G1 Wofür stehen $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{P}$?

Zusammenfassung

In diesem Artikel wird gezeigt, dass das als „makroskopische Maxwellgleichungen“ oder „Maxwell’sche Gleichungen für Materie“ bekannte Gleichungssystem ein Spezialfall der Maxwell’schen Gleichungen „ohne Materie“ ist. Anhand der Herleitung wird klar, dass die normalerweise mit $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{P}$ bezeichneten Größen selbst keine Felder, sondern Feldanteile sind. Der Unterschied zwischen Feld und Feldanteil ist für ein Verständnis dieser Größen wesentlich.

Zwei Kräfte – zwei Kraftfelder

Die Gleichungen für die Lorentz-Kraft $\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ und die Coulomb-Kraft $\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E}$ spielen in der Elektrodynamik eine ähnlich zentrale Rolle wie die Maxwell’schen Gleichungen. Denn andere die Ladung Q beeinflussende Kräfte sind nicht bekannt. Ohne diese beiden gäbe es keinen Stromfluss, und alle elektrischen Maschinen ständen still. Egal unter welchen Namen wir sie kennen, für einen geladenen Körper sind $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ daher schlicht Kraftfelder, nämlich das elektrische Kraftfeld $\boldsymbol{E}$ und das magnetische Kraftfeld $\boldsymbol{B}$.

Die herausgehobene Rolle der beiden Kräfte spiegelt sich in der Bedeutung der Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ wider: Die Quantenelektrodynamik kennt keine anderen Felder und der relativistische elektromagnetische Feldtensor enthält neben $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ auch keine weiteren Felder. Wie kann es dann aber sein, dass in der Elektrotechnik die Größen $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{P}$ eine genauso wichtige Rolle spielen? Haben Quantenelektrodynamik und Relativitätstheorie keinen Bezug zur technischen Wirklichkeit? Oder ist alles außer $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ das Resultat von Missverständnissen? Im Folgenden wird gezeigt, dass die Größen $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{P}$ selbst keine Felder sind, sondern für Anteile an den Feldern $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ stehen. Auf diese Weise können die scheinbaren Widersprüche zwischen der klassischen Elektrotechnik und den Ergebnissen der Grundlagenforschung aufgelöst werden.

Die Maxwell’schen Gleichungen

Die Maxwell’schen Gleichungen können für die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ mithilfe der Ladungsdichte ρ und der Stromdichte $\boldsymbol{J}$ als

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \rho && \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ &\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} && \nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}\right) = \boldsymbol{J} + \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0 \boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{1}$$

formuliert werden. Ein hervorstechendes Merkmal dieser vier Gleichungen ist die Linearität. Ladungen, Stromdichten, Felder und die sie verknüpfenden Differenzialgleichungen können daher ohne Verlust an Korrektheit addiert und subtrahiert werden. Dies ist der Schlüssel zur Bestimmung derjenigen Gleichungen, welche den Einfluss der Materie auf elektromagnetische Felder beschreiben.

Alle uns umgebenden Materialien bestehen aus geladenen Teilchen, den Elektronen und Atomkernen. Dabei bilden diejenigen Stoffe das Rückgrat der Elektrotechnik, in denen ein Teil der Ladungsträger „frei“ beweglich ist, also Strecken jenseits eines Atomdurchmessers zurücklegen kann. Die verbleibenden Ladungsträger sind gebunden. Innerhalb eines solchen Materials ist die Gesamtheit von Ladungen und Strömen durch

$$\rho = \rho_{\text{frei}} + \rho_{\text{geb.}} \qquad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_{\text{frei}} + \boldsymbol{J}_{\text{geb.}} \tag{2}$$

gegeben. In der gleichen Weise, also so:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\text{frei}} + \boldsymbol{E}_{\text{geb.}} \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_{\text{frei}} + \boldsymbol{B}_{\text{geb.}} \tag{3}$$

werden dann die Feldanteile addiert. Für beide Teilladungen und Ströme gelten die zu ihnen gehörenden Maxwell’schen Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_{\text{frei}} = \rho_{\text{frei}} && \nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{B}_{\text{frei}}}{\mu_0}\right) = \boldsymbol{J}_{\text{frei}} + \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_{\text{frei}} \\ &\nabla \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_{\text{geb.}} = \rho_{\text{geb.}} && \nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{B}_{\text{geb.}}}{\mu_0}\right) = \boldsymbol{J}_{\text{geb.}} + \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_{\text{geb.}} \end{aligned} \tag{4}$$

Und nun das Dilemma: Weder Gl. (1) noch Gl. (4) sind im technischen Alltag zu gebrauchen. Denn die Felder wirken immer in ihrer Gesamtheit: Weder eine Hallsonde noch der Rotor in einem Elektromotor unterscheiden zwischen verschiedenen Anteilen des Magnetfeldes. Andererseits misst ein Stromzähler immer nur die von den freien Ladungsträgern getragenen freien Ströme, also einen Anteil der Gesamtladungen und -ströme. Gesucht wird also ein System von Gleichungen, welches die Gesamtfelder in Beziehung zu den freien Teilladungen und Teilströmen bringt. Dieses System erhält man durch Einsetzen von Gl. (3) in Gl. (4). Das Ergebnis,

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \varepsilon_0 (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_{\text{geb.}}) = \rho_{\text{frei}} && \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ &\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} && \nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}_{\text{geb.}}}{\mu_0}\right) = \boldsymbol{J}_{\text{frei}} + \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_{\text{frei}} \end{aligned} \tag{5}$$

ist meist in der folgenden Form bekannt

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_{\text{frei}} && \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ &\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} && \nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}\right) = \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_{\text{frei}} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D} \end{aligned} \tag{6}$$

und wird oft als „Maxwell’sche Gleichungen für Felder in Materie“ oder auch „makroskopische Gleichungen“ bezeichnet. Diese Gleichungen sind also nicht Kern der Theorie, sondern eine Anwendung der Maxwell’schen Gleichungen (1) auf den

Feldgröße	$\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{D}$	$\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{P}$
Bedeutung	$\boldsymbol{B}_{\text{frei}}/\mu_0$	$\varepsilon_0\,\boldsymbol{E}_{\text{frei}}$	$\boldsymbol{B}_{\text{geb.}}/\mu_0$	$-\varepsilon_0\,\boldsymbol{E}_{\text{geb.}}$
Ursache	freie Ströme	freie Ladungen	geb. Ströme	geb. Ladungen

Tabelle 1: Bedeutung der traditionellen Feldgrößen

Spezialfall, dass zwischen freien und gebundenen Ladungen und Strömen unterschieden wird. Der Vollständigkeit halber sei noch darauf hingewiesen, dass sich aus den Gleichungen (3) und (4) auch noch zwei Gleichungen für die gebundenen Ladungen und Ströme gewinnen kann. Es gibt also in Wahrheit sechs „Gleichungen mit Materie“.

Der Vergleich von (5) und (6) ergibt die in *Tabelle 1* gezeigte Bedeutung der Feldgrößen $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{P}$. Sie alle sind selbst keine Felder, sondern ununterscheidbare Anteile an den beiden Feldern $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$. Berechnet man zum Beispiel die Größe $\mu_0\boldsymbol{H}$ an einem Punkt, so gibt das Ergebnis an, welchen Beitrag die freien Ströme an dieser Stelle zum Magnetfeld leisten.

Feld oder Feldanteil: ein wesentlicher Unterschied

Warum der Unterschied zwischen Feld und Feldanteil tatsächlich bedeutsam ist, kann ein Beispiel aus der Hydrodynamik erhellen. Bei diesem geht es ebenfalls um das Zusammenkommen ununterscheidbarer Anteile aus unterscheidbaren Quellen: Bei Hannoversch Münden vereinigen sich die beiden Flüsse Werra und Fulda zur Weser. Nimmt man einen Liter Wasser aus der Werra so enthält dieser ein Kilogramm Werrawasser. Entnimmt man ihn aber der Weser, so enthält dieser nur ein halbes Kilogramm Werrawasser, denn etwa die Hälfte der Wassermoleküle kommt aus der Fulda. Nun würde deshalb niemand auf die Idee kommen, dass ab Hannoversch Münden das Werrawasser sein spezifisches Gewicht halbiert. Denn die Halbierung der Werrawassermoleküle pro Liter hat als Ursache ausschließlich das Zusammenfließen der beiden Flüsse. Nein, Wasser ist Wasser, egal aus welcher Quelle.

Genauso verhält es sich in der Elektrodynamik: Ein Magnetfeld ist ein Magnetfeld, egal ob von freien oder gebundenen Strömen erzeugt. Der Satz „Das $\boldsymbol{H}$-Feld hat Pole“ beruht auf dem gleichen Missverständnis wie die Aussage „unterhalb von 122 m über dem Meeresspiegel halbiert Werrawasser seine Dichte.“

Prof. Martin Poppe, D. Phil. oxon
Fachhochschule Münster
Fachbereich Elektrotechnik und Informatik