

# Zur Leistungsfähigkeit, korrekten Anwendung und Kontrolle von EDV-Programmen für die Berechnung räumlicher Stabwerke im Stahlbau (Teil 2)

(Fortsetzung aus Heft 6/2008)

## 4 Umlagerung der Normalkräfte und die Folgen

Bei ebenen Systemen, die in ihrer Ebene belastet sind, ändern sich die Normalkräfte nur unwesentlich, wenn statt nach Th.I.O. nach Th.II.O. gerechnet wird, auch wenn zusätzlich geometrische Ersatzimperfectionen oder äquivalente Ersatzkräfte in der Systemebene berücksichtigt werden. Das **Verhältnis** der Normalkräfte bleibt ebenfalls nahezu konstant, wenn die Einwirkungen z. B. vom charakteristischen Niveau auf das Design-Niveau oder zur Ermittlung der Biegeknicklast darüber hinaus proportional gesteigert werden. Der Normalkraftzustand wird deshalb auch als „eingepägt“ bezeichnet. Eine Änderung der Normalkräfte bzw. ihrer Verhältnisse zueinander um mehr als ungefähr 3 % kann als Indiz für Eingabe- oder Rechenfehler betrachtet werden.

Werden ebene Tragwerke zusätzlich zu den planmäßigen, in der Systemebene wirkenden Lasten durch Einwirkungen oder Imperfectionen senkrecht zur Ebene beansprucht, kann sich der Normalkraftzustand signifikant ändern, auch wenn diese Beanspruchungen nur sehr gering sind. In [8] wird ein ebener Fachwerkdurchlaufträger über zwei Felder mit je 25 m Spannweite untersucht, der am Obergurt durch die Dachkonstruktion horizontal gehalten wird. Die maßgebende Knickbiegeline wird durch das seitliche Ausweichen des gedrückten Untergurts und der Druckdiagonalen neben dem Mittelaufleger gekennzeichnet. Infolge der zur Knickbiegeline affin angesetzten Ersatzimperfectionen lagern sich die Druckkräfte im Untergurt neben dem

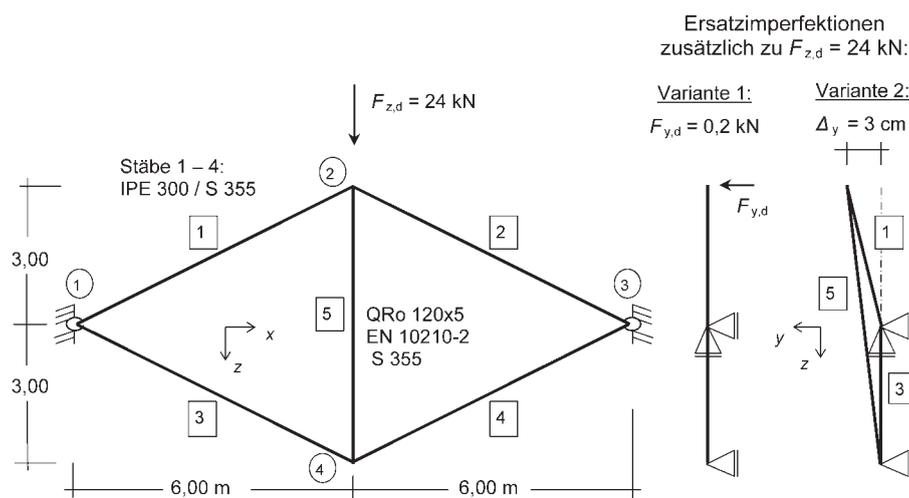


Bild 5. Rautenfachwerk mit Bemessungslasten  
Fig. 5. Rhomboid truss and design load

mittleren Auflager in den Obergurt um. Die maximalen Änderungen betragen 15 %. Änderungen ähnlichen Ausmaßes ergaben sich auch in [9] bei der Untersuchung einer Leichtbauhalle mit 50 m Spannweite.

Im Folgenden werden die komplexen Auswirkungen, die sich aus geringfügigen Störungen der idealen Struktur in Gestalt von Ersatzimperfectionen auf den Normalkraftzustand und die Stabilität ergeben, an einem besonders einfachen System erläutert (Bild 5).

### 4.1 Rautenfachwerk

Das Rautenfachwerk (Bild 5) mit biegesteifen Knoten wird planmäßig nur in seiner Ebene belastet. Als Imperfection wird eine außerplanmäßige Lage des Knotens 2 um  $\Delta_y = 3$  cm angenommen, was ungefähr 1/200 der Länge der Druckstäbe entspricht (Variante 2). Aus den daraus resultierenden Vorverdrehungen der Druckstäbe

1, 2 und 5 und deren am ideal ebenen Fachwerk ermittelten Druckkräften ergibt sich eine äquivalente Ersatzlast in y-Richtung am Knoten 2 von 0,2 kN (Variante 1).

### 4.2 Umlagerung der Normalkräfte

In Bild 6 und Tabelle 6 sind die exakten und die mit P5 bis P7 und P10 berechneten Ergebnisse gegenübergestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die diesen Programmen zugrunde liegende Th.II.O. (-S und -M) völlig ungeeignet ist, das Problem hinreichend genau zu beschreiben. Überraschenderweise liefert sogar das Programm P1, das auf einer Th.III.O. basiert, für beide Varianten völlig unzureichende Ergebnisse. Obgleich das System zu weniger als 10 % ausgenutzt ist, ändern sich die Normalkräfte in der Variante 1 ungefähr um den Faktor 2 bzw. 1/4. Für diese eklatante Umlagerung der Kräfte von den Druckstäben 1 und 2 über die Vertikale in die Zugstäbe gibt es zwei

Ursachen. Zum einen ist der Normalkraftzustand am idealisierten ebenen Gelenkfachwerk statisch unbestimmt, so dass mehrere Gleichgewichtszustände allein mit Normalkräften möglich sind. (Wird hingegen das Lager am Knoten 3 (Bild 5) in x-Richtung verschieblich ausgebildet, so ist der Normalkraftzustand am zugehörigen Gelenkfachwerk statisch bestimmt, und eine Umlagerung findet nicht statt.)

Außerdem ist das System so aufgebaut, dass durch die Zusatzbeanspruchung senkrecht zur Ebene „weiche“ Knoten entstehen (hier: Knoten 2 mit den Druckstäben 1 und 2), andere Knoten aber nicht an Steifigkeit verlieren (hier: der durch das Lager in der Ebene gehaltene Knoten 4 mit den Zugstäben 3 und 4). Bei Systemen, die auch senkrecht zu ihrer Ebene eine große Steifigkeit aufweisen, ist eine wesentlich geringere Umlagerung zu erwarten.

Wird nach Th.I.O. oder nach einer Th.II.O. am ideal ebenen System mit der Ersatzlast  $F_{y,d}$  gerechnet (Variante 1), so entkoppelt sich das Tragverhalten. Die Zustände „In der Ebene“ und „Senkrecht zur Ebene“ beeinflussen sich in keiner Weise, und die Normalkräfte ändern sich durch die Ersatzlast nicht im Geringsten. Die Verschiebung  $v = 483$  bzw.  $552$  mm des Knotens 2 fällt um den Faktor 6 bzw. 7 zu groß aus. Erst bei einer hinreichend genauen Erfassung geometrischer Nichtlinearitäten werden die intensive Kopplung aller statischen Größen und die ungewöhnlich große Umlagerung der Normalkräfte sichtbar, was auch gravierende Rückwirkungen auf die Biegeknicklast und den Verzweigungslastfaktor  $\eta_{Ki}$  hat (s. Abschnitt 4.3).

Wird statt der Ersatzlast die geometrische Imperfektion  $\Delta_y$  angesetzt (Variante 2), so werden die Ergebnisse nach Th.II.O. zwar deutlich besser, sind aber immer noch viel zu ungenau. So ist z. B. die Druckkraft in den Stäben 1 und 2 ungefähr um den Faktor 2 zu groß.

Aus den völlig verschiedenen Ergebnissen nach Th.II.O. für die Varianten 1 und 2 müsste die (falsche) Schlussfolgerung gezogen werden, dass die Methoden „geometrische Ersatzimperfektionen“ und „Ersatzkräfte“ nicht äquivalent sind!

Für die Berechnungspraxis folgt, dass die Druckstäbe 1 und 2 und deren

Anschluss an die Knoten für die Normalkraft am ideal ebenen Fachwerk, die Stäbe 3 bis 5 jedoch für die Kräfte am imperfekten System zu bemessen sind. Hierbei ist der ausreichend dimensionierte Anschluss der Zugstäbe von besonderer Bedeutung. Bei den

Druckstäben ist ggf. zusätzlich eine Vorkrümmung zu berücksichtigen. Bei dem hier betrachteten Rautenfachwerk ergibt sich infolge einer Vorkrümmung der Druckstäbe aus der Systemebene heraus eine weitere, wenn auch deutlich geringere Umlagerung der Nor-

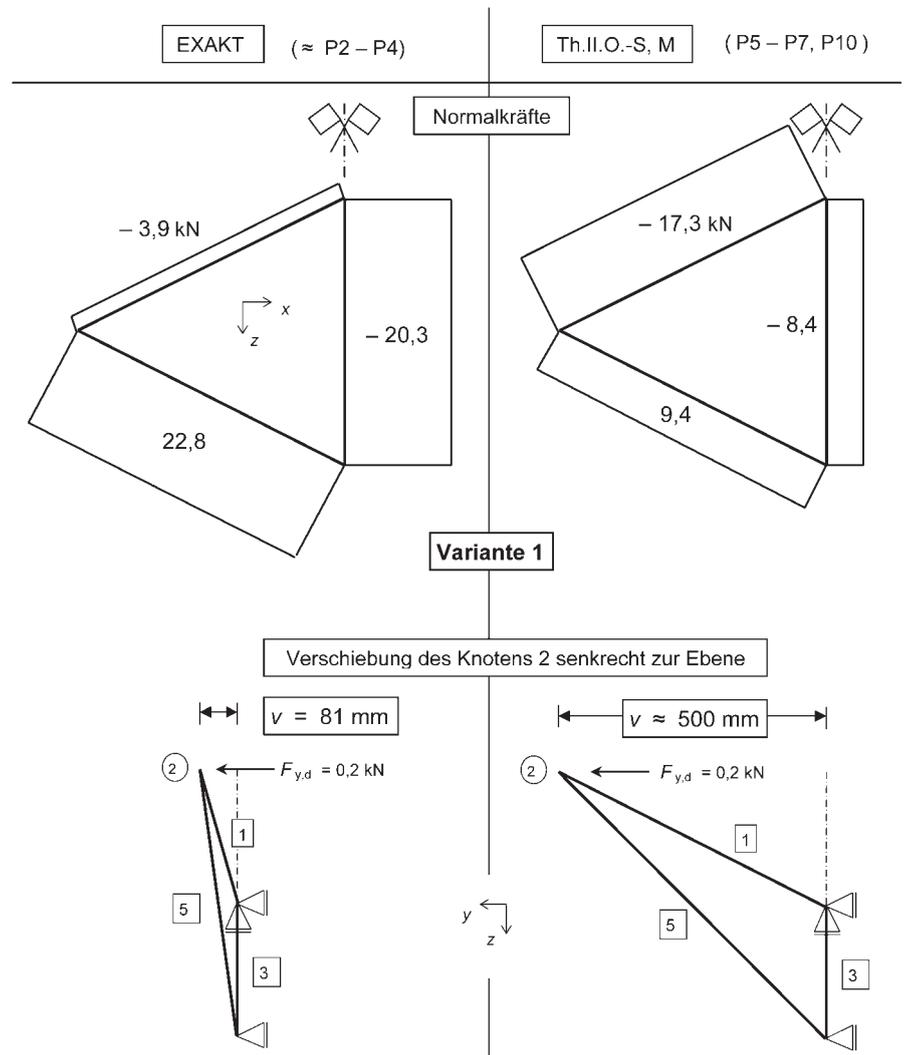


Bild 6. Vergleich der Normalkräfte und der Verschiebungen (vgl. Tab. 6)  
Fig. 6. Relationship of normal forces and displacements (cf. tbl. 6)

Tabelle 6. Umlagerung der Normalkräfte; Verschiebung v  
Table 6. Rearrangement of normal forces; displacement v

Statische Größe (kN, mm)	ideal eben ( $H_y = 0,$ $\Delta_y = 0$ )	Variante 1: $F_{y,d} = 0,2$ kN			Variante 2: $\Delta_y = 30$ mm		
		exakt	Th.III.O. (P2 ≈ P3, P4)	Th.II.O. (P7 ≈ P5, P6, P10)	exakt	Th.III.O. (P2 ≈ P3, P4)	Th.II.O. (P7 ≈ P5, P6, P10)
$N_1 = N_2$	-17,3	-3,9	-3,7	-17,3	-3,9	-3,2	-7,3
$N_3 = N_4$	9,4	22,8	23,0	9,4	22,8	23,4	19,3
$N_5$	-8,4	-20,3	-20,5	-8,4	-20,3	-20,8	-17,3
v (elast. Anteil)	0	81	82	483 – 641	57	66 – 58	83
$\sigma_v / \sigma_{R,d}$ (%)	1 %	9 %	10 %	50 %	9 %	9 %	9 %

malkräfte, während eine Vorkrümmung in der Ebene den Normkraftzustand praktisch nicht verändert.

### 4.3 Verschwinden des Verzweigungsproblems

Wie bereits erläutert, bleibt bei ebenen, in ihrer Ebene belasteten Systemen das Verhältnis der Normkräfte bei proportionaler Laststeigerung nahezu konstant. Hieraus folgt, dass sich die zu jeder Laststufe gehörige Biegeknicklast nicht ändert; die Asymptote der Kraft-Verformungskurven ist eine horizontale Gerade (Bild 7, Gerade bei  $F_{z,Ki,d} = 25,3$  kN für das ideal ebene System ohne Umlagerung). Die zugehörige Eigenform ist durch das Ausweichen des Knotens 2 aus der Systemebene heraus gekennzeichnet.

Treten jedoch wie im vorliegenden Beispiel infolge der außerplanmäßigen Lage des Knotens 2 größere Umlagerungen der Normkräfte auf, so ist zu erwarten, dass für jede Laststufe eine andere Biegeknicklast gilt. Dies würde bedeuten, dass sich statt einer horizontalen Asymptote eine Grenzkurve ergibt.

Im vorliegenden Fall ist die Umlagerung von den Druckstäben in die Zugstäbe jedoch so groß, dass das oben beschriebene Biegeknicken verhindert wird und keine Gleichgewichtsverzweigung auftritt, wie in Bild 7 an der durchgezogenen Kurve für die Verschiebung des Knotens 2 senkrecht zur Systemebene deutlich zu erkennen ist. Bei weiterer Laststeigerung könnte sich dann bei einem sehr viel größeren Lastniveau ein anderes Stabilitätsversagen einstellen, ein Fall, der jedoch wegen der großen Verformungen baustatisch nicht mehr relevant ist.

An diesem Beispiel wird anschaulich sofort klar, dass die Methode zur Abschätzung der statischen Größen mit Hilfe von Vergrößerungsfaktoren bei räumlichen Problemen zum Scheitern verurteilt ist. Allgemein ist zu beachten, dass Erfahrungen und Zusammenhänge, die für ebene Systeme gelten, nicht ohne weiteres auf räumliche Stabwerke übertragen werden dürfen.

Die mittels einer Th.II.O. erzielten Ergebnisse liegen teilweise auf der sicheren Seite (Stäbe 1 und 2), zum Teil aber weit auf der unsicheren Seite (Stäbe 3 bis 5). Das Tragverhalten des Systems wird auch von denjenigen

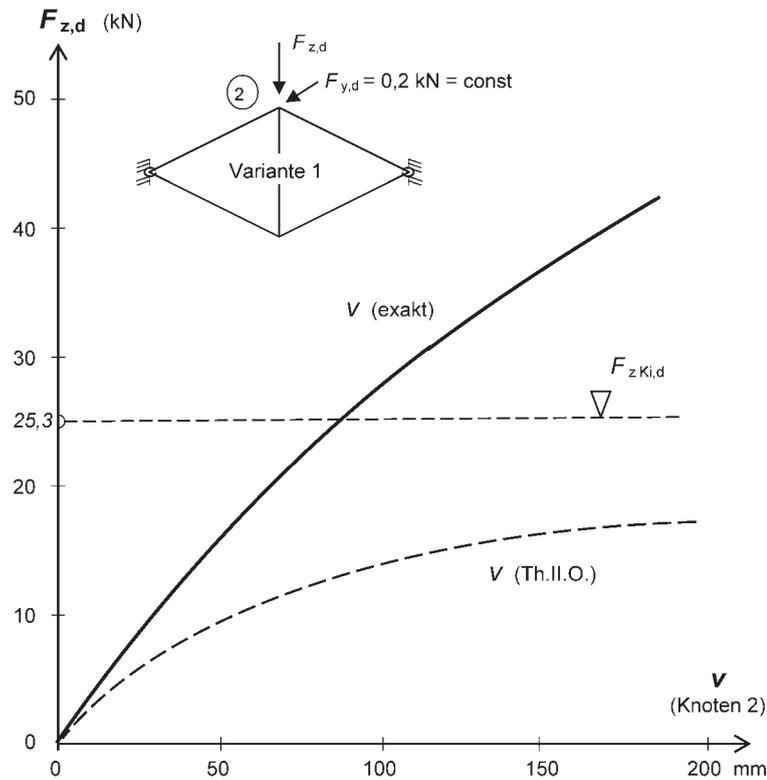


Bild 7. Verschiebung  $v$  des Knotens 2 nach exakter Berechnung und nach Th.II.O.  
Fig. 7. Displacement  $v$  of node 2 according to exact calculation and II. order theory

Programmen nicht zutreffend wiedergegeben, die die Torsions-Gleichgewichtsbedingungen im Sinne der Th.II.O.-M richtig erfassen.

### 5 Torsion: Hebelarme der Querkräfte; lokaler und globaler Bezug

Bei Th.II.O. wird das Gleichgewicht am verformten System gebildet. Hierbei wird innerhalb der verschiedenen Programme unterschiedlich verfahren. Die Programme P1 bis P6 berücksichtigen bei der Berechnung der Torsionsmomente auch die Zusatzmomente aus den Querkräften mit ihren „elastischen Torsionshebelarmen“, im Beispiel (Bild 8) also  $\Delta M_{x,E,z} = F_z v$  und  $\Delta M_{x,E,y} = -F_y w$ . Es

wird gezeigt, dass bei den übrigen Programmen nur die Zusatz-Biegemomente aus den Normkräften erfasst werden, die dann hinsichtlich des Torsionsmoments einen fiktiven Zusatzterm liefern.

Ferner soll überprüft werden, ob bei einem Stab, dessen (lokale verformte) Achsrichtung nicht mit der Richtung der globalen x-Achse übereinstimmt, das stabbezogene Torsionsmoment und das auf die globale x-Richtung bezogene Torsions-Einspannmoment richtig ermittelt werden.

Beide Effekte werden an einem Kragträger verdeutlicht, so dass die Berechnungen auch mittels einer Handrechnung nachvollziehbar sind.

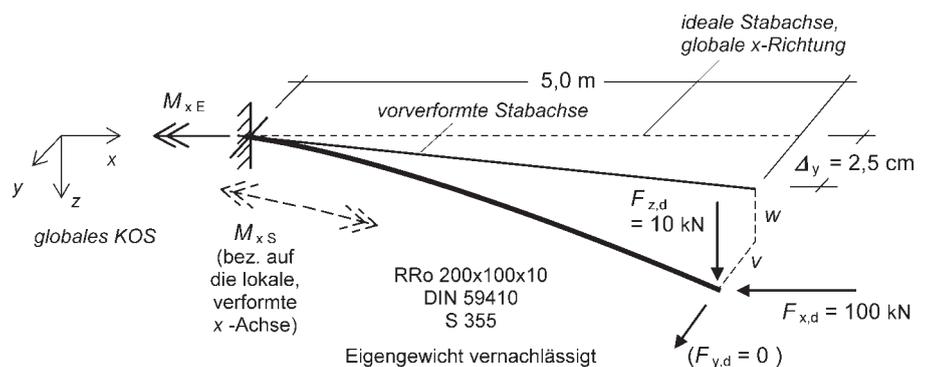


Bild 8. Überprüfung der Torsionsmomente an der Einspannung  
Fig. 8. Check of the torsional moment at the clamping

**5.1 Kragträger**

Die Spitze des in Bild 8 dargestellten Kragarms ist gegenüber dem globalen Koordinatensystem in y-Richtung um  $\Delta_y = \ell/200 = 2,5$  cm verschoben. Infolge der elastischen Verschiebungen v und w ergibt sich im Stab ein auf die lokale Achse bezogenes Torsionsmoment  $M_{xS}$  und ein auf die globale Achse bezogenes Torsions-Einspannmoment  $M_{xE}$ . Das System ist an der Einspannung zu 87 % ausgenutzt; die Verformungen liegen im Bemessungszustand in der Größenordnung von  $\ell/50$ . Die Biegeknicklast beträgt 164 kN.

**5.2 Diskussion der Ergebnisse (Tab. 7)**

**Exakte Ergebnisse**

Mit dem Programm S3D ergibt sich  $v = 3,20$  cm,  $w = 10,2$  cm,  $M_{xE} = 57,0$  kNcm,  $M_{xS} (x = 0) = 26,9$  kNcm.

Die Überprüfung des Momentengleichgewichts am verformten System um die globale x-Achse bestätigt das Ergebnis:

$$M_{xE} = F_z (v + \Delta_y) - F_y w = 10 (3,2 + 2,5) - 0 = 57,0 \text{ kNcm}$$

Die Programme P1 bis P6 liefern Werte, die nur unwesentlich von den exakten abweichen.

**Ergebnisse nach P7**

(entsprechend P8 bis P11)  
 $v = 3,51$  cm,  $w = 10,9$  cm,  
 $M_{xE} = 30,4$  kNcm,  $M_{xS} = 0$ .

Das Momentengleichgewicht um die globale x -Achse wird programmintern in folgender Form gebildet:

$$\begin{aligned} M_{xE} &= F_z \Delta_y + |N| \varphi_0 w \\ &= 10 \cdot 2,5 + 100 \cdot 10,9/200 \\ &= 25,0 + 5,4 = 30,4 \\ &\neq 57,0 \text{ kNcm} \\ &\quad (47\% \text{ Differenz}) \end{aligned}$$

Die Anteile  $F_z v$  und  $F_y w$  werden also vernachlässigt, obgleich sie genau der Vorgabe „Kraft mal elastischer Verschiebung“ der Th.II.O. entsprechen. Stattdessen wird ein Term  $|N| \varphi_0 w$  berücksichtigt, der durch den Bezug der Normalkraft auf die unverformte Stabachse zustande kommt, die hier den Winkel  $\varphi_0 = 1/200$  mit

Tabelle 7. Torsionsmomente an der Einspannung: globaler und lokaler Bezug  
 Table 7. End-restrained torsional moments: global and local reference

Einspannmoment (kNcm)	exakt	Th.III.O. ≈Th.II.O.-M (P2 ≈ P3 - P6)	Th.II.O.- S (P7 ≈ P8 - P11)
$M_{xE}$ (globaler Bezug)	<b>57,0</b>	60 (P1: 66)	30,4
$M_{xS}$ (lokaler Bezug)	<b>26,9</b>	30 (P1: 35)	0

der globalen x-Richtung bildet. Durch die anschließende Zerlegung der Normalkraft in Richtung der globalen Achsen ergibt sich dann eine fiktive Komponente  $N \varphi_0$ , die mit dem Hebelarm w einen Beitrag zum Einspann-Torsionsmoment  $M_{xE}$  leistet. Dieser Anteil ist jedoch ein Artefakt, da die Last  $F_x$  parallel zur globalen x-Richtung wirkt und somit keinen Beitrag zum Einspann-Torsionsmoment liefert.

Das stabbezogene Torsionsmoment, das nach der genauen Berechnung einen Wert von 26,9 kNcm hat, wird wegen der Vernachlässigung der Anteile  $F_z v$  und  $F_y w$  zu Null.

An diesem Beispiel wird deutlich, dass eine Näherungstheorie nicht nur ungenaue Ergebnisse liefert, sondern diese häufig auch schwieriger zu deuten sind als die Resultate einer exakten Theorie.

Trotz der Berücksichtigung der Torsionshebelarme in Th.II.O.-M weicht die Mehrzahl der zu dem Druckriegel (Bild 3) gehörenden Einzelergebnisse auch bei diesen Programmen deutlich (bis zu 56 %; s. Tab. 2, 3) von den exakten Resultaten ab. Hieraus ergibt sich die (eigentlich bekannte) Schlussfolgerung, dass es offensichtlich nicht ausreicht, das Grundprinzip der Th.II.O. vom ebenen auf den räumlichen Fall zu übertragen, indem beim Momentengleichgewicht am verformten System bei den Querlasten lediglich die Hebelarme v und w zusätzlich berücksichtigt werden. Vielmehr ist es erforderlich, die nichtlinearen Zusammenhänge bei der Geometrie der Verschiebungen genauer zu erfassen.

**6 Torsion: Einfluss der Normalkraft**

Wie bereits in Abschn. 2 kurz angesprochen, existiert im exakten Po-

tential der Term  $\dots i_M^2 \vartheta^2 \dots$  (Bild 2, Zeile 2), der die Verdrehung der Stabachse mit der Normalkraft koppelt. Hieraus ergeben sich zwei Effekte:

- Die Verdrehung der Stabachse infolge reiner Torsionsbeanspruchung wird durch eine zusätzliche Druckkraft vergrößert (s. Bild 9 und Tab. 8).
- Das Drillknicken wird durch diesen Term erfasst (s. Bild 10 und Tab. 9).

**6.1 Druckstab mit Torsion: Vergrößerung der Verdrehung der Stabachse**

Der in Bild 9 dargestellte Kragträger wird zunächst unter reiner Torsionsbeanspruchung, anschließend mit einer zusätzlichen Druckkraft berechnet (Tab. 8, Spalten 4 und 5, Zahlen in großem Druck). Zusätzlich werden die Auswirkungen des Wölbwiderstands des Querschnitts und einer vollständigen Wölbbehinderung an der Einspannung untersucht, Parameter, die nur von den Programmen S3D und P4 berücksichtigt werden (zugehörige Ergebnisse in Tab. 8 in kleinem Druck dargestellt).

Die Druckkraft vergrößert die Verdrehung um 37 %, während sie auch nach der in P2 verwendeten Th.III.O. (anders als in P3, P4) unverändert bleibt. Hierbei ist zu beachten, dass das System nach dem Verfahren E-E nur zu 30 % ausgenutzt ist, das Beispiel also im baupraktisch relevanten Bereich liegt.

**6.2 Drillknicken**

Bei doppelt-symmetrischen H-Profilen wird Drillknicken im Allgemeinen nur maßgebend, wenn die Stützweite  $s_{K\vartheta}$  für Drillknicken deutlich größer als die Knicklänge  $s_{Kz}$  für Biegeknicken ist (vgl. [10], Abschnitt 3.2.2,

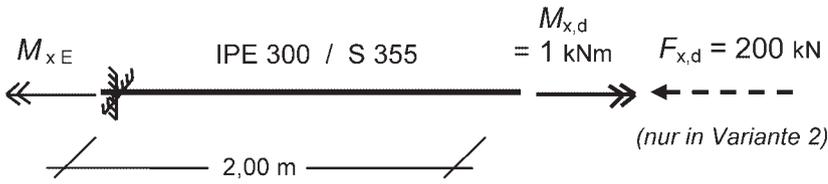


Bild 9. Einfluss der Normalkraft auf den Torsionsdrehwinkel  $\varphi_x$   
 Fig. 9. Effect of the normal force to the angle of torsion  $\varphi_x$

Tabelle 8. Einfluss der Normalkraft (und der Wölbbehinderung) auf den Torsionsdrehwinkel  $\varphi_x$   
 Table 8. Influence of the normal force (and the obstruction of warping) on the angle of torsion  $\varphi_x$

Torsionsdrehwinkel $\varphi_x$ (rad)	exakt			Th.III.O. (P3 ≈ P4)	Th.II.O. Th.III.O. (P1, P2, P5 - P11)
	$I_\omega = 125\,900\text{ cm}^6$ mit Wölbbeanspannung	ohne Wölbbeanspannung	$I_\omega = 0$ ohne Wölbbeanspannung		
$N_d = 0$	0,056	0,140	<b>0,140</b>	0,134	0,135
$N_d = -200\text{ kN}$	0,064	0,192	<b>0,192</b>	0,173	

(+ 37 % infolge N)

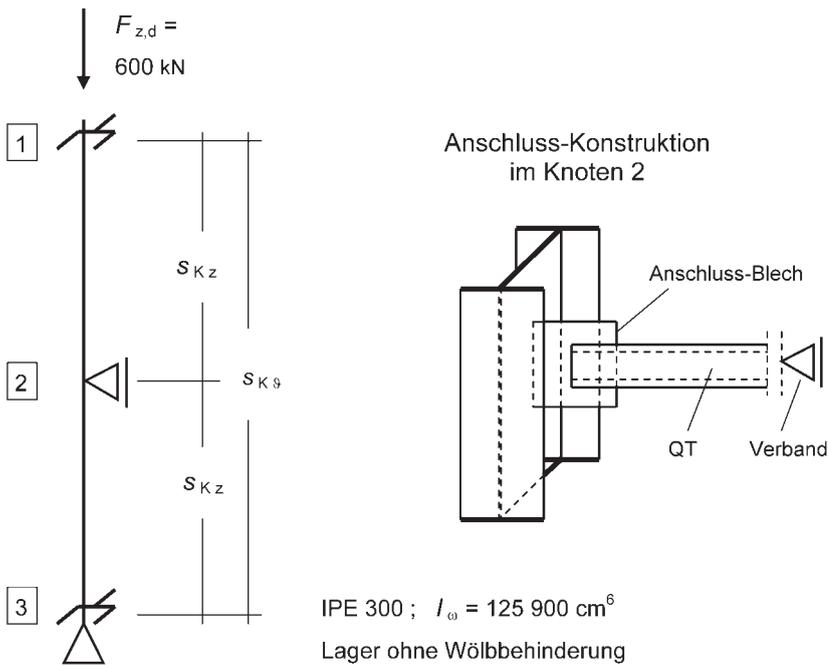


Bild 10. Stütze mit  $s_{K\vartheta} = 2 s_{Kz}$   
 Fig. 10. Column with  $s_{K\vartheta} = 2 s_{Kz}$

Tabelle 9. Drillknicken und Biegeknicken für  $s_{K\vartheta} = 2 s_{Kz}$   
 Table 9. Torsional buckling and flexural buckling according to  $s_{K\vartheta} = 2 s_{Kz}$

	$s_{K\vartheta} = 5,0\text{ m} / s_{Kz} = 2,5\text{ m}$			$s_{K\vartheta} = 6,0\text{ m} / s_{Kz} = 3,0\text{ m}$		
	Drillknicken (maßgebend)		Biegeknicken	Drillknicken		Biegeknicken (maßgebend)
	exakt	Th.II.O.	exakt = Th.II.O.	exakt	Th.II.O.	exakt = Th.II.O.
$F_{z,Ki,d}$	<b>1.459</b> kN	–	1.818 kN	1.285 kN	–	<b>1.264</b> kN
$\eta_{Ki,d}$	2,43	–	3,03	2,14	–	2,11

letzter Satz und Abschnitt 8.3) und wenn gleichzeitig der Schlankheitsgrad  $\lambda_z$  gering ist. Die im Folgenden betrachtete horizontal ausgesteifte zweigeschossige Konstruktion erfüllt für  $s_{Kz} < 3,0\text{ m}$  diese Voraussetzungen, da das Anschlussblech auf halber Höhe zwar das Biegeknicken bezüglich der schwachen Querschnittsachse, nicht aber das Drillknicken behindert (Bild 10). Die Stützlänge für das Drillknicken ist hier also doppelt so groß wie die für das Biegeknicken.

Das Biegeknicken wird (bei dem hier vorliegenden ebenen Fall) bereits mit Hilfe der Th.II.O.-M richtig erfasst (Tab. 9), während die Drillknicklast nur dann berechnet werden kann, wenn die geometrische Nichtlinearität in Form des oben angegebenen Terms im Potential berücksichtigt wird. Dies bedeutet, dass auch eine Th.III.O. nicht immer den Stabilitätsfall Drillknicken erfasst; es kommt vielmehr auf den Grad der Genauigkeit an, mit dem geometrisch nichtlineare Effekte implementiert wurden.

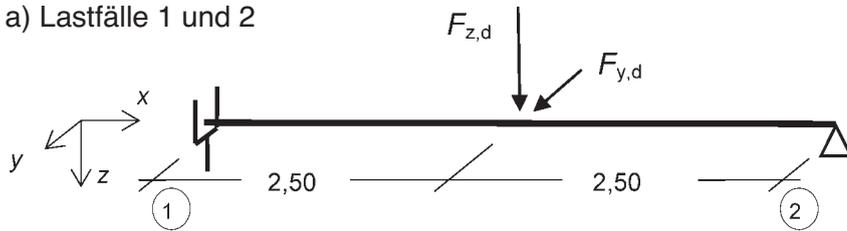
### 7 Torsion infolge zweiachsiger Biegung; Kippen

Wird ein Träger (auch ohne Einwirkung einer Normalkraft) durch zweiachsige Biegung beansprucht, so ergibt sich aus der genauen Stabtheorie zwangsläufig ein Torsionsmoment, auch wenn der Querschnitt doppelt-symmetrisch ist, die Belastung zentrisch eingeleitet wird und der Träger statisch bestimmt gelagert ist. Die Th.II.O.-S kann diesen Effekt nicht erfassen, wie das folgende Beispiel zeigt.

Infolge der Doppelbiegung (Bild 11a) entsteht eine Torsionsverformung, die zu einer Umlagerung der Schnittgrößen führt. Während das Biegemoment  $M_y$  gegenüber Th.I.O. und Th.II.O. etwas kleiner wird, vergrößern sich im Lastfall 1 das Biegemoment  $M_z$  um 14 %, die Verschiebung  $v$  um 11 % und die Spannung  $\sigma_x$  um 7 %. Die in P1 bis P4 verwendete Th.III.O. liefert hier praktisch die (für  $I_\omega = 0$ ) exakten Ergebnisse (Tab. 10).

Im Lastfall 2 werden bei einer Steigerung von  $F_{z,d}$  auf 53 kN 96 % der idealen Biegedrillknicklast (Sonderfall „Kippen“)  $F_{z,Ki,d}$  (Kippen) = 55,2 kN erreicht. Bei gleichzeitiger Wirkung von  $F_{y,d} = 0,2\text{ kN}$  liegen die statischen Größen noch im bausta-

a) Lastfälle 1 und 2



IPE 300,  $I_{\omega} = 0$ , Lager ohne Wölbbehinderung

Eigengewicht vernachlässigt

b) Lastfall 3

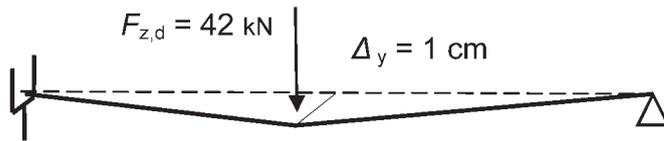


Bild 11. Statisch bestimmt gelagerter Balken mit Doppelbiegung  
Fig. 11. Statically determined beam with biaxial bending

Tabelle 10. Torsion infolge zweiachsiger Biegung  
Table 10. Torsion due to biaxial bending

max   ...   (rad, mm, kNm, N/mm <sup>2</sup> )	LF 1: $F_{z,d} = 20 \text{ kN}$ , $F_{y,d} = 4 \text{ kN}$			LF 2: $F_{z,d} = 53 \text{ kN}$ , $F_{y,d} = 0,2 \text{ kN}$			
	exakt (mit $I_{\omega} = 0$ )	Th.III.O. (P2 ≈ P1, P3, P4) Th.II.O.-M (P6)	Th.II.O.-S (P7)	exakt (mit $I_{\omega} = 0$ )	Th.III.O. (P2)	Fehler (P2)	Th.II.O.-S (P7 ≈ P8 - P11)
$\varphi_x$	<b>0,0321</b> (1,8°)	0,0318	0	<b>0,026</b> (1,5°)	0,024	- 8 %	0
$v$	<b>10,1</b>	10,1	9,0	<b>2,8</b>	2,6	- 7 %	0,5
$w$	<b>3,5</b>	3,5	3,3	<b>8,7</b>	8,7	0	8,6
$M_x$	<b>0,189</b>	0,188	0	<b>0,146</b>	0,137	- 6 %	0
$M_y$	<b>24,9</b>	24,9	25,0	<b>66,2</b>	66,2	0	66,3
$M_z$	<b>5,7</b>	5,7	5,0	<b>1,73</b>	1,64	- 5 %	0,25
$\sigma_x$	<b>115</b>	115	107	<b>140</b>	139	≈ 0	122

Tabelle 11. Ergebnisse für Lastfall 3  
Table 11. Results according to loading case 3

max   ...   (rad, mm, kNm, N/mm <sup>2</sup> )	LF 3: $F_{z,d} = 42 \text{ kN}$ , $F_{y,d} = 0$ , $\Delta_y = 1 \text{ cm}$			
	exakt (mit $I_{\omega} = 0$ )	Th.III.O. (P2)	Fehler (P2)	Th.II.O.-S (P7)
$\varphi_x$	<b>0,175</b> (10°)	0,153	- 13 %	0,071
$v$	<b>13,2</b>	11,1	- 16 %	0
$w$	<b>10,5</b>	9,8	0	7,6
$M_x$	<b>0,97</b>	0,89	- 7 %	0,42
$M_y$	<b>51,8</b>	52,0	≈ 0	52,5
$M_z$	<b>8,71</b>	7,43	- 15 %	0
$\sigma_x$	<b>201</b>	186	7 %	94

tisch relevanten Bereich: Die Spannungen sind deutlich kleiner als die Fließgrenze, die resultierende Verschiebung  $res(v, w)/\ell = \ell/547$  und die Verdrehung der Stabachse  $\varphi_x = 1,5^\circ$  sind gering. Die in P2 verwendete Th.III.O. liefert auch hier gute Ergebnisse mit nur moderaten Abweichungen. Allerdings konvergiert P2 für eine weitere Laststeigerung nicht mehr (Bild 12).

Die dem Programm S3D zugrunde liegende exakte Theorie ermöglicht auch Lösungen oberhalb der kritischen Last und bei großen Verformungen; allein der verwendete Lösungsalgorithmus für das nichtlineare Gleichungssystem begrenzt den Anwendungsbereich. Wird z. B. die senkrechte Last  $F_{z,d}$  über die ideale Biegedrillknicklast hinaus gesteigert, so ergeben sich für  $F_{z,d} = 56,1 \text{ kN}$  (das entspricht 102 % der ideellen Kipplast) mit einer resultierenden Verschiebung von  $res(v, w)/\ell = \ell/303$  und einer Spannung  $\sigma_x = 225 \text{ N/mm}^2$  immer noch baustatisch relevante Werte; allerdings ist die Verdrehung  $\varphi_x$  der Stabachse mit  $7,4^\circ$  bereits recht groß (Bild 12).

Nach [1], El 202 ist bei der Untersuchung des Biegedrillknickens (hier: Sonderfall „Kippen“) eine Vorkrümmung mit dem Stich  $v_0/2$  anzusetzen (IPE 300: Linie b,  $v_0/2 = 1/2 \cdot 500/250 = 1 \text{ cm}$ ). Da die Eingabe von Vorkrümmungen nicht in allen Programmen unterstützt wird, wurde für Lastfall 3 (Bild 11b) je Stabhälfte eine geradlinige Vorverformung mit einem Stich von  $\Delta_y = 1 \text{ cm}$  in Feldmitte angesetzt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 11 zusammengestellt.

Die in P2 implementierte Th.III.O. liefert um bis zu 16 % zu kleine Werte. Bei einer weiteren Laststeigerung werden die Ergebnisse dieser Theorie unbrauchbar, was aber bei Torsionsdrehwinkeln von über  $10^\circ$  für den baustatischen Bereich nicht mehr von Belang ist. Nach Th.II.O.-S wird das Biegemoment  $M_z$  zu Null; die Fehler von  $M_x$  und  $\varphi_x$  sind größer als 50 %.

Literatur

[1] DIN 18800, Teil 2: Stahlbauten. Stabilitätsfälle, Knicken von Stäben und Stabwerken (November 1990).  
[2] Gensichen, V.: Zur praktischen Anwendung von DIN 18800 (11.90), Teil 1 und Teil 2. Bauingenieur 72 (1997), S. 393-403.

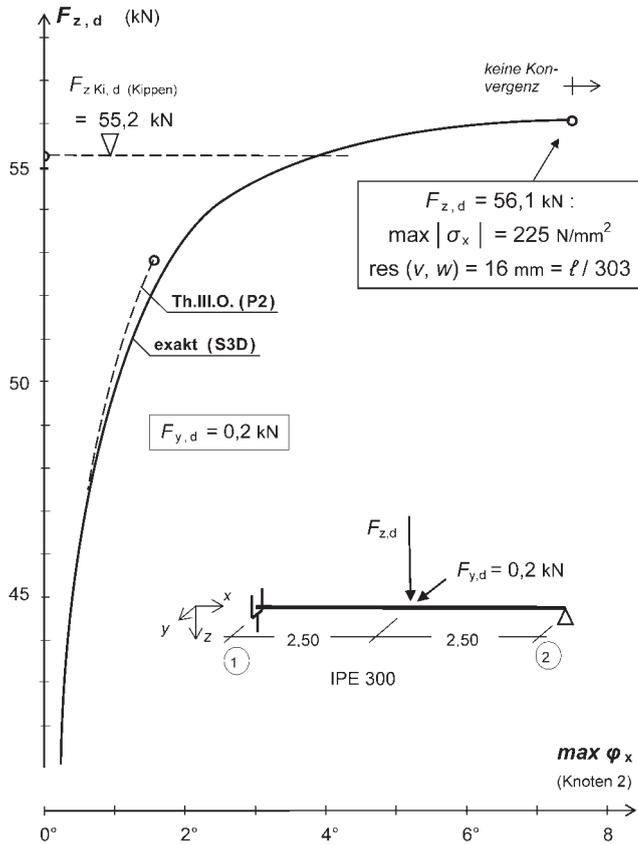


Bild 12. Torsionsdrehwinkel  $\varphi_x$  nach exakter Berechnung und nach Th.III.O.  
 Fig. 12. Angle of torsion  $\varphi_x$  according to exact calculation and III. order theory

- [3] Lumpe, G.: Zur Stabilität und Biege-Torsion großer Verformungen von räumlichen Stabwerken. Bauingenieur 80 (2005), S. 169–177.  
 [4] Stern, J.: Der Gelenkstab mit Vor-

verformung. Ing.-Arch. 54 (1984), S. 152–160.

- [5] Salzgeber, G.: Nichtlineare Berechnung von räumlichen Stabtragwerken aus Stahl. Heft 10, Inst. f. Stahlbau,

Holzbau und Flächentragwerke, Technische Universität Graz 2000.

- [6] Rubin, H.: Das Drehwinkelverfahren zur Berechnung biegesteifer Stabwerke nach Elastizitäts- oder Fließgelenktheorie I. und II. Ordnung unter Berücksichtigung von Vorverformungen. Bauingenieur 55 (1980), S. 81–92.  
 [7] Rothert, H., Gensichen, V.: Nichtlineare Stabstatik. Baustatische Methoden, Grundlagen und Anwendungen. Berlin: Springer 1987.  
 [8] Drees, Chr.: EDV-Modellierung des Tragsicherheitsnachweises eines weitgespannten zweifeldrigen Fachwerk-Hallenbinders unter Berücksichtigung der Schub- und Biegesteifigkeit der Dachscheibe. Diplomarbeit, FH Münster 2006.  
 [9] Klävers, S.: Statische Berechnung einer weitgespannten Freiluft-Lagerhalle aus Stahl. Diplomarbeit, FH Münster 2006.  
 [10] Lindner, J., Scheer, J., Schmidt, H. (Hrsg.): Stahlbauten: Erläuterungen zu DIN 18800 Teil 1 bis Teil 4. 3. Aufl. Berlin: Ernst & Sohn 1998.  
 [11] Germanischer Lloyd: Tätigkeitsbericht 2003, S. 22–24.

**Autoren dieses Beitrages:**

Prof. Dr.-Ing. Volker Gensichen, Lehrgebiet Statik und Stahlbau, Fachhochschule Münster, Corrensstraße 25, 48016 Münster, Prof. Dr.-Ing. Günter Lumpe, Lehrgebiet Stahlbau, Hochschule Biberach, Karlstraße 11, 88400 Biberach