Fehleranalyse bei der FEM - Untersuchung der a priori Fehlerschätzung

Alexander Schnieders

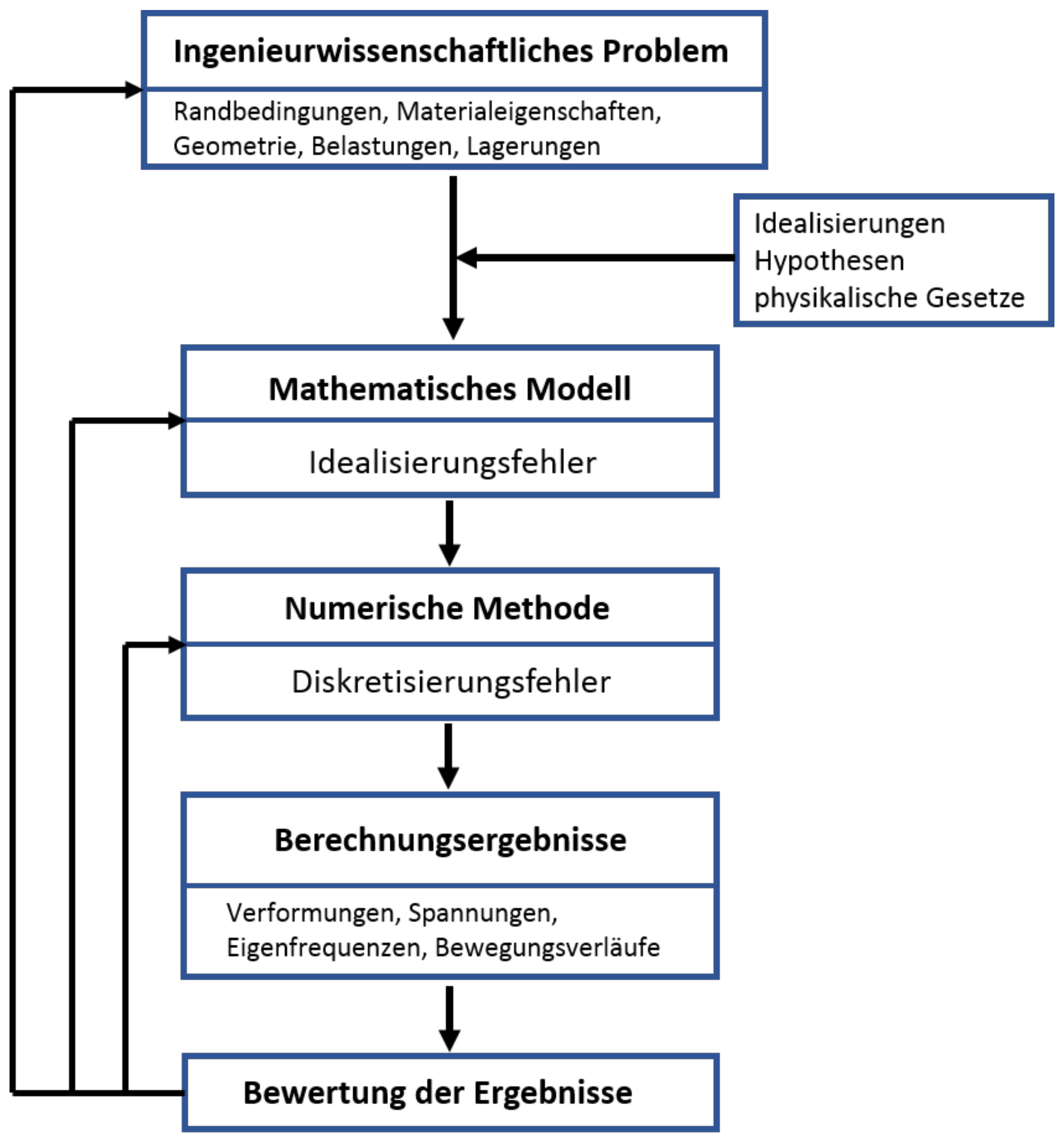
Labor für Computersimulation (Eckhard Finke, Stefan Averkamp)

Einführung in die Fehleranalyse

Das Problem. Die moderne Entwicklung bei der FEM ermöglicht die Betrachtung immer komplexerer und größerer Systeme. Die Nachvollziehbarkeit der Ergebnisse ist dabei häufig nicht gegeben, sodass diese nicht immer hinterfragt werden. Es muss beachtet werden, dass die FEM-Lösungen fehlerbehaftet sind. Der Fokus dieser Untersuchung ist die a priori Fehlerschätzung, mit deren Hilfe Aussagen über das Konvergenzverhalten der Lösung getroffen werden können. Hiermit kann das Fehlerverhalten vor der Berechnung abgeschätzt werden. Alternativ besteht bei der FEM auch die Möglichkeit den Fehler nach der Durchführung der Berechnung über die a posteriori Fehlerbestimmung zu ermitteln.

Fehlerursachen

Wie entstehen die Fehler? Bei der FEM wird versucht mit Hilfe von mathematischen, physikalischen und mechanischen Ersatz- und Berechnungsmodellen die Realität möglichst genau nachzubilden und damit zu berechnen. Durch fehlerbehaftete Annahmen bezüglich des realen Problems sowie der fehlerbehafteten Einführung von mechanisch begründeten Idealisierungen in ein mathematisches Modellproblem resultieren sogenannte Idealisierungsfehler. Ferner können Diskretisierungsfehler bei der Anwendung der numerischen Methode hervorgerufen werden. Mit Hilfe der a priori Fehlerschätzung können diese Diskretisierungsfehler abgeschätzt werden.



A priori Fehlerschätzung

Grundsätze der a priori Fehlerschätzung. Der Fehler kann vor der Berechnung nicht quantitativ bestimmt, sondern nur qualitativ abgeschätzt werden. Mit Hilfe der Methodik besteht die Möglichkeit, die Konvergenzgeschwindigkeit der FEM-Lösung zu ermitteln. Das Fehlerverhalten kann bei Betrachtung der Lösungsgrößen in der Maximumnorm mit folgender Formel beschrieben werden:

$$\max |e| = \max |u_{\mathrm{Ex}} - u_{\mathrm{FEM}}| = \mathrm{c} \cdot h_{\mathrm{e}}{}^{p+1}$$

Es wird eine Aussage getroffen, die anzeigt, wie schnell ein Fehler gegen Null geht, wenn sich die Diskretisierung h_{e} und die Polynomordnung p des Ansatzes verändern.

Die Polynomordnung der Ansatzfunktion bei der FEM ist die Grundlage zur Ermittlung der Steifigkeitsmatrix eines Elementes. Die Voraussetzung zur Abschätzung des Fehlers ist eine äquidistante Diskretisierung. Der Näherungsfehler der FEM e ist die Differenz zwischen der analytischen Lösung u_{Ex} und der FEM-Lösung u_{FEM}.

Einschränkungen

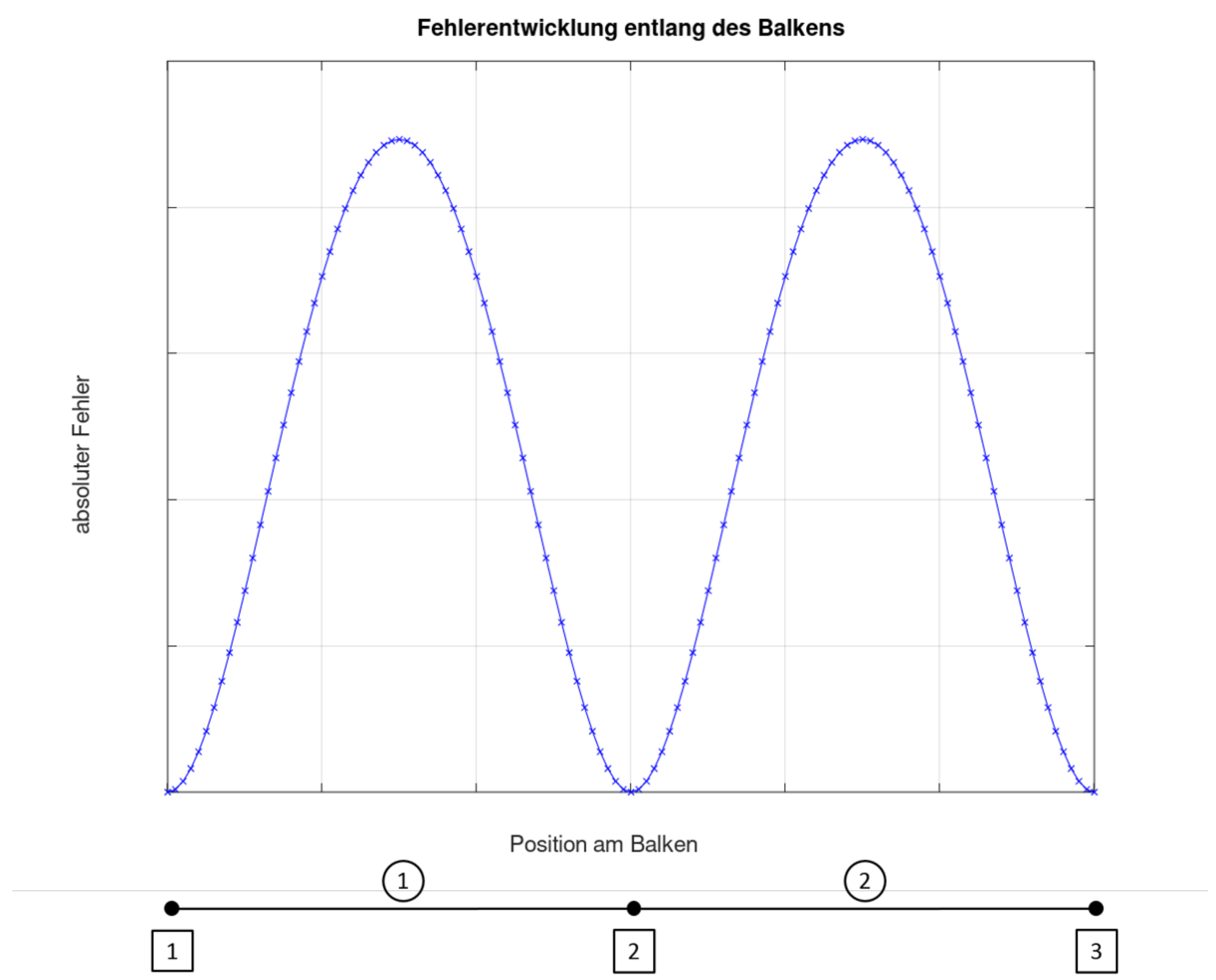
Die formellen Zusammenhänge bezüglich der Fehlerentwicklung sind **nur gültig, wenn** der Polynomgrad der Ansatzfunktion kleiner ist als der Polynomgrad der analytischen Biegelinie.

Es gilt folgende Voraussetzung:

$$p_{\mathrm{FEM}} < p_{\mathrm{Ex}}$$

Wenn diese Bedingung **nicht erfüllt** ist, ist die FEM-Lösung **korrekt**.

Fehlerentwicklung entlang der Elemente



Fehler der Knotenverformungen gleich Null! Bei der Untersuchung der Grundsätze wird deutlich, dass keine Fehler in den Knotenverformungen vorhanden sind. Der Fehler liegt in der Biegelinie der FEM, die über die Formfunktionen bestimmt wird. Die Biegelinie der FEM kann die analytische Biegelinie nicht nachbilden, sodass hier gewisse Differenzen zur analytischen Lösung auftreten. Bei einer konstanten Streckenlast ergibt sich die nebenstehende Grafik, in der das Fehlerverhalten entlang der Elemente dargestellt ist. Dabei sind zwei Balkenelemente zur Berechnung verwendet worden. Bei der Belastung mit einer konstanten Streckenlast liegt das Maximum des Fehlers in der Elementmitte.

Konvergenzverhalten

Die Entwicklung des maximalen Fehlers im System in Abhängigkeit von der Diskretisierung zeigt bei logarithmischer Darstellung einen linearen Verlauf. Dabei weist die Steigung der Geraden einen Wert von „$p_{\mathrm{FEM}} + 1$“ auf. Im Beispiel wurden Elemente mit einem Polynomgrad von $p = 3$ verwendet. Daher beträgt die Steigung $m = 4$.

Folglich **sinkt der Fehler** zwischen den Biegelinien bei einer **feiner werdenden Diskretisierung** mit der **Potenz** von „$p_{\mathrm{FEM}} + 1$“ ab.