Klärung, ob es sich um eher *längskraft-* oder eher *biegemomentenbeanspruchte Systeme* handelt, vgl. Bild 8),
- die *Knicklast* am vereinfachten System abzuschätzen oder sie mit dem Programm FEM3K zu ermitteln (zur Vermeidung von Druckkraftzuständen oberhalb der *Knicklast*),
- das Konvergenzverhalten während der Iteration zu beobachten und den Vergrößerungsfaktor nach Gleichung (5) zu berechnen.

Nach Erfüllung des Abbruchkriteriums (4) werden die globalen Stabendverschiebungen ausgedruckt, wobei auf Abschnitt 1.5.2 verwiesen wird.

Anschließend erfolgt die Ausgabe der stabbezogenen Längskräfte  $N$ , der Querkräfte  $Q$  sowie der Biegemomente  $M$ . Die Größen  $N$  und  $Q$  sind auf die *unverformte Stabachse* des Aus-

gangssystems bezogen. Um hieraus Schnittgrößen zu erhalten, die als Längs- und Querkräfte auf den Schnittufern an den Enden der *verformten Stabachse* wirken, sind nach Bild 7 Transformationen mit dem Stabdrehwinkel  $\psi$  und den Knotendrehwinkeln  $\varphi_a$  und  $\varphi_e$  erforderlich:



$$\alpha = \psi + \varphi_a$$

$$\beta = \psi + \varphi_e$$

$$N_a = L_a \cdot \cos \alpha + T_a \cdot \sin \alpha$$

$$Q_a = -L_a \cdot \sin \alpha + T_a \cdot \cos \alpha$$

$$N_e = L_e \cdot \cos \beta + T_e \cdot \sin \beta$$

$$Q_e = -L_e \cdot \sin \beta + T_e \cdot \cos \beta$$

Bild 7 Transformation von der unverformten auf die verformte Stabachse

Deutlich erkennbar wird dieser Zusammenhang z. B. an der Pendelstütze des Beispiels 4.5, Stab 5 mit  $L = -412$  kN und  $T = -70$  kN und nach Transformation mit  $\beta = 0,171$  (Bogenmaß):  $N = -423$  kN und  $Q = 0 - 412 \cdot \sin 0,171 + 70 \cdot \cos 0,171 \approx 0$ . Allerdings ist das Beispiel nicht typisch, da dort zu Vergleichszwecken ein Längskraftzustand in der Nähe der Knicklast angesetzt wird.

Der Unterschied zwischen  $N$  und  $L$  sowie  $Q$  und  $T$  spielt i. allg. nur bei Anwendung der Fließgelenktheorie II. Ordnung in der Nähe der Fließgelenke eine Rolle. Bei kleinen Winkeln können die Nachweise (2a) oder (2b) auch mit  $N \approx L$  und  $Q \approx T$  geführt werden.

Zusätzlich zu den Stabendkräften wird die Stabkennzahl  $\varepsilon$  ausgegeben. Sie ist z. B. für die Festlegung der Ersatzimperfektionen von Bedeutung. In DIN 18 800 Teil 2 wird bei  $\varepsilon > 1,6$  gefordert, daß bei Stäben mit Stabdrehwinkeln Vorverdrehungen *und* Vorkrümmungen angesetzt werden müssen.

*Anmerkung: Bei Zugstäben innerhalb eines Stabwerks wird  $\varepsilon = 0$  gesetzt, d. h., diese werden nach Theorie I. Ordnung berechnet und damit ihr versteifender Einfluß vom Programm FEM3 vernachlässigt. Dies ist bei Vergleichen mit Ergebnissen von anderen Programmen zu beachten, vgl. Beispiel 4.6!*

#### 1.7.4 Last-Verschiebungskurve und Knicklast

Last-Verschiebungskurven werden zur Analyse des Stabilitätsverhaltens von druckbeanspruchten Systemen benötigt. Sie können in einem gewissen Bereich ( $N < N_{KI}$ ) mit dem Programm FEM3 durch Laststeigerung berechnet werden, vgl. Bild 8.

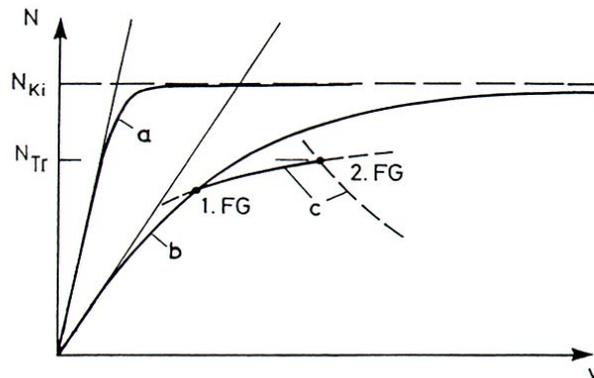


Bild 8 Last-Verschiebungskurven

- a) mehr längskraftbeanspruchte Systeme
- b) mehr biegebeanspruchte Systeme
- c) bei Ausbildung von Fließgelenken

Die Kurven werden nach oben durch die kleinste Knicklast des Systems begrenzt - die Verformungen und Schnittgrößen wachsen für  $N \rightarrow N_{KI}$  gegen unendlich (vgl. die oben diskutierten Konvergenzprobleme).

Wird die Interaktionsbeziehung (2b) an einer Stelle des Systems vor dem Erreichen der Knicklast überschritten, so bildet sich dort das 1. Fließgelenk aus. Durch Einführen des Fließgelenks in das statische System (vgl. Beispiel 4.7) ändert sich dessen Steifigkeit - die jetzt gültige Last-Verschiebungskurve verläuft flacher (vgl. Bild 8). Eine weitere Laststeigerung ist nun möglich, bis sich ein nächstes Fließgelenk an einer anderen Stelle bildet usw. Das letzte Fließgelenk vor der Ausbildung der kinematischen Kette bestimmt die Traglast  $N_{Tr}$  des Systems nach der *Fließgelenktheorie II. Ordnung*. Danach fällt die Last-Verschiebungskurve des Systems ab - dieser sog. "überkritische Bereich" ist jedoch mit dem Programm FEM3 nicht mehr berechenbar.

Mit dem Programm FEM3 müssen die Lagebestimmung der Fließgelenke, ihre evtl. Veränderung bei Laststeigerung und die Prüfung der Interaktionsbeziehungen, die durch  $N$  und  $Q$  beeinflusst sein können, von Hand vorgenommen werden. Dies ist nur bei einfachen Systemen und Nachrechnungen ratsam (vgl. Beispiele 4.7 und 4.8). Für programmgesteuerte Berechnungen sei z. B. auf [9] und [17] verwiesen.

## 1.8 Knicklasten und Knickbiegelinien

### 1.8.1 Grundlagen

Das Pascal-Programm FEM3K.PAS ist ein Postprozessor für FEM3.PAS, es gelten die gleichen Hinweise hinsichtlich der System- und Lastaufbereitung, vgl. Abschnitte 1.2 und 1.3.

Weiterhin gelten die folgenden Annahmen:

- ideal-elastisches Werkstoffverhalten
- konservative Belastung, d. h., die Lastrichtung bleibt bei Verformungen erhalten
- sämtliche Belastungen und inneren Kraftgrößen sind proportional zu einem Lastfaktor  $\lambda$

Die Berechnung erfolgt auf der Grundlage des *linearisierten* Eigenwertproblems der Stabknickung. Neben der linearen Gesamtsteifigkeitsmatrix des Stabwerks (vgl. Programm FEM3 [1]) wird zusätzlich die geometrische Steifigkeitsmatrix benötigt, die den benachbarten Verformungszustand des Stabwerks beschreibt (zur theoretischen Herleitung s. [2]). Zur Lösung des damit vorliegenden allgemeinen Eigenwertproblems der Form

$$(\mathbf{G}_R^l + \lambda_i \cdot \mathbf{G}_R^g) \mathbf{v}_i^f = \mathbf{0}$$

mit  $\mathbf{G}_R^l$  = lineare Gesamtsteifigkeitsmatrix mit Berücksichtigung der Randbedingungen  
 $\mathbf{G}_R^g$  = geometrische Gesamtsteifigkeitsmatrix mit Berücksichtigung der Randbedingungen  
 $\lambda_i$  = Eigenwerte bzw. kritische Lastfaktoren ( $i = 1, \dots, f$ )  
 $\mathbf{v}_i^f$  = den Eigenwerten zugeordnete Eigenvektoren bzw. relative Knotenverschiebungen  
 $f$  = Anzahl der Freiheitsgrade

wird dieses zunächst unter Beibehaltung der Symmetrieeigenschaften in das "spezielle" oder "Standard"-Eigenwertproblem überführt. Hierauf läßt sich die Jacobi-Methode zur Bestimmung der Eigenwerte  $\lambda_i$  und -vektoren  $\mathbf{v}_i^f$  anwenden. Durch Rücktransformation dieser Größen ergeben sich die gesuchten Lastfaktoren und zugehörigen relativen Knotenverschiebungen.

Das Jacobi-Verfahren bewirkt durch fortgesetzte Orthogonaltransformationen, die jeweils ein außerdiagonales Elementpaar der untersuchten Matrix zu Null machen, daß diese gegen eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten als Diagonalelementen konvergiert. Die Quadratsumme der außerdiagonalen Elemente, die "außerdiagonale Norm", liefert dabei das Abbruchkriterium für die iterative elektronischen Berechnung (Pope-Tompkins-Algorithmus). Damit läßt sich im Rahmen der rechnerinternen Zahlendarstellung eine beliebige *numerische* Genauigkeit erzielen. Ein besonderer Vorteil liegt darin, daß das Verfahren gegen Rundungsfehler sehr stabil ist.

### 1.8.2 Hinweise zur Problemaufbereitung

Bei der Bewertung der Ergebnisse muß der linearisierte Ansatz für die Verschiebungsgrößen beachtet werden. Wie bei der Finite-Element-Methode üblich, ist eine Genauigkeitssteigerung durch Erhöhung der Elementanzahl möglich. Insbesondere müssen bei der Knickuntersuchung relativ kleiner Systeme mit wenigen Knotenfreiheitsgraden zusätzliche Zwischenpunkte (Knoten) eingeführt und damit die Anzahl der Elemente erhöht werden, um zutreffende Ergebnisse zu erzielen.

Ferner müssen schon bei der Diskretisierung der Stabwerke die folgenden Einschränkungen beachtet werden:

- Es ist nicht vorgesehen, eine über die Stablänge *veränderliche* Längskraft direkt zu berücksichtigen. Dies ist nur näherungsweise durch Einfügen von Zwischenknoten möglich. Bei einer Übernahme des Längkraftzustandes aus einer Vorlaufrechnung mit FEM3 wird der betragsmäßig größte Wert der Längskraft als über die Stabachse konstant angenommen.
- Positive Längskräfte (Zug) werden nicht berücksichtigt. Zugstäbe gehen wie Stäbe mit  $N = 0$  in die Berechnung ein.
- Die graphische Darstellung der Knickbiegelinien im Stabbereich beruht auf den aus der Statik bekannten Verformungsfunktionen für das unbelastete Stabelement in Abhängigkeit von den Stabendverformungen. Die Knickbiegelinien werden also nur als Näherungen dargestellt.

### 1.8.3 Berechnung und Ergebnisse

Bei einem Stabwerk mit  $n$  Freiheitsgraden liefert das Verfahren auch  $n$  Eigenwerte (kritische Lastfaktoren bzw. Knicklasten) und  $n$  Eigenformen (Knickbiegelinien bzw. relative Knotenverschiebungen).

Die Ergebnisse lassen sich sowohl graphisch als auch in Textform ausgeben. Neben der Bildschirmausgabe besteht die Möglichkeit, Text und Graphik auf einem Drucker oder Plotter auszugeben oder in Dateien zu schreiben, welche nachträglich mit geeigneten Programmen (Editor usw.) bearbeitet werden können. Die Textdateien werden im ASCII-Format und die Graphiken wahlweise im HPGL- oder DXF-Format gespeichert.