Formelsammlung für die Lehrveranstaltung Statistik

zugelassen für die Klausuren zur Statistik in den Studiengängen der Technischen Betriebswirtschaft

Version vom 13.09.2012

Inhalt

Häufigkeiten

Kommt ein statistisches Merkmal in k verschiedenen Merkmalsausprägungen $x_1, x_2, ..., x_k$

vor, für die bei insgesamt N Beobachtungen

absolute Häufigkeiten

$h_1, h_2, ..., h_k$ *mit* $\sum_{i=1}^{k} h_i = N$

beobachtet werden, so ergeben sich daraus entsprechende

relative Häufigkeiten

$f_1, f_2, ..., f_k$ *mit* $\sum_{i=1}^{k} f_i = 1$

und

$f_i = \frac{h_i}{N}$ *(i = 1,...,k)*

Die **absolute Häufigkeit** h_i einer Merkmalsausprägung x_i ist die *Anzahl* der statistischen Einheiten, die diese Merkmalsausprägung x_i aufweisen. N ist die Summe aller absoluten Häufigkeiten, die Grundgesamtheit Es entsteht eine Häufigkeitsverteilung mit $\sum_{i=1}^{k} h_i = N$

Die **relative Häufigkeit** $f_i = \frac{h_i}{N}$ einer Merkmalsausprägung x_i ist der Quotient aus der absoluten Häufigkeit h_i dieser Merkmalsausprägung x_i und der Summe aller Beobachtungen.

Durch die Multiplikation mit „100" werden relative Häufigkeiten in Prozent ausgedrückt.

Die **absolute Summenhäufigkeit** $H_i = \sum_{x_j \le x_i} h_j$ eines Merkmals ist die Summe über alle absoluten Häufigkeiten bis zu einschließlich dem bestimmten Messwert x_i.

Die **relativen Summenhäufigkeiten** $F_i = \frac{H_i}{N}$ bilden den *Anteil* der absoluten Summenhäufigkeiten an der Grundgesamtheit. Die über alle Werte aufaddierte (= kumulierte) Summe ist stets 1. Dies entspricht 100 % der Werte.

Jede **Klasse** i ist eindeutig definiert durch die untere Klassengrenze x_i^u und die Klassenobergrenze x_i^o. Die **Klassenbreite** Δx_i ergibt sich aus der Differenz von Klassenobergrenze x_i^o und Klassenuntergrenze x_i^u zu $\Delta x_i = x_i^o - x_i^u$.

Arithmetisches Mittel

Das **arithmetische Mittel** berechnet sich aus der Summe aller Messwerte, einer statistischen Grundgesamtheit N, geteilt durch deren Anzahl.

Bei N ***Einzelwerten*** $a_{1,} a_{2,} \ldots, a_N$
ist das arithmetische Mittel definiert als

$$\mu = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{a}_{\mathrm{i}} .$$

Bei einer ***Häufigkeitsverteilung*** *mit* k *verschiedenen Werten*
$x_{1,} x_{2,} \ldots, x_k$
ergibt sich das (gewogene) arithmetische Mittel zu

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} x_i h_i \quad \textit{bzw.} \quad \mu = \sum_{i=1}^{k} x_i f_i .$$

Bei einer ***Häufigkeitsverteilung klassifizierter Daten*** *ergibt sich mit Hilfe der Klassenmitten*
$x_i{}' x_i' \ldots, x_k'$
näherungsweise

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} x_i' h_i \quad \textit{bzw.} \quad \mu = \sum_{i=1}^{k} x_i' f_i .$$

Median

Der **Median** Me ist derjenige Wert, der eine der Größe nach geordnete Reihe halbiert und die Messergebnisse in die oberen und unteren 50 Prozent aufteilt.
Für eine *ungerade* Anzahl von Elementen ist dies der mittlere Wert der geordneten Liste.
Für eine *gerade* Anzahl von Elementen ist der Median das arithmetische Mittel der beiden in der Mitte stehenden Zahlen.

*Zunächst werden die **Einzelwerte*** $a_{1,} a_2, \ldots a_N$
so umgeordnet, dass gilt $a_{[1]} \leq a_{[2]} \leq \ldots \leq a_{[N]}$.
Dann ist bei ungeradem N

$$Me = a_{\left[\frac{N+1}{2}\right]}$$

und bei geradem N

$$Me = \frac{1}{2}\left(a_{\left[\frac{N}{2}\right]} + a_{\left[\frac{N}{2}+1\right]} \right)$$

*Bei einer **Häufigkeitsverteilung** kann für großes* N *als Median der größte Merkmalswert* $a_{[k]}$ *verwendet werden, für den* $F(a_{[k]}) \leq 0{,}5$ *gilt, wobei* $F\left(a_{[k]}\right)$ *der Wert der Summenhäufigkeitsfunktion für* $a_{[k]}$ *ist.*
Analog ist das 1. Quartil Q_1 *der größte Merkmalswert* $a_{[j]}$ *für den* $F(a_{[j]}) \leq 0{,}25$
Und das 3. Quartil Q_3 *der größte Merkmalswert* $a_{[l]}$, *für den* $F(a_{[l]}) \leq 0{,}75$ *gilt.*

*Bei **klassifizierten Daten** ergibt sich der feinberechnete Median aus der Klassenuntergrenze* x_i^u *und der Klassenobergrenze* x_i^o *derjenigen Klasse* i, *in der die Summenhäufigkeitsfunktion den Wert* $0{,}5$ *erreicht:*

$$Me = x_i^u + \frac{0{,}5 - F\left(x_i^u\right)}{F\left(x_i^o\right) - F\left(x_i^u\right)}\left(x_i^o - x_i^u\right)$$

Modus

Der **Modus** ist als die häufigste Merkmalsausprägung definiert.

*Bei **klassifizierten Daten** wird als Modus die Klassenmitte der Klasse mit der größten Säulenhöhe im Histogramm gewählt.*

Varianz

*Bei **Einzelwerten** ist die Varianz definiert als*

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(a_i - \mu)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i^2 - \mu^2 \; .$$

*Bei **Häufigkeitsverteilungen** erhält man die Varianz zu*

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \mu)^2 h_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 h_i - \mu^2$$

$$= \qquad = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 h_i - \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} x_i h_i}{N}\right)^2$$

bzw.

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \mu)^2 f_i = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 f_i - \mu^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^2 f_i - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i f_i\right)^2$$

*Bei einer **Häufigkeitsverteilung klassifizierter Daten** ergibt sich die Varianz näherungsweise zu*

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(x_i' - \mu)^2 h_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i'^2 h_i - \mu^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{k}(x_i' - \mu)^2 f_i = \sum_{i=1}^{k} x_i'^2 f_i - \mu^2 \; .$$

*Die **Standardabweichung** σ ergibt sich jeweils als*

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \; .$$

Stichprobenvarianz

$$s^2 \quad = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2\right]$$

$$= \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]$$

$N-1$ bzw. dort $n-1$ wird als Freiheitsgrad der Varianz der Stichprobe bezeichnet.

Variationskoeffizient

Der **Variationskoeffizient** bezieht als Quotient die Standardabweichung auf das arithmetische Mittel.

Variationskoeffizient *VC*

$$VC = \frac{\sigma}{\mu} \text{ bzw. } VC = \frac{\sigma}{\mu} 100\%$$

Spannweite

Die **Spannweite** ergibt sich unkompliziert als Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Merkmalswert und kann schon bei ordinal skalierten Daten Verwendung finden

Spannweite *R*

Die Einzelwerte $a_{1,} a_{2,} ..., a_N$ *werden der Größe nach angeordnet, so dass gilt*

$a_{[1]} \le a_{[2]} \le ... \le a_{[N]}$.

Dann ist $R = a_{[N]} - a_{[1]}$

Korrelationskoeffizient nach Fechner

*Der **Korrelationskoeffizient nach Fechner** berechnet sich als:*

$$r_F = \frac{n^+ - n^-}{n^+ + n^-}. \text{ Dies bedeutet } \frac{\ddot{U} - \mathrm{N}}{\ddot{U} + \mathrm{N}}$$

wobei n^+ *bzw.* $\ddot{U}$ *= Anzahl der in den Vorzeichen übereinstimmenden Paare* $(x - \bar{x}), (y - \bar{y})$

und n^- *oder auch* N *= Anzahl der in den Vorzeichen nicht übereinstimmenden Paare* $(x - \bar{x}), (y - \bar{y})$.

Fälle, in denen eine der Differenzen den Wert 0 *ergibt, werden jeweils zur Hälfte den Übereinstimmungen und den Nichtübereinstimmungen zugeordnet. Sein Wertebereich liegt zwischen* $-1 \le r_F \le 1$.

Kovarianz

Die **Kovarianz** ist eine Kennzahl für die gemeinsame Streuung von X und Y und ist wie folgt definiert.

$$Cov(x,y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}$$

Linearer Einfachkorrelationskoeffizient
(nach Bravais-Pearson)

Linearer Einfachkorrelationskoeffizient*, direkte Berechnung aus den Werten* x_i *und* y_i

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\Big/ n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \Big/ n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 \Big/ n}}$$

Dabei ist:

$$r = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sqrt{\operatorname{var}(x)}\sqrt{\operatorname{var}(y)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})/n}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} \qquad -1 \le r \le 1$$

$\operatorname{cov}(x,y) =$ Kovarianz zwischen X und Y

$\operatorname{var}(x) =$ Varianz von X

$\operatorname{var}(y) =$ Varianz von Y

$\bar{x} =$ arithmetisches Mittel von X

$\bar{y} =$ arithmetisches Mittel von Y

$n =$ Anzahl von (y_i, x_i);Anzahl der statistischen Einheiten

Lineare Regression

Es bedeuten im Folgenden:

x_i *i-ter beobachteter Wert der unabhängigen Variablen* $(i = 1,\dots,n)$

y_i *i-ter beobachteter Wert der abhängigen Variablen* $(i = 1,\dots,n)$

$\hat{y}_i$ *i-ter geschätzter Wert der abhängigen Variablen* $(i = 1,\dots,n)$

$e_i = y_i - \hat{y}_i$
Abweichung der geschätzten vom beobachteten Wert der abhängigen Variablen (Residuum) $(i = 1,\dots,n)$

Bestimmung der linearen Einfachregressionsfunktion nach der Methode der kleinsten Quadrate

Stichprobenregressionskoeffizienten

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$b_2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Stichprobenregressionsfunktion

$\hat{y}_i = b_1 + b_2 x_i$
$(i = 1,\dots,n)$ *bzw.*

$\hat{y} = b_1 + b_2 x$

Eigenschaften der Regressionsfunktion

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i$$

Zerlegung der Abweichungsquadratsumme

$$SQT = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2$$

$$SQR = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - b_1\sum_{i=1}^{n} y_i - b_2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$SQE = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i - \overline{y}_i\right)^2$$

$$SQT = SQR + SQE$$

Streuungsursache SQ *= Summe der Abweichungsquadrate*

SQE *Quadratsumme der erklärten Abweichungen oder (durch die Regression) erklärte Abweichungsquadratsumme*

SQT *Quadratsumme der zu erklärenden Abweichungen oder zu erklärende Gesamtabweichungsquadratsumme*

SQR *Quadratsumme der nichterklärten Abweichungen (Quadratsumme der Residuen) oder nichterklärte Abweichungsquadratsumme*

Lineares einfaches Bestimmtheitsmaß

$$r^2 = \frac{SQE}{SQT} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} =$$

$$1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{SQR}{SQT}$$

$$0 \le r^2 \le 1$$

Linearer Einfachkorrelationskoeffizient

$$r = \operatorname{sgn}(b_2)\sqrt{r^2} \qquad -1 \le r \le 1$$

Indizes

Symbole für Preise und Mengen

$p_0^{(j)}$: *Preis des Gutes j zur Basiszeit*

$p_1^{(j)}$: *Preis des Gutes j zur Berichtszeit*

$q_0^{(j)}$: *Menge des Gutes j zur Basiszeit*

$q_1^{(j)}$: *Menge des Gutes j zur Berichtszeit*

Preisindex nach Laspeyres

$$_L P_{01} \frac{\sum_{j=1}^{n} p_1^{(i)} q_0^{(j)}}{\sum_{j=1}^{n} p_0^{(j)} q_0^{(j)}} 100\% = \frac{\sum p_1 \cdot q_0}{\sum p_0 \cdot q_0} 100\%$$

Preisindex nach Paasche

$$_p P_{01} \frac{\sum_{j=1}^{n} p_1^{(i)} q_1^{(j)}}{\sum_{j=1}^{n} p_0^{(j)} q_1^{(j)}} 100\% = \frac{\sum p_1 \cdot q_1}{\sum p_0 \cdot q_1} 100\%$$

Klassische Wahrscheinlichkeitsdefinition

$$Wahrscheinlichkeit(günstiges\ Ergebnis) = \frac{Anzahl\ günstige\ Ergebnisse}{Anzahl\ mögliche\ Ergebnisse}$$

$$W = \frac{g}{m}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Ein Vorgang habe die Ereignisse E_1 und E_2.
Mit

$$W(E_2 \mid E_1)$$

*wird die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass E_2 eintritt, wenn man weiß, dass E_1 schon eingetreten ist. Dies nennt man auch die **bedingte Wahrscheinlichkeit** für E_2, falls (unter der Bedingung von) E_1.*

Wir betrachten nun einen Vorgang, bei dem sich unterschiedliche Ergebnisse einstellen können, von denen wir wieder E_1 und E_2 betrachten.

*Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich E_1 **und** E_2 einstellen, gegeben durch die Wahrscheinlichkeit, dass sich E_1 einstellt, **multipliziert** mit der Wahrscheinlichkeit für E_2, falls E_1 schon eingetreten ist. Also*

$$W(E_1 \cdot E_2) = W(E_1) \cdot W(E_2 \mid E_1)$$

Durch Umformung ergibt sich:

$$\frac{W(E_1 \cdot E_2)}{W(E_1)} = W(E_2 \mid E_1)$$

Multiplikationssatz

*Sind die Ereignisse E_1 und E_2 **unabhängig voneinander**, dann gilt*

$$W(E_1 \cdot E_2) = W(E_1) \cdot W(E_2)$$

Additionssatz

*Können sich bei einem Vorgang die Ergebnisse E_1 und E_2 einstellen, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das eine **oder** das andere Ergebnis einstellt (oder beide), gegeben durch*

$$W(E_1\ ODER\ E_2) = W(E_1 + E_2) = W(E_1) + W(E_2) - W(E_1 \cdot E_2)$$

Schließen sich die Ereignisse E_1 und E_2 gegenseitig aus, gilt

$$W(E_1 + E_2) = W(E_1) + W(E_2)$$

Bei einem Vorgang gebe es, unter anderem, ein Ereignis A. Dieses Ereignis A hängt von n anderen Ereignissen E_1, E_2,… E_n des Vorgangs ab. Dabei müssen diese E_j sich gegenseitig ausschließen und alle E_j zusammen alle möglichen Ergebnisse umfassen. Das heißt also

$$\textit{für alle } E_j, E_k \textit{ mit } j \neq k \textit{ und } W(E_j \cdot E_k) = 0 \textit{ und } \sum_{j=1}^{n} W(E_j) = 1$$

Dann gilt für W(A)

$$W(A) = W(E_1) \cdot W(A \mid E_1) + W(E_2) \cdot W(A \mid E_2) + \ldots W(E_n) \cdot W(A \mid E_n)$$

also

$$W(A) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} W(E_i) \cdot W(A \mid E_i)$$

*Dies ist die sogenannte Formel für die **totale Wahrscheinlichkeit**.*

Damit ist

$$W(A \cdot E_k) =$$
$$W(A) \cdot W(E_k \mid A) = W(E_k) \cdot W(A \mid E_k)$$

Also

$$W(E_k \mid A) = \frac{W(E_k) \cdot W(A \mid E_k)}{\sum\nolimits_{i=1}^{n} W(E_i) \cdot W(A \mid E_i)}$$

*Dies ist die **Bayes'sche Formel**.*

Die Anzahl Möglichkeiten, x aus n Elementen auszuwählen, wenn die Reihenfolge wichtig ist, ist gegeben durch V(n,x),die Anzahl Variationen von x aus n Elementen und ist bestimmt durch

$$V(n,x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-x+1)$$

$$V(n,x) = \frac{n!}{(n-x)!}$$

Die Anzahl dieser Permutationen P(n) ist dann gegeben durch

$$P(n) = V(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! \quad \textit{also} \quad P(n) = n!$$

Die Anzahl Möglichkeiten, x aus n Elementen auszuwählen, wenn die Reihenfolge nicht wichtig ist, ist gegeben durch C(n,x), die Anzahl Kombinationen von x aus n Elementen, und wird bestimmt durch

$$C(n,x) = \frac{V(n,x)}{x!} = \frac{n!}{x! \cdot (n-x)!}$$

Binomialkoeffizient

Er gibt an, auf wie viele verschiedene Arten man x Objekte aus einer Menge von n verschiedenen Objekten auswählen kann (ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge).

$$\binom{n}{x} = V(n,x)$$

Binomialverteilung

*Wird ein Vorgang, bei dem ein Ereignis E mit Wahrscheinlichkeit p auftritt, n-mal wiederholt, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei E genau x-mal auftritt, gegeben durch die **Binomialverteilung.***

$$W_{binom}(n,x,p) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

dabei sind

$$\mu = n \cdot p$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Hypergeometrische Verteilung

In einer Urne befinden sich N Elemente, von denen M Elemente die Eigenschaft E haben. Es wird eine Stichprobe von n Elementen aus der Urne zufällig ausgewählt. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in der Stichprobe genau x die Eigenschaft E haben, gegeben durch

$$W_{hyp}(N,M,n,x) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

*Dies ist die **hypergeometrische Verteilung**.*

dabei ist

$$\mu = n \cdot \frac{M}{N}$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}}$$

Poisson-Verteilung

Bei einem Vorgang, bei dem sich eine mittlere Anzahl μ von Ereignissen bezogen auf eine bestimmte Fläche, Zeit oder andere Größe ergibt, kann die Wahrscheinlichkeit, dass sich genau x Ereignisse ergeben, berechnet werden durch

$$W_{poisson}(\mu, x) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu}$$

*Dies ist die **Poisson-Verteilung**.*

dabei ist

$$\sigma = \sqrt{\mu}$$

Normalverteilung/Gaußverteilung

Sind Mittelwert μ und Standardabweichung σ gegeben, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, einen Wert im Intervall [x, x+Δx] zu finden[1]

$$Wahrscheinlichkeit = w_{gauß}(\mu, \sigma, x) \cdot \Delta x$$

mit

$$w_{gauß}(\mu, \sigma, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Integrale Gaußverteilung:

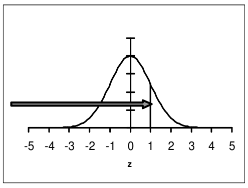
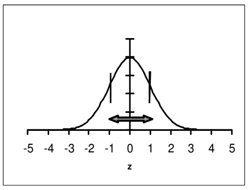
$$W_{gauß}(\mu,\sigma,x\in[x_0,x_1]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$

$$x\rightarrow z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$W_{gauß}(\mu,\sigma,x\in[x_0,x_1])=W_{gauß}(\mu,\sigma,z\in[z_0,z_1])=\int_{z_0}^{z_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

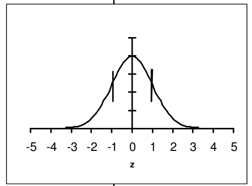
mit

$$z_0=\frac{x_0-\mu}{\sigma}\quad und\quad z_1=\frac{x_1-\mu}{\sigma}$$

z	$\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$	$\int_{-z}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$
		
-4.0	0.00003	
-3.5	0.00023	
-3.0	0.00135	
-2.5	0.00621	
-2.0	0.02275	
-1.5	0.06681	
-1.0	0.15866	
-0.5	0.30854	
0.0	0.50000	0.00000
0.5	0.69146	0.38292
1.0	0.84134	0.68269
1.5	0.93319	0.86639
2.0	0.97725	0.95450
2.5	0.99379	0.98758
3.0	0.99865	0.99730
3.5	0.99977	0.99953
4.0	0.99997	0.99994

z	$\int_{-z}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$	$1-\int_{-z}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$
1.0	68,3 %	31,7 %
2.0	95,4 %	4,6 %
3.0	99,7 %	0,3 %

symmetrische Integrale Gaußverteilung:



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.00000	0.00798	0.01596	0.02393	0.03191	0.03988	0.04784	0.05581	0.06376	0.07171
0.10	0.07966	0.08759	0.09552	0.10343	0.11134	0.11924	0.12712	0.13499	0.14285	0.15069
0.20	0.15852	0.16633	0.17413	0.18191	0.18967	0.19741	0.20514	0.21284	0.22052	0.22818
0.30	0.23582	0.24344	0.25103	0.25860	0.26614	0.27366	0.28115	0.28862	0.29605	0.30346
0.40	0.31084	0.31819	0.32551	0.33280	0.34006	0.34729	0.35448	0.36164	0.36877	0.37587
0.50	0.38292	0.38995	0.39694	0.40389	0.41080	0.41768	0.42452	0.43132	0.43809	0.44481
0.60	0.45149	0.45814	0.46474	0.47131	0.47783	0.48431	0.49075	0.49714	0.50350	0.50981
0.70	0.51607	0.52230	0.52848	0.53461	0.54070	0.54675	0.55275	0.55870	0.56461	0.57047
0.80	0.57629	0.58206	0.58778	0.59346	0.59909	0.60467	0.61021	0.61570	0.62114	0.62653
0.90	0.63188	0.63718	0.64243	0.64763	0.65278	0.65789	0.66294	0.66795	0.67291	0.67783
1.00	0.68269	0.68750	0.69227	0.69699	0.70166	0.70628	0.71086	0.71538	0.71986	0.72429
1.10	0.72867	0.73300	0.73729	0.74152	0.74571	0.74986	0.75395	0.75800	0.76200	0.76595
1.20	0.76986	0.77372	0.77754	0.78130	0.78502	0.78870	0.79233	0.79592	0.79945	0.80295
1.30	0.80640	0.80980	0.81316	0.81648	0.81975	0.82298	0.82617	0.82931	0.83241	0.83547
1.40	0.83849	0.84146	0.84439	0.84728	0.85013	0.85294	0.85571	0.85844	0.86113	0.86378
1.50	0.86639	0.86896	0.87149	0.87398	0.87644	0.87886	0.88124	0.88358	0.88589	0.88817
1.60	0.89040	0.89260	0.89477	0.89690	0.89899	0.90106	0.90309	0.90508	0.90704	0.90897
1.70	0.91087	0.91273	0.91457	0.91637	0.91814	0.91988	0.92159	0.92327	0.92492	0.92655
1.80	0.92814	0.92970	0.93124	0.93275	0.93423	0.93569	0.93711	0.93852	0.93989	0.94124
1.90	0.94257	0.94387	0.94514	0.94639	0.94762	0.94882	0.95000	0.95116	0.95230	0.95341
2.00	0.95450	0.95557	0.95662	0.95764	0.95865	0.95964	0.96060	0.96155	0.96247	0.96338
2.10	0.96427	0.96514	0.96599	0.96683	0.96765	0.96844	0.96923	0.96999	0.97074	0.97148
2.20	0.97219	0.97289	0.97358	0.97425	0.97491	0.97555	0.97618	0.97679	0.97739	0.97798
2.30	0.97855	0.97911	0.97966	0.98019	0.98072	0.98123	0.98173	0.98221	0.98269	0.98315
2.40	0.98360	0.98405	0.98448	0.98490	0.98531	0.98571	0.98611	0.98649	0.98686	0.98723
2.50	0.98758	0.98793	0.98826	0.98859	0.98891	0.98923	0.98953	0.98983	0.99012	0.99040
2.60	0.99068	0.99095	0.99121	0.99146	0.99171	0.99195	0.99219	0.99241	0.99264	0.99285
2.70	0.99307	0.99327	0.99347	0.99367	0.99386	0.99404	0.99422	0.99439	0.99456	0.99473
2.80	0.99489	0.99505	0.99520	0.99535	0.99549	0.99563	0.99576	0.99590	0.99602	0.99615
2.90	0.99627	0.99639	0.99650	0.99661	0.99672	0.99682	0.99692	0.99702	0.99712	0.99721
3.00	0.99730	0.99739	0.99747	0.99755	0.99763	0.99771	0.99779	0.99786	0.99793	0.99800