Wahrscheinlichkeit

- Einführung / Beispiele / Anwendungen
- Gesetz oder kein Gesetz?
- Elementare Begriffe
- Der endliche Wahrscheinlichkeitsraum
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten / Bayes Satz
- Baumdiagramme
- Philosophische Aspekte

Einführung / Beispiele

„25% aller Verkehrsunfälle passieren unter dem Einfluss von Alkohol. Daher ist Fahren ohne Alkohol dreimal so gefährlich wie mit.“
(anonym)

Einführung / Beispiele

„Entscheidend ist doch nicht, wie unwahrschein-lich ein Kraftwerksunfall ist, sondern, was dann passiert.“
(Ein ehemaliger Bundesumweltminister)

Einführung / Beispiele

„Die Wahrscheinlichkeit, dass Wesen wie wir aus unbelebter Materie entstehen konnten, ist so groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass aus einem Tornado, der über einen Schrottplatz fegt, eine Boing 747 herauskommt.“

(Ein Kreationist)

Einführung / Anwendungen

Wirtschaftlichkeitsbetrachtungen: Lohnt sich Lotto spielen („Sondersteuer für Menschen die nicht rechnen können“)? Warum gewinnt bei Roulette immer die Bank? Wie groß darf der Kostenaufwand für die Qualitätssicherung sein?

Einführung / Anwendungen

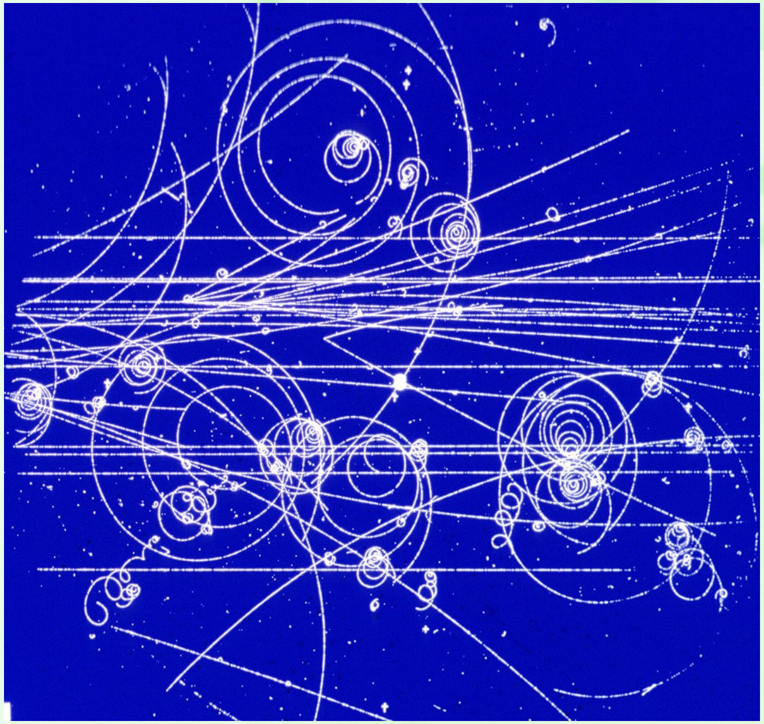
Sicherheitstechnik: Ist ein Flugzeug mit vier Triebwerken sicherer als eines mit zwei Triebwerken? Ist es auch zuverlässiger? Wie viele Bordcomputer braucht ein Airbus?

Einführung / Anwendungen

Gesundheitsvorsorge: Wenn man positiv auf eine Krankheit getestet wird, wie wahrscheinlich ist es, dass man sie wirklich hat (kann unter 1% liegen...)?

Gesetzmäßigkeit des Zufalls

Scheinbar ein Widerspruch, denn *ein zufälliges Ereignis ist ein nicht vorhersagbares Ereignis* Von Zufall spricht man, wenn das, was kommt nicht vorhergesagt werden kann.



Die *Wahrscheinlichkeitstheorie* analysiert die Gesetzmäßigkeiten von Zufallsexperimenten.

Die *Stochastik* beschreibt zufällige Ereignisse und deren Modellierung.

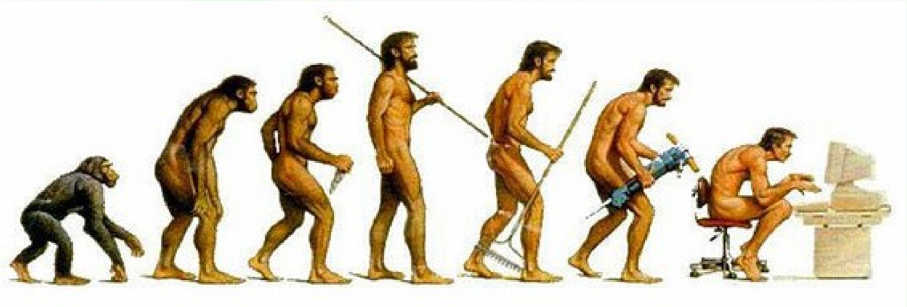
Gesetzlosigkeit des Zufalls

Was bekannten Gesetzen folgt, ist nie neu.

→Neues braucht die Überwindung bzw. Abwesenheit eines Gesetzes.

→Jede Innovation bedarf -mathematisch gesehen- des Zufalls.

•Jede noch so geniale Konstruktion lässt sich in einer unendlich langen Kette von Zufalls-ereignissen wiederfinden.



Elementare Begriffe

Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit (Huygens, Bernulli,Laplace): „Die Wahrscheinlichkeit eines günstigen Ereignisses ist die Anzahl der günstigen Ereignisse dividiert durch alle Ereignisse". Bei dieser Definition wird vorausgesetzt, dass die A-priori Wahrscheinlichkeiten bekannt sind und das die Ergebnismenge endlich ist.

Beispiel. 2001 wurden 2 Menschen in Deutschland Opfer eines Blitzes. Also ist die Wahrscheinlichkeit an einem Blitz zu sterben etwa

$$P(Blitz) = 80\,Jahre \cdot \frac{2\,Opfer}{Jahr} / 80 \cdot 10^6\,Einwohner$$

Elementare Begriffe

Statistische Definition der Wahrscheinlichkeit (Richard von Mises):
Ein Zufallsexperiment wird oft wiederholt. Dann werden die relativen Häufigkeiten der jeweiligen Elementarereignisse berechnet. Im Grenzfall unendlich vieler Wiederholungen wird aus der relativen Häufigkeit die Wahrscheinlichkeit. Voraussetzung ist die beliebige Wiederholbarkeit des Zufallsexperiments und die Unabhängigkeit der Durchgänge.

Beispiel: Ich habe zehn mal Lotto gepielt und nie gewonnen. Also ist die Gewinnwahrscheinlichkeit kleiner 1/10.

Elementare Begriffe

Zufallsversuch mit endlich vielen Ausfällen, dessen Ausfälle alle gleich wahrscheinlich sind. heißt auch **Laplace-Versuch**

Die Größe, welche sich hier ändern kann ist die Augenzahl der oben liegenden Würfelfläche. Man nennt sie die **Zufallsgröße** (engl. ***„random variable“***). Die Zufallsgröße ist eine Funktion, die dem Ergebnis eines Zufallsexperiments einen Wert (dieser heißt auch **Ergebnis** oder **Realisation**) zuordnet.

Elementare Begriffe

Die Menge aller Resultate (1,2,3,4,5,6) heißt **Ergebnismenge: *(Ω)*** .
Hier ist $|\Omega| = 6$.

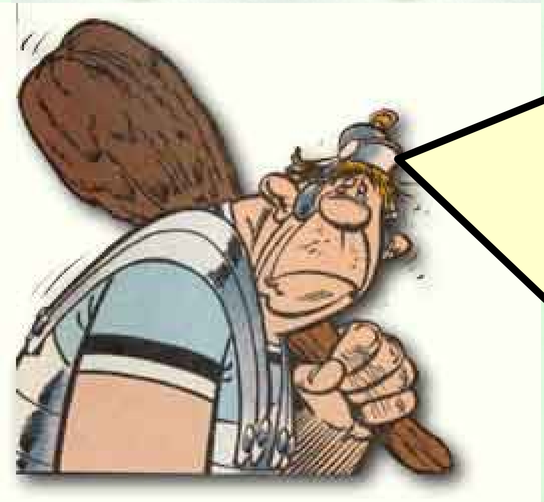
Das Eintreten eines bestimmten Ergebnisses eines Zufallsvorgangs nennt man **Ereignis**.

Elementare Begriffe

Erst einmal ein Würfel:

Laplace Versuch = …
Zufallsgröße =...
Ereignis =...
Ergebnismenge =...
Betrag der Ergebnismenge =...

Elementare Begriffe



Und jetzt 2 Würfel:

Laplace Versuch = Doppelwurf
Zufallsgröße = Wertpaare
Elementarereignis = 1 Wertepaar
$\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots (6,5), (6,6)\}$
$|\Omega| = 36$

Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Summe aller Augen < 4“ =...?

Endlicher Wahrscheinlichkeitsraum

Es sei Ω = *1,2,3,..N* eine nicht leere Menge und *P(*Ω*)* deren Potenzmenge, also die Menge aller Teilmengen. Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (oder auch ein Wahrscheinlichkeitsmaß) auf Ω ist eine Abbildung $P(\Omega) \Rightarrow [0,1]$ mit folgenden Eigenschaften:

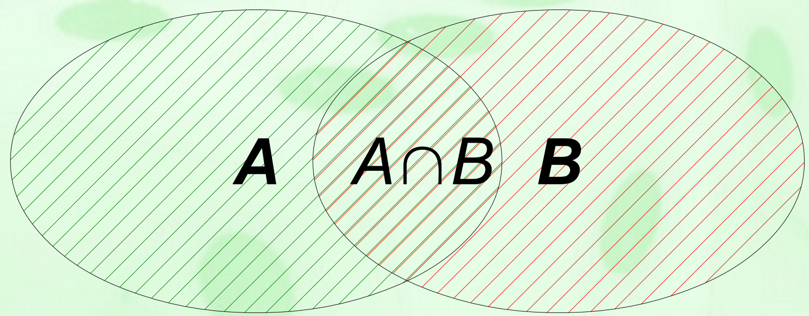
1. $P(\Omega)=1$
   und $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ für $P(A \cap B) = \emptyset$
2. Teilmengen A*(*Ω*)* heißen Ereignisse, *P(A)* heißt Wahrscheinlichkeit von *A*.
3. Eine Menge ω mit $\omega \in \Omega$ heißt Elementarereignis
4. Das Paar *(*Ω*,P)* heißt endlicher Wahrscheinlich-keitsraum
5. Wir nennen *P(*Ω*)* das sichere Ereignis und $P(\emptyset)$ das unmögliche Ereignis

Endlicher Wahrscheinlichkeitsraum

Bdeutung der Mengenoperationen:

$A \cap B$ gleichzeitiges Auftreten von A und B

$A \cup B$ Auftreten mindestens eines der Ereignisse A und B



$A \cap B = \emptyset$ Ereignisse A und B treten nie gleichzeitig auf, sie heißen **disjunkt**.

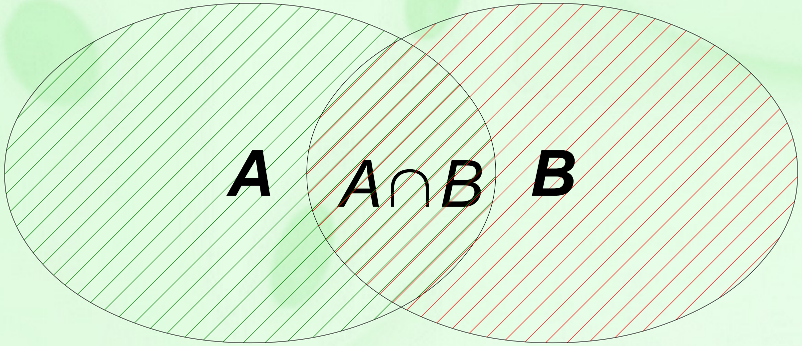
Endlicher Wahrscheinlichkeitsraum

Rechenregeln

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Bedingte Wahrscheinlichkeiten

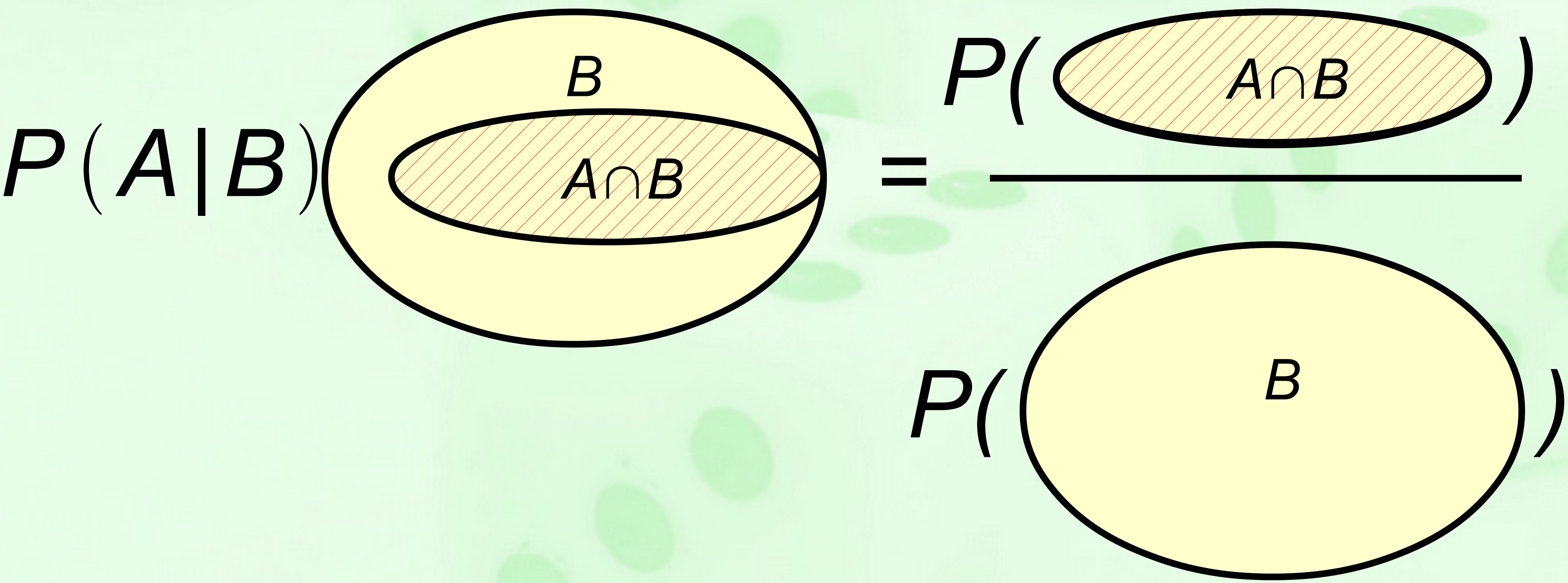
Ziel: Antworten auf Fragen wie „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Tri-Athlet Raucher ist“ ...

$P(A|B)$ heißt „Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt, wenn B schon eingetreten ist“

Oder

„Wahrscheinlichkeit der Eigenschaft A unter der Voraussetzung der Eigenschaft B“

Bedingte Wahrscheinlichkeiten



Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Beispiel aus der Medizin

	krank	gesund	Zeilensumme
untergewichtig	400	50	450
normalgewichtig	100	450	550
Spaltensumme	500	500	

Der Anteil der Kranken an der Gesamtmenge ist
$|K| / |\Omega|$ *500 / 1000 = 0,5*

der Anteil der Kranken bei den Untergewichtigen ist
$|K \& U| / |U|$ *400 /450 = 0,89*

der Anteil der Kranken bei den Normalgewichtigen ist
$|K \& N| / |N|$ *100 /550 = 0,18*

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit

	krank	gesund	Zeilensumme
untergewichtig	400	50	450
normalgewichtig	100	450	550
Spaltensumme	500	500	

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Untergewichtiger krank ist:

$$P(K|U)=P(K\cap U)/P(U)$$

„Wahrscheinlichkeit von K unter der Voraussetzung U“

Beispiel für eine „Bedingte Wahrscheinlichkeit“

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse heißen **unabhängig**, wenn gilt

$|A \cap B|/|B| = |A|/|\Omega|$ also auch $P(A|B) = P(A)$

und deshalb $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Der allgemeine, auch abhängige Fall dagegen lautet

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

oder $$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Satz von Bayes

Umrechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten
Der Satz von Bayes regelt das Vertauschen von bedingter Wahrscheinlichkeit und ihrer Voraussetzung:

$$P(A|B) = P(B|A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}$$

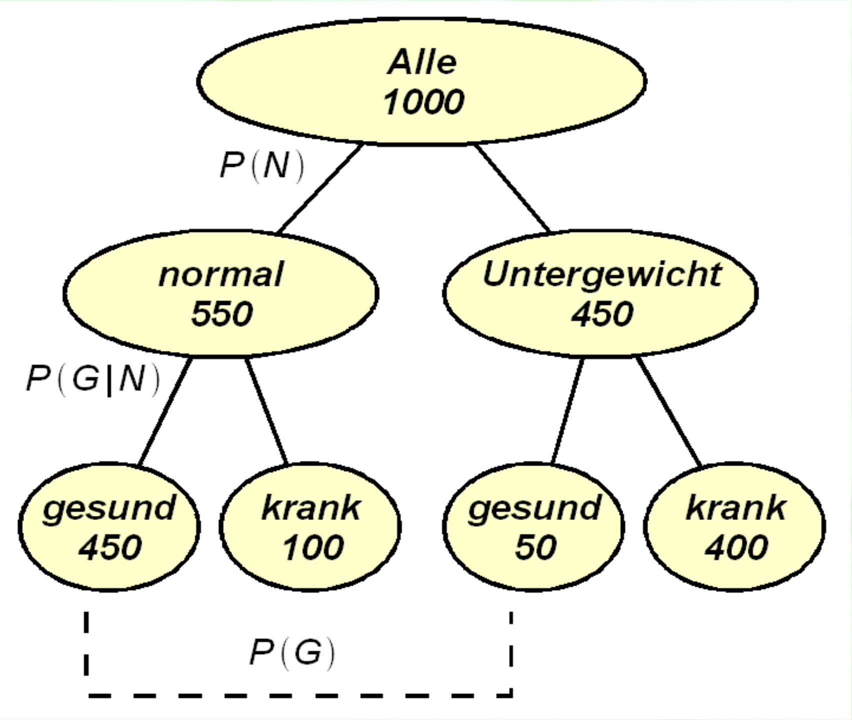
Oder allgemein mit $\Omega = A_1 \cup A_2 ... \cup A_n$

und $A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$

gilt

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{j=n} P(B|A_j) \cdot P(A_j)}$$

Baumdiagramme (1)



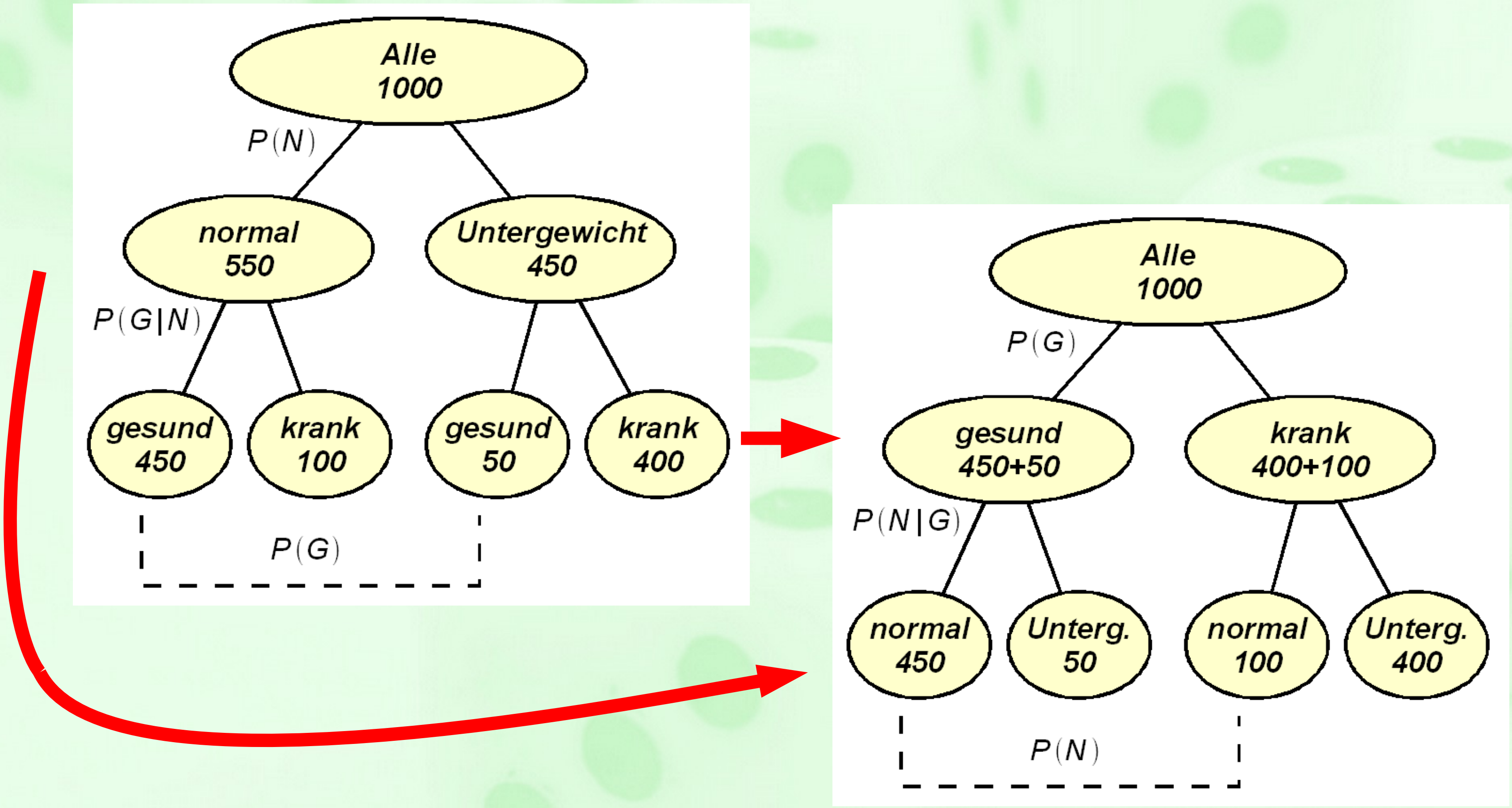
$$P(N)=550/1000=55\,\%$$

$$P(G)=\frac{(450+50)}{1000}=50\,\%$$

$$P(N|G)=\frac{P(G|N)\cdot P(N)}{P(G)}=\frac{82\,\%\cdot 55\,\%}{50\,\%}=90\,\%$$ (Bayes)

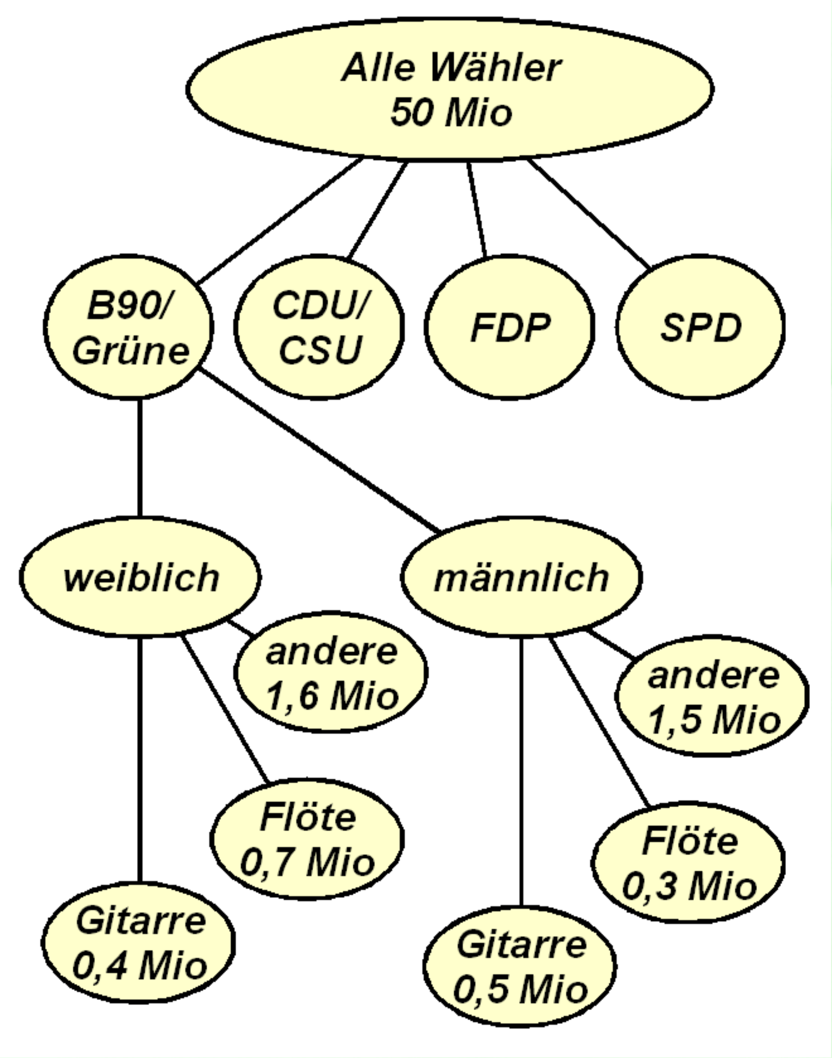
$$P(N|G)=\frac{P(G\cap N)}{P(G)}=\frac{450}{450+50}=90\,\%$$ (direkt aus dem Bild)

Baumdiagramme (2)



Unterste Ebene bekannt, alles bekannt!

Baumdiagramme (3)



„Wahrscheinlichkeit, dass ein Wähler der Grünen Flöte spielt“

$$P(F|B90) = ... = 20\,\%$$

„Wahrscheinlichkeit, dass ein grün wählender Gitarrenspieler weiblich ist“

$$P(w|G) = ... = 44\,\%$$

Praktisch universell einsetzbare Lösungsmethode!

Philosophische Aspekte

Zufallsprozesse begrenzen die Vorhersagbarkeit für alle Systeme, in denen sie eine Rolle spielen.

- Alle chemischen Prozesse,
- Alles Leben,
- Gehirnstrukturen,

Die Entwicklung der Natur und das Verhalten des Menschen können nicht vollständig vorherbestimmt sein.