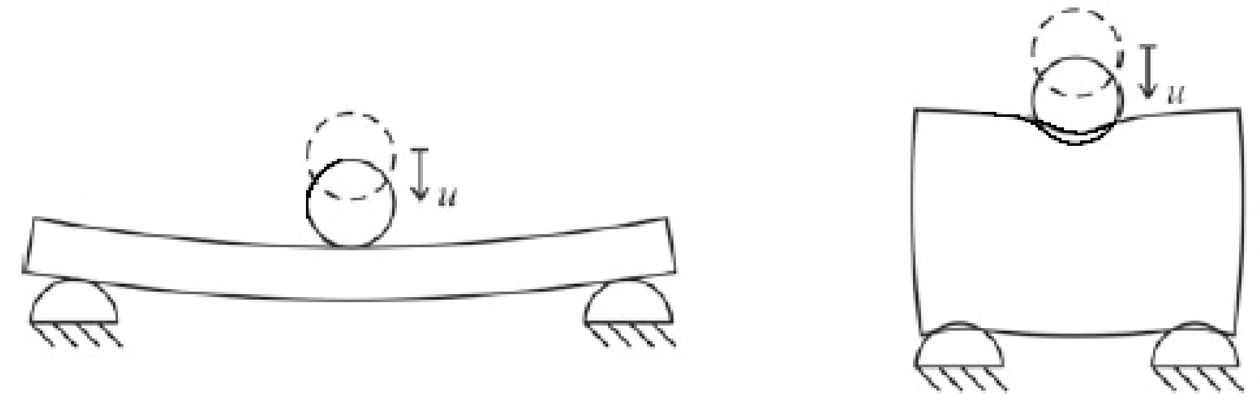
Vergleich von Penalty-Methode und Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren für biege- und dehnungsdominierte Probleme

Felix Rathmann

Labor für Computersimulation (Stefan Averkamp und Eckhard Finke)

Problemstellung des Projekts

Das Ziel. In der Finiten-Element-Methode gibt es mehrere Verfahren zum Umgang mit Kontakten. Zwei bedeutende Verfahren sind dabei die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren und die Penaltymethode. Der Autor Lutz Nasdala beschreibt in seinem Buch "FEM-Formelsammlung Statik und Dynamik" Anwendungsfelder bzw. in welchen Fällen welche Methode genutzt werden sollte. Da diese Aussagen nicht durch Beispiele oder ähnliches belegt werden, sollen diese Aussagen in einer Projektarbeit untersucht werden. Bei diesen Anwendungsfeldern handelt es sich um biegedominierte- und dehnungsdominierte Systeme (vgl. Abbildung).



Biegedominiertes Problem   Dehnungsdominiertes Problem

Lagrange Methode

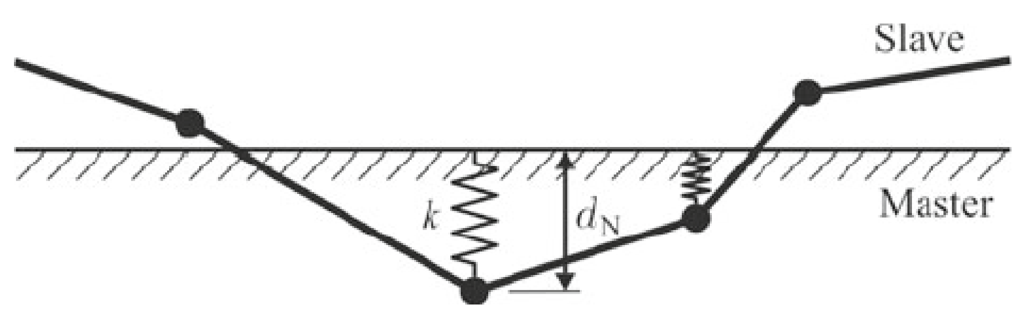
Genaue Erfüllung. Die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren, auch Lagrange Methode genannt, ist ein Verfahren aus der nichtlinearen Optimierung und wird für Minimierungsprobleme mit Nebenbedingungen eingesetzt. Die Nebenbedingungen werden über einen Faktor, den Lagrange'schen Multiplikator λ, in das zu lösende System eingebaut. Der Multiplikator stellt eine zusätzliche Unbekannte dar, die berechnet werden muss.

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ \hline k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline k_{n1} & k_{n2} & \cdots & \mathbf{0} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} u_1 \\ \hline u_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \lambda \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ \hline F_2 \\ \hline \vdots \\ \hline -d_0 \end{array}\right]$$

Der wesentliche Vorteil der Lagrange Methode besteht darin, dass die Kontaktbedingung $d_n = 0$ exakt erfüllt wird. Dies bedeutet, dass im Gegensatz zur Penalty-Methode keine Durchdringungen der Kontaktpartner auftreten. Außerdem können die Kontaktkräfte F_k direkt aus dem Lagrange'schen Multiplikator λ bestimmt werden.

Penalty-Methode

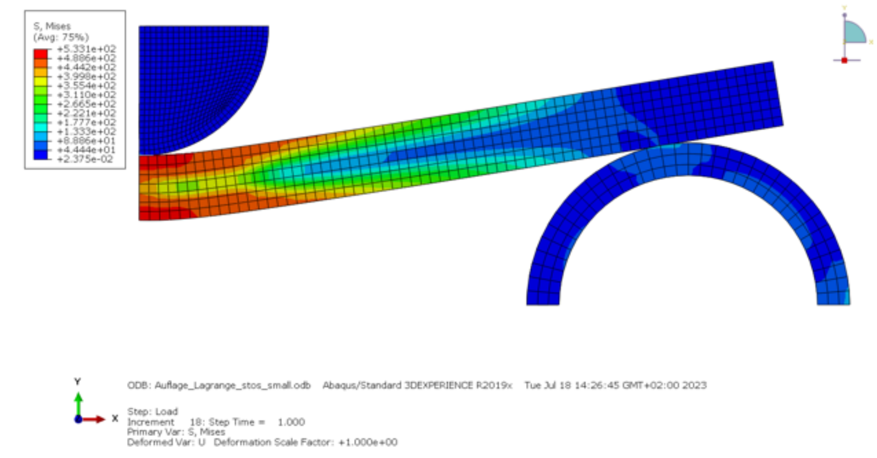
Näherungsweise Erfüllung. Im Gegensatz zur Lagrange'schen Methode wird die Bedingung $d_n = 0$ bei der Penalty-Methode nur näherungsweise erfüllt. Für jeden Kontaktpunkt wird eine geringe Durchdringung d_N gewährt. An der Stelle der Durchdringung wird ein Federelement eingefügt, welches durch seine Federsteifigkeit der Durchdringung entgegenwirkt. In der folgenden Abbildung ist die Einführung solch eines Federelements dargestellt.

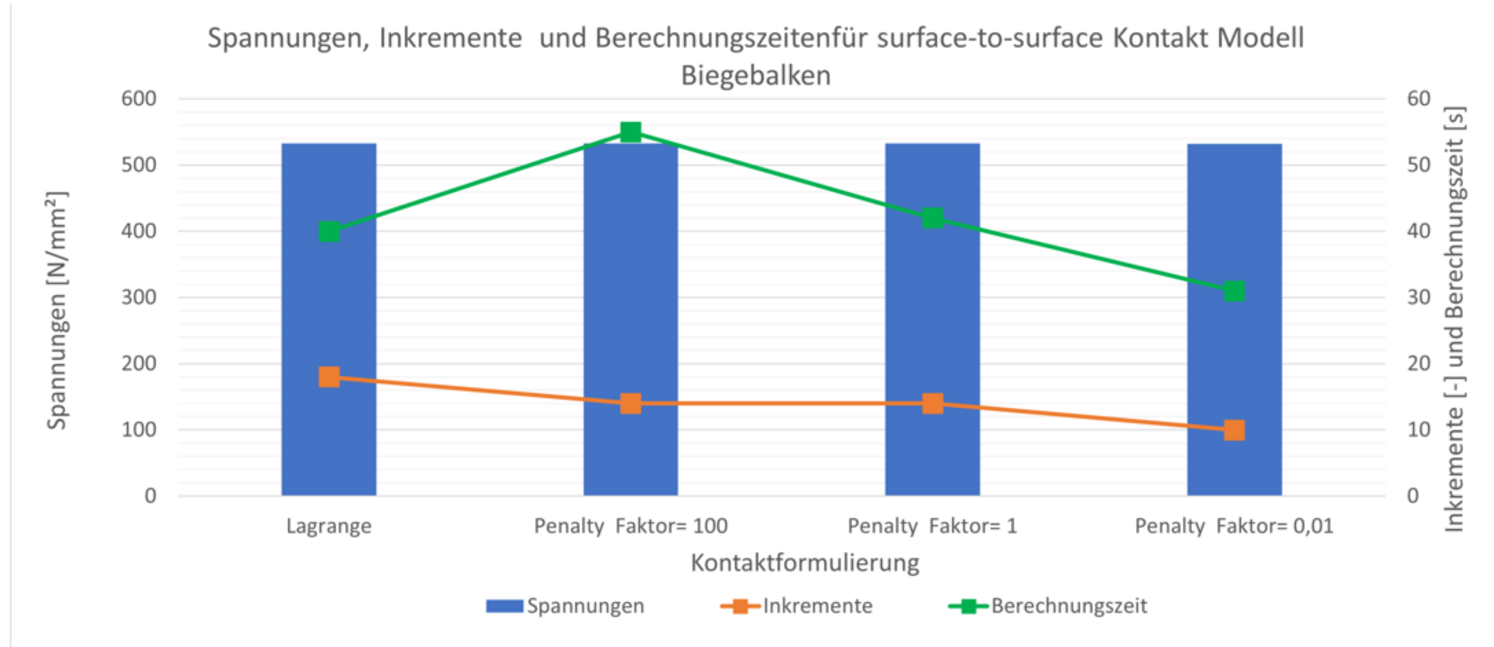


Über die Durchdringung d_N sowie die Federsteifigkeit k, auch Penalty-Steifigkeit genannt, wird die entgegenwirkende Kraft bestimmt. Bei hohen Federsteifigkeiten nähert sich die Lösung der Penalty-Methode der analytischen an.

In Abaqus kann die Penalty-Steifigkeit über den sogenannten „*Stiffness scale factor*" beeinflusst werden.

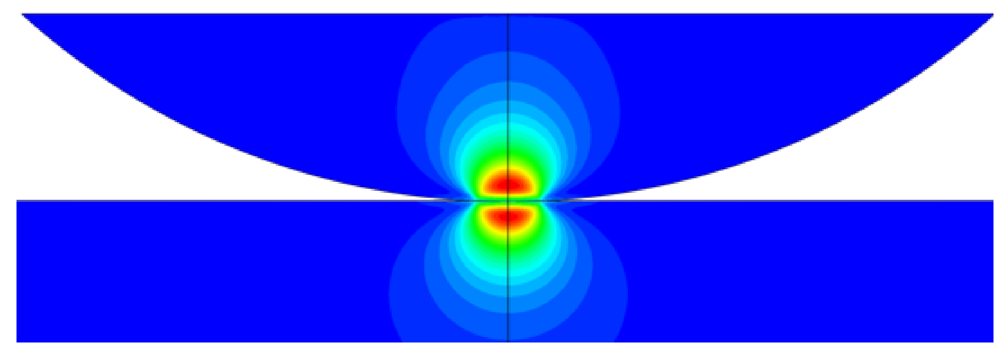
Ergebnisse für das biegedominierte Problem

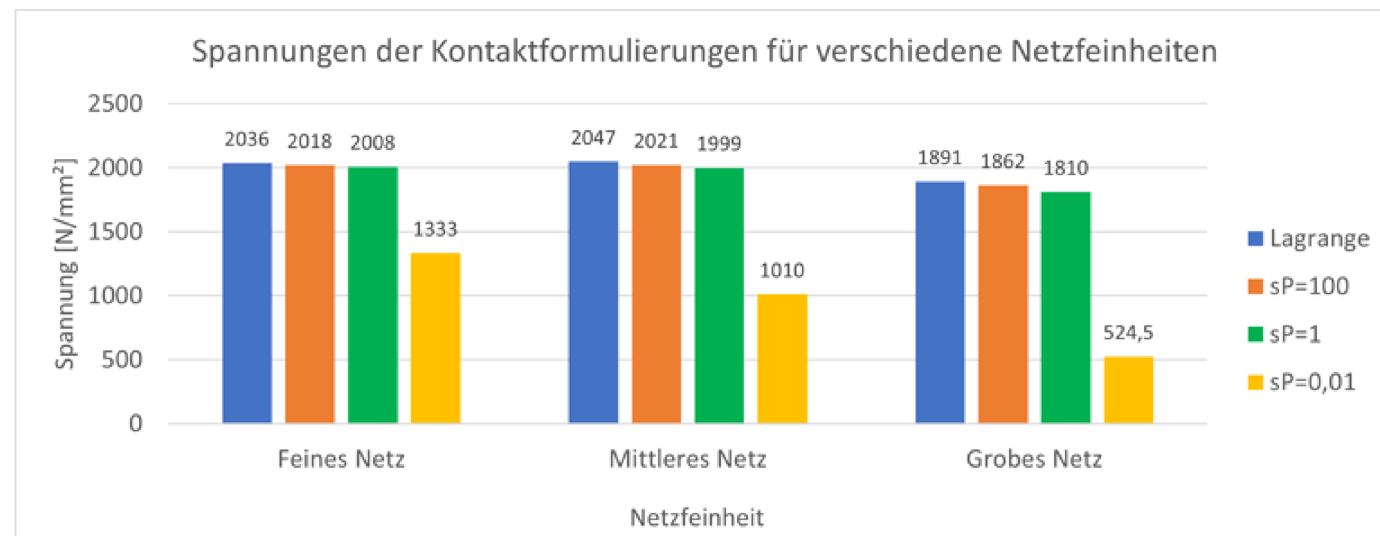




Spannungen und Inkremente Die Aussage Nasdalas bezüglich Biegedominierten Problemen ist, dass hierfür die Penalty-Methode zu bevorzugen ist, da eine geringe Penalty-Steifigkeit verwendet werden kann. In den Ergebnissen zeigt sich, dass dies der Fall ist. Die maximalen Spannungen im Balken sind für die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren sowie für die Penalty-Methode mit verschiedenen Steifigkeiten gleich. Die Penalty-Methode benötigt dabei in allen Fällen weniger Inkremente und Iterationen als die Lagrange-Methode. Hinsichtlich der Berechnungszeiten zeigt sich, dass mit zunehmender Penalty-Steifigkeit die Berechnungszeit zunimmt. Für den Defaultwert des „*Stiffness scale factor*" $s_P = 1$ liegt die Berechnungszeit auf dem Niveau der Lagrange-Methode. Wird der der Faktor weiter verringert, wird weniger Zeit für die Berechnung benötigt.

Ergebnisse für das dehnungsdominierte Problem





Hertz'sche Pressung. Für dehnungsdominerte Probleme, wie z.B. die Hertz'sche Presssung empfiehlt Nasdala die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren. Die Penaltyfaktoren müssen hingegen sehr hoch gewählt werden um die Ergebnissqualität der Lagrange'schen Multiplikatoren zu erreichen.

Durch Berechnungen kann diese Aussage bestätigt werden. Je höher die Penaltysteifikeit gewählt wird, desto näher kommen die Spannungen an das Niveau derer, die mit der Methode den Lagrange'schen Multiplikatoren Berechnet werden. Auffällig dabei ist, dass eine sehr geringe Penalty-Steifigkeit zu starken Abweichungen der Spannungen führt. Dies ist darauf zurück zu führen, dass bei einer geringen Steifigkeit die Durchdringung sehr hoch ist. Dadurch wird die Kontaktfläche zwischen den beiden Körpern größer und die Spannungen reduzieren sich.