Statistische Tolerierung linearer und nichtlinearer Maßketten

Alexander van der Linde

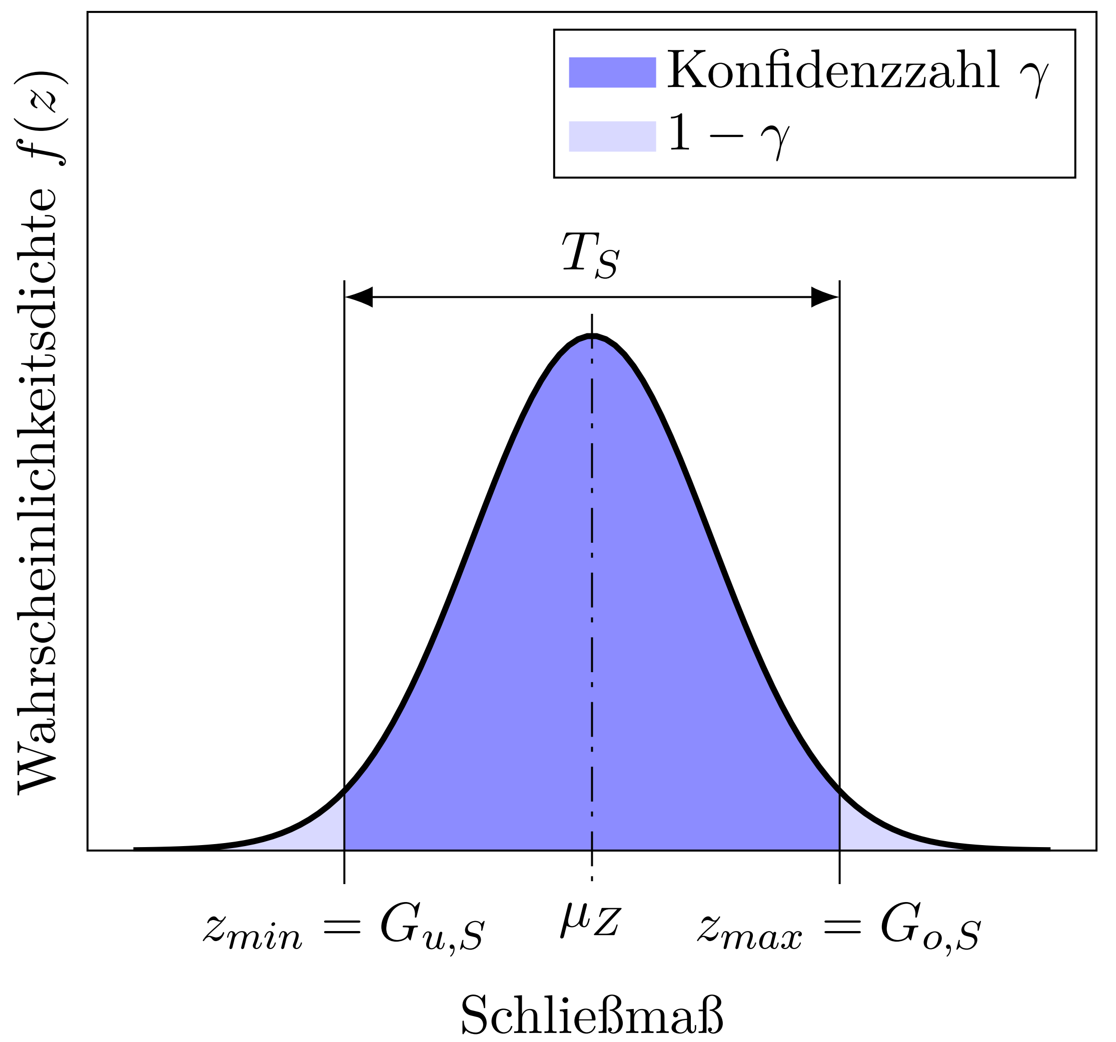
Labor für Computersimulation (Eckhard Finke und Markus Lammers)

Motivation hinter der statistischen Tolerierung

Zur Festlegung der Toleranzen gibt es zwei Methoden. Die arithmetische Tolerierung ist der sicherere Ansatz. Die Maße der Maßkette eines Produktes werden so toleriert, dass die Funktionsfähigkeit des Produktes (Einhaltung des vorgebenen Schließmaßes) auch im ungünstigen Fall (worst case) gewährleistet ist. Damit ergibt sich eine vollständige Austauschbarkeit der Einzelbauteile des Produktes. Um die Funktionsfähigkeit zu gewährleisten ergeben sich nach diesem Vorgehen jedoch eher kleinere Einzeltoleranzen. Kleine Einzeltoleranzen führen zu hohen Fertigungkosten.
Daher ist die Motivation hinter der statistischen Tolerierung größere Einzeltoleranzen zu ermöglichen. Statistisch gesehen ist die arithmetische Tolerierung insbesondere für längere Maßketten nicht realistisch, da es sehr unwahrscheinlich ist, dass der ungünstigste Fall eintritt. Bei der statistischen Tolerierung wird angenommen, dass sich zufällige positive und negative Abweichungen ausgleichen. Dadurch haben die Einzeltoleranzen einen geringeren Einfluss auf die Maßkette und es sind größere Einzeltoleranzen möglich.

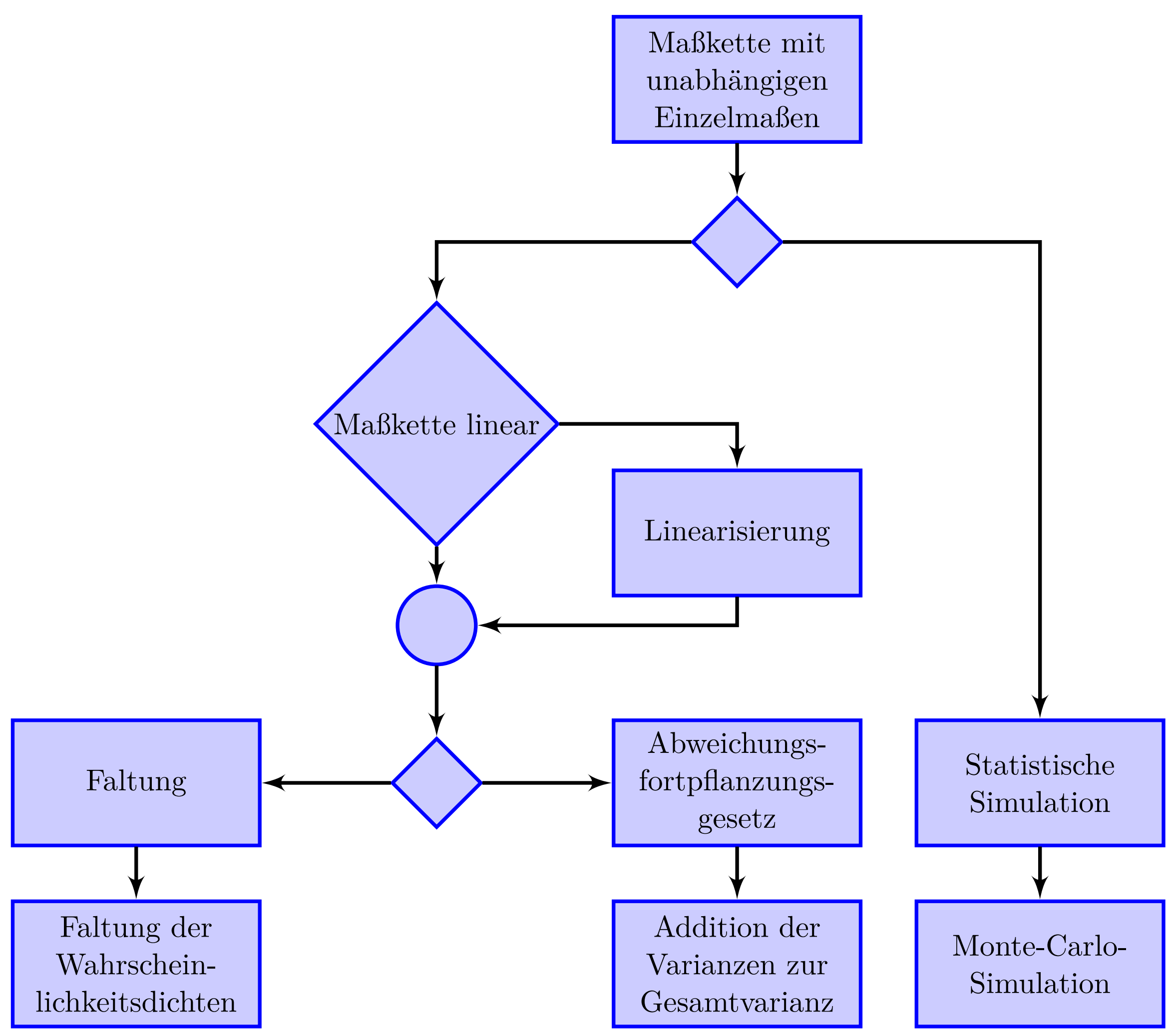
Berechnungsansatz

Um die statistische Tolerierung anzuwenden, wird jedes Einzelmaß als eine Zufallsvariable x_i mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x_i)$ modelliert. Damit ist das Schließmaß auch eine Zufallsvariable z mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte $f(z_i)$ und dem Mittelwert μ_Z. Bei der statistischen Tolerierung werden die Toleranzgrenzen nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit eingehalten. Damit gibt es bei der statistischen Tolerierung nur eine unvollständige Austauschbarkeit der Bauteile. Ein typischer Wert ist $\gamma = 99,73\,\%$ und bedeutet das $99,73\,\%$ der Schließmaße innerhalb der Schließtoleranz liegen.



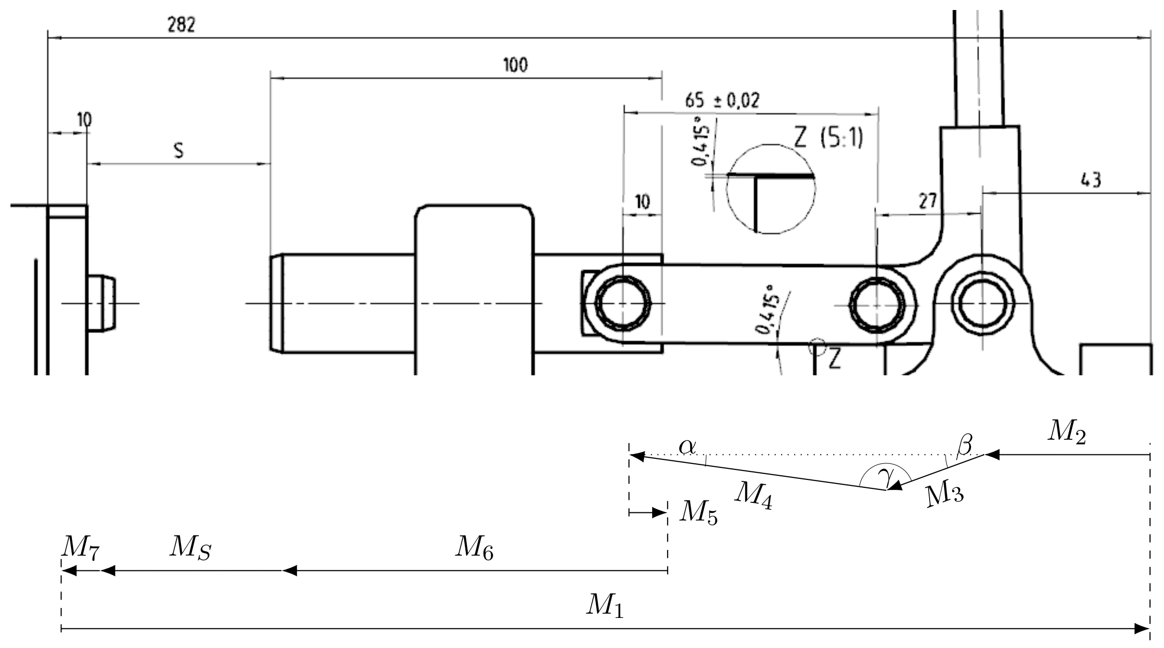
Mögliche Vorgehensweisen

Die Faltung ist die mathematisch korrekte Vorgensweise, zur Berechnung einer Zufallsgröße aus der Summe von einzelnen Wahrscheinlichkeitsdichten. Sie ist jedoch sehr aufwendig. Daher wird in der Praxis mit Näherungslösungen nach dem Abweichungsfortpflanzungegesetz gearbeitet. Durch eine Linearisierung können diese Verfahren auch für nichtlineare Maßketten angewendet werden. Ist die Maßkette stark nichtlinear oder weisen die Einzelmaße unterschiedliche Verteilungsformen auf, kann diese Vorgehensweise zu ungenauen Ergebnissen führen. In diesem Fall liefert eine statistische Simulation bessere Resultate. Das bekannste Verfahren zur Toleranzrechnung ist die Monte-Carlo-Simulation.



Beispielrechnung

Aufstellen der Maßkette. Für den dargestellten Kniehebelspanner soll das Schließmaß S zwischen dem Spannbolzen und der Druckplatte berechnet werden. Zunächst wird die Maßkette in Form eines Linienzuges aufgestellt:



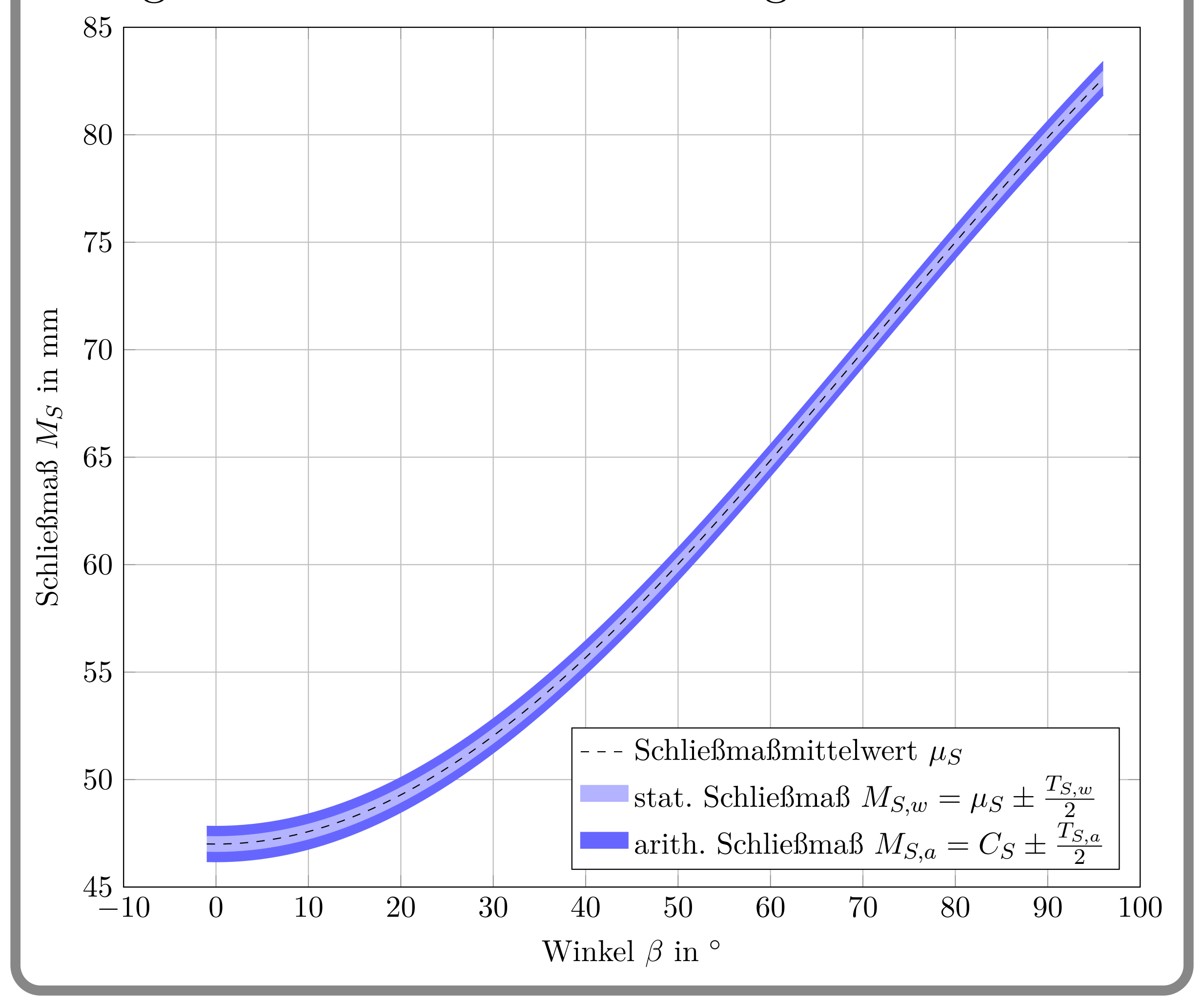
Durch das Hebelprinzip ergibt sich ein nichtlinearer Zusammenhang in Form eines allgemeinen Dreiecks in der Maßkette. Die Schließmaßgleichung in Abhängigkeit von β lautet:

$$M_S = M_1 - M_2 - \sin\left(180^\circ - \beta - \arcsin\left(\sin\beta\,\frac{M_3}{M_4}\right)\right)\frac{M_4}{\sin\beta} + M_5 - M_6 - M_7$$

Damit können der Schließmaßmittelwert μ_S und die Schließtoleranz T_S berechnet werden.

Vergleich der Ergebnisse

Arithmetisch oder Statistisch? Die Schließmaße sind als Bereich zwischen dem unteren und oberen Grenzschließmaß in Abhängigkeit von β dargestellt. Nach der statistischen Vorgehenweise (Addition der Varianzen) ergibt sich ein kleinerer Bereich (Hellblau) als nach der arithmetischen Rechnung (Blau). Die Einzeltoleranzen führen nach der statistischen Tolerierung zu kleineren Schließmaßen. Muss für die Funktion ein bestimmtes Schließmaß eingehalten werden, sind nach der statistischen Rechnung also größere Einzeltoleranzen möglich.



Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation

Wie genau ist die Simulation? Bei der Monte-Carlo-Simulation wird für jedes Einzelmaß ein Zufallswert aus der entsprechenden Verteilung berechnet. Aus den zufälligen Einzelmaßen ergibt sich ein zufälliges Schließmaß. Diese Vorgehen wird für N-Durchläufe wiederholt.
Aus den N zufälligen Schließmaßen ergibt sich eine statistische Verteilung aus der die Schließtoleranz $T_{S,MC}$ berechnet wird. Rechts in der Abbildung sind die wahrscheinliche Schließtoleranz $T_{S,w}$ (Addition der Varianzen) und zwei Schließtoleranzen nach der Monte-Carlo-Simulation $T_{S,MC}$ in Abhängigkeit von β dargestellt. Je mehr Durchläufe N durchgeführt werden, desto genauer ist die Simulation. Jedoch steigt damit auch die Simulationsdauer t.