



# Physikalisches Praktikum I

Bachelor Chemieingenieurwesen, Wirtschaftsingenieurwesen Chemietechnik

M.Sc. M. Gilbert

## SW01 Erzwungene Schwingung & Resonanz (Pr\_EX\_SW01\_Resonanz\_6, 04.04.2023)

Name	Matr. Nr.	Gruppe	Team
1.			
2.			
3.			
<b>Protokoll ist ok</b>	<b>O</b>	<b>Datum</b>	<b>Abtestat</b>
<b>Folgende Korrekturen nötig</b>	<b>O</b>		
<b>Teilnahme erfordert erfolgreiches Beantworten der Zulassungsfragen am Versuchstag (siehe Anleitung).</b>			

## 1. Ziel

Erzwungene Schwingungen, vor allem Resonanzeffekte, spielen in vielen Bereichen der Physik und Technik eine wichtige Rolle. Dabei geht es immer um das Verhalten eines gedämpften harmonischen Oszillators, als Antwort auf eine periodische äußere Kraft  $F_a(t)$ . Im Fahrzeugbau gilt es z.B. die Dämpfung der Federung eines PKW oder Motorrades so auszulegen, dass das Fahrzeug sich auf welliger Straße nicht „aufschauelt“ und es zu einer Resonanzkatastrophe kommt. In der Akustik gilt es durch geeignete Resonanzkörper bestimmte Schwingungen zu verstärken, oder Resonanzen z.B. der Deckenverkleidung eines Konzertsaaes zu vermeiden. Nicht zuletzt basiert das Verständnis der Atom-, Festkörper- und Laser-Physik entscheidend auf dem Modell des harmonischen Oszillators. In diesem Praktikum untersuchen wir die grundlegenden Eigenschaften des harmonischen Oszillators, genauer die Abhängigkeit der Amplitude und Phase des Oszillators von der Dämpfung und von der Frequenz der anregenden Kraft. Es baut auf dem Praktikum „Federkonstante einer Schraubenfeder“ auf.

## 2. Theorie

### 2.1 Freie Schwingung

Ein linearer Oszillator ist immer aus zwei „Elementen“ aufgebaut: das rücktreibende und das träge Element. Das rücktreibende Element verursacht eine Kraft, die das System in die Gleichgewichtslage zurückbringt (Feder, Gravitation beim Pendel). Es speichert die potenzielle Energie. Das träge Element (Masse) speichert dagegen die kinetische Energie. Eine Schwingung ist verbunden mit einer periodischen Umwandlung von potenzieller in kinetische Energie. Aufgrund der Dämpfung, i.d.R. durch Reibung, wird Energie verbraucht und der Schwingung entzogen, bis diese zum Stillstand kommt. Wenn alle wirkenden Kräfte bekannt sind, kann die Schwingung vollständig beschrieben werden. Bei einer mechanischen Schwingung sind das:

- |     |                 |                             |   |
|-----|-----------------|-----------------------------|---|
| (1) | Federkraft      | $F_F = -kx$                 | $k$ : Federkonstante (N/m)                                      |
| (2) | Reibungskraft   | $F_R = -b \frac{dx}{dt}$    | gilt für langsame Bewegung<br>$b$ : Dämpfungskoeffizient (kg/s) |
| (3) | Beschleunigung  | $F_B = m \frac{d^2x}{dt^2}$ | $m$ : Masse (kg)  |
| (4) | Kräftegleichung | $F_B = F_F + F_R$           |   |

Setzen wir hier die Ausdrücke der Gl. 1 – 3 ein, so erhalten wir die Bewegungsgleichung der freien, gedämpften Schwingung, eine Differentialgleichung:

(5)	Bewegungsgleichung	$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$	
		$\Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$	mit $\delta = b/2m$ (normierte Dämpfung)

Die Bewegungsgleichung verbindet die folgenden 3 zeitabhängigen Funktionen miteinander:

- (6) Auslenkung  $x(t)$
- (7) Geschwindigkeit  $dx/dt = v(t)$
- (8) Beschleunigung  $d^2x/dt^2 = a(t)$

Das Besondere der Bewegungsgleichung ist, dass sie eine Funktion und ihre Ableitungen miteinander verbindet. Die Lösung solch einer Differentialgleichung ist also generell eine Funktion  $x(t)$ , welche zu allen Zeiten  $t$  die Bedingung von Gl. 5 erfüllt. Man kann beweisen, dass die Lösung folgende Form hat

(9) Lösung  $x(t) = x_0 \cdot \exp\{-\delta t\} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Die Lösung beschreibt also das zeitliche Verhalten der Auslenkung  $x(t)$  des harmonischen Oszillators. Die Schwingung wird erfasst durch den Term  $\cos(\omega_0 t + \varphi)$  mit der Kreisfrequenz  $\omega_0$  und der Phasenkonstanten  $\varphi$ :

(10) Kreisfrequenz  $\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m} - \delta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

Die Frequenz  $\omega_r$  heißt Eigenfrequenz des gedämpften Oszillators. Sie ist gegenüber der Eigenfrequenz des ungedämpften Oszillators leicht vermindert. Aus der Frequenz berechnet sich die Schwingungsperiode zu:

(11) Periode  $T = 2\pi / \omega_r = 1/f$

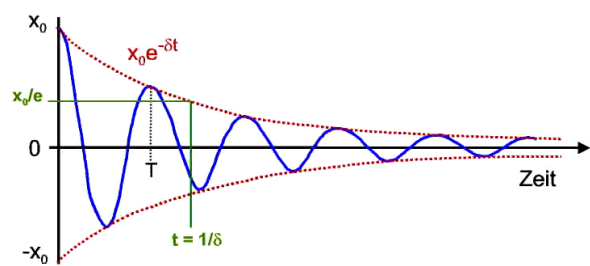


Abb. 1

Die Amplitude der Auslenkung fällt exponentiell mit der Zeit  $t$  aufgrund der Dämpfung:

(12) Amplitude  $x_0 \exp(-\delta t)$

Eine typische Größe für die Dämpfung ist die Zeit  $t = 1/\delta$ , in der die Amplitude auf den Wert  $x_0/e$  abgeklungen ist:

(13) Abklingzeit  $x(1/\delta) = x_0/e \approx 0,37x_0$

Der typische Verlauf einer gedämpften Schwingung ist in Abb.1 zu sehen.

### Dämpfungsfälle

Abhängig von der relativen Größe der Konstanten  $k$ ,  $m$  und  $b$  (Gl. 10), ergeben sich verschiedene Fälle für die Schwingung, wie Abb.2 zeigt.

1) Schwingfall:  $4km > b^2$

hier haben wir  $\omega_0 > 0$  und das System führt Schwingungen mit abklingender Amplitude aus.

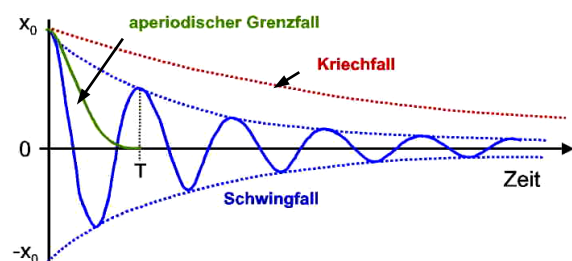


Abb. 2

2) Aperiodischer Grenzfall:  $4km = b^2$

Hier gilt  $\omega_0 = 0$ , d.h. es findet gar keine Schwingung statt. Das System kehrt direkt in die Gleichgewichtslage zurück. Dies ist der ideale Fall der Dämpfung eines schwingenden Autos.

3) Kriechfall:  $4km < b^2$

Aus Gl. 10 so sehen wir, dass der Term in der Wurzel negativ wird und damit wird  $\omega_0$  imaginär. Das System braucht unendliche Zeit, um in den Gleichgewichtszustand zurück zu kehren.

### Energieverlust

Aufgrund der Dämpfung nimmt die Gesamtenergie  $E(t)$  mit der Zeit exponentiell ab

$$(14) \quad E(t) = \frac{1}{2} k x_0^2 e^{-2\delta t}$$

und zwar nimmt die Energie doppelt so schnell ab wie die Amplitude, da  $E \sim x^2$ . Die Energieverlustrate bestimmt man nach kurzer Rechnung zu

$$(14) \quad dE/dt = -2\delta E(t).$$

Daraus ergibt sich ein technologisch gebräuchliches Maß für die Dämpfung, der Gütefaktor  $Q$

$$(15) \quad Q = (2\pi \text{ Energie}) / (\text{Energieverlust in einer Periode}) = \omega_0 / 2\delta$$

Das bedeutet, je größer  $Q$ , desto weniger Energie verliert das schwingende System. Maschinen mit großem  $Q$  sind also reibungsfreier als solche mit kleinem  $Q$ .

### 2.2 Erzwungene Schwingung

Der Energieverlust der gedämpften Schwingung kann durch Energiezufuhr von außen kompensiert werden, wenn sie im richtigen Takt erfolgt. Zum Beispiel muss eine Schaukel im richtigen Takt angestoßen werden, wobei auch kleine Amplituden genügen. Wir haben dann zwei schwingende Systeme a) Schaukel mit eigener Kreisfrequenz  $\omega_0$  und b) die äußere, anregende Kraft  $F_a$  mit der Kreisfrequenz  $\omega_a$ . Zur Beschreibung dieses Systems addieren wir zur Gl. (5) die äußere Kraft

$$(16) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_a}{m} \cos(\omega_a t)$$

Der Rechenweg zur Lösung dieser Bewegungsgleichung findet sich in einschlägigen Lehrbüchern. Hier soll nur die Lösung und ihre Komponenten selbst beschrieben werden:

$$(17) \quad \text{Lösung} \quad x(t) = x_0 \cos(\omega_a t + \varphi) \quad \text{Auslenkung für } t \gg 1/\delta$$

$$(18) \quad \text{Amplitude} \quad x_0 = \frac{F_a}{\sqrt{m^2 (\omega_0^2 - \omega_a^2)^2 + b^2 \omega_a^2}}$$

$$(19) \quad \text{Frequenz} \quad \omega_r = \sqrt{\frac{k}{m} - \delta^2} \quad \text{Eigenfrequenz gedämpfte Schw.}$$

$$(20) \quad \text{Phasendifferenz} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{2\delta\omega_a}{\omega_0^2 - \omega_a^2}\right) \quad \text{Oszillator} \Leftrightarrow \text{äußere Anregung}$$

Neu gegenüber der freien Schwingung ist: das System schwingt nicht mit der Eigenfrequenz  $\omega_0$ , sondern mit der Frequenz  $\omega_a$  der äußeren Kraft nach einer Einschwingzeit  $t \gg 1/\delta$ . Allerdings schwingen das System und die äußere Anregung unter Umständen mit einer Phasendifferenz  $\varphi$ , d.h. Oszillator und äußere Anregung können sich u.U. in gegensätzliche Richtungen bewegen. Dies ist abhängig von  $(\omega_0^2 - \omega_a^2)$  wie Abb.3 unten rechts zeigt.

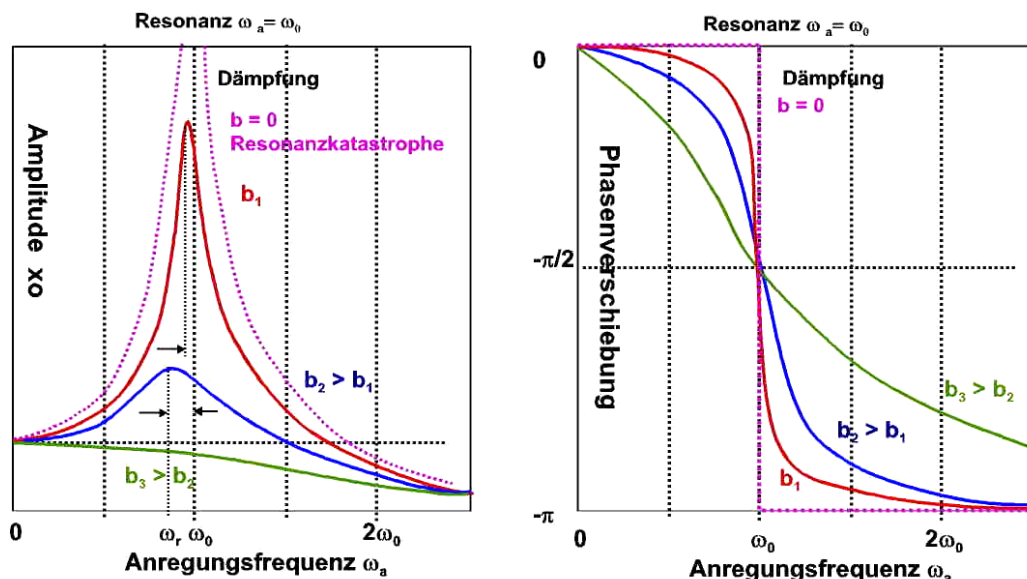


Abb.3

Neu ist auch, dass die Amplitude stark vom Term  $(\omega_0^2 - \omega_a^2)$  abhängt. Sie ist maximal bei der Resonanz, d.h. wenn  $\omega_0 = \omega_a$ , also wenn die äußere Kraft im richtigen Takt anregt. Das schwingende System nimmt von außen Energie (Leistung) auf. Dies ist deutlich in Abb.3 für verschiedene Dämpfungsfälle zu sehen. Mit verschwindender Dämpfung behält das System immer mehr Energie, denn es gibt weniger Reibungsverluste und es kann zur so genannten Resonanzkatastrophe kommen, wenn die anregende Frequenz genau die Eigenfrequenz des Systems trifft. Dieser Fall ist in der Regel bei der Konstruktion von Fahrzeugen zu vermeiden. Anhand der beiden Abbildungen lassen sich die folgenden Grenzfälle beschreiben:

- a)  $\omega_a \ll \omega_0$  Das System wird von  $F_a$  langsam bewegt, die Rückstellkraft dominiert. Keine Phasendifferenz zwischen  $x(t)$  &  $F_a$  (im Takt). Keine Leistungsaufnahme des Systems.
- b)  $\omega_a \gg \omega_0$  Die Trägheit dominiert, Auslenkung  $x(t)$  und Kraft  $F_a$  um  $\varphi = -\pi$  phasenverschoben (gegenläufig). Keine Leistungsaufnahme
- c)  $\omega_a = \omega_0$  Resonanz,  $x(t)$  und Kraft  $F_a$  sind um  $\varphi = -\pi/2$  phasenverschoben Das System nimmt die Leistung  $P = F_a(t)v(t) \sim \sin^2(\omega t)$  auf.

**Halbwertsbreite:**

Die Breite der Amplitude  $x_0(\omega_a)$  der Resonanzkurve (Gl. 17, Abb.3 links) steigt mit wachsender Dämpfung  $\delta = b/2m$ . Dieser Sachverhalt wird oft ausgenutzt, um  $\delta$  direkt abzulesen. Das Maß hierfür ist  $\Delta\omega$ , die Breite (Halbwertsbreite) der Kurve. Näherungsweise gilt:

$$(21) \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2Q} \Rightarrow \Delta\omega = \frac{b}{2m} = 2\delta.$$

Würde die Leistung  $P$  aufgetragen, so müsste die Halbwertsbreite  $\Delta\omega$  bei  $P_{\max}/2$  abgelesen werden (auf halber Höhe). Wird jedoch die Amplitude  $x_0$  aufgetragen, so wird wegen  $P \sim x_0^2$  die Halbwertsbreite  $\Delta\omega$  bei  $x_{0-\max}/\sqrt{2}$  abgelesen (Abb. 4).

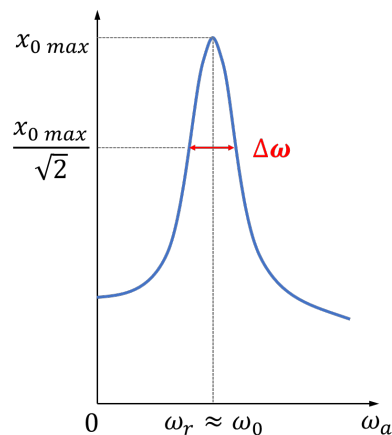


Abb. 4

**2.3 Harmonischer Oszillator**

Der in diesem Versuch verwendete Harmonische Oszillator ist in Abb. 5 dargestellt: ein an der Decke durch zwei Schnüre der Länge  $L$  aufgehängtes Masespindel schwingt in einer dämpfenden Flüssigkeit. Genau genommen ist unser System ein Gravitationspendel, gekoppelt mit einem Federpendel. Allerdings ist die Pendellänge groß gegenüber der Amplitude, so dass die rücktreibende Federkraft deutlich größer als die rücktreibende Gravitationskraft ausfällt. An-

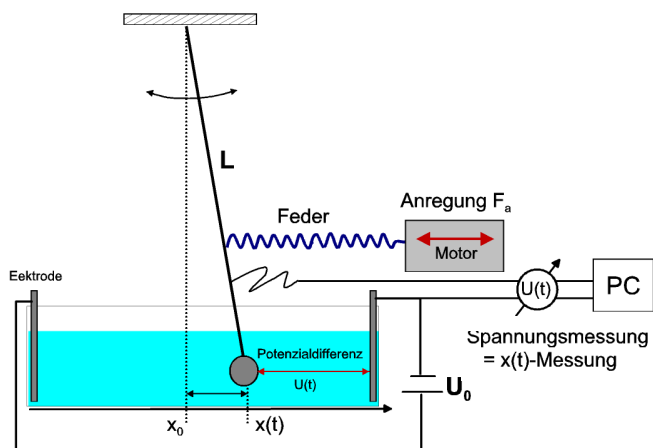


Abb.5

geregert wird das System durch einen Motor, der über eine Exzentrerscheibe eine Stange schiebt, die das Pendel periodisch bewegt. Seine Frequenz  $\omega_a$  lässt sich kontinuierlich über die Motorspannung regeln. Die Aufzeichnung der Schwingung erfolgt durch eine Potentiometerschaltung (siehe Praktikum „elektrische Messgeräte“). Die Messung der Auslenkung  $x(t)$  der Schwingung wird dabei auf eine Spannungsmessung zurückgeführt und kann so mit dem PC aufgezeichnet werden. Die dämpfende Flüssigkeit ist eine salzhaltige Lösung und somit stromleitend. An den Rändern des Flüssigkeitsbehälters befinden sich 2 Elektroden (Metallplatten) an denen eine elektrische Spannung  $U_0$  anliegt.

Das Pendel selbst ist metallisch und stellt den „Schieber“ des Potentiometers dar. Das bedeutet, dass zwischen dem Pendel und einer der Metallplatten die an der dazwischen liegenden Flüssigkeitsstrecke  $x$  abfallende Potenzialdifferenz (Spannung)  $U = IR$  gemessen wird. Die Spannung ist über den Widerstand  $R \sim \rho x$ , ( $P$  = spezifischer Widerstand der Flüssigkeit) direkt proportional zur Pendelauslenkung  $x(t)$ . Das Zeitverhalten der gemessenen Spannung  $U(t)$  gibt uns also direkt das Zeitverhalten der Schwingung  $x(t)$  des Systems.

**Fragen: Zulassung**

- Was sind: Kreisfrequenz, Frequenz, Periode, Amplitude und Phase einer Schwingung?
- Welche Kräfte bestimmen folgende Schwingungsformen eines harmonischen Oszillators:  
a) frei, ungedämpft, b) frei gedämpft, c) gedämpft erzwungen?
- Wie ändert sich die Auslenkung  $x(t)$  mit der Zeit für die obigen Fälle a), b) und c)?
- Was ist die Resonanz einer Schwingung und wann tritt sie auf?

**3 Durchführung**

3.1 Nehmen Sie mit dem PC die Schwingungskurven  $x(t)$  für verschiedene Anregungsfrequenzen  $\omega_a$  im Bereich unterhalb und oberhalb der Resonanzfrequenz  $\omega_r$  auf. Dazu wählen Sie folgende Versorgungsspannung des anregenden Motors:

8V\*, 10V, 11V, 11,5V, 12V, 12,3V, 12,6V, 13V\*, 13,3V, 13,6V, 14V, 14,3V, 14,6V, 15, 5,5V, 16V, 18V, 20V\*

Warten Sie jeweils die notwendige Einschwingzeit von etwa 1 Minute ab und lesen Sie an der Messkurve die eingestellte Periodendauer  $T_a$  und die zugehörige Amplitude  $x_0$  (Maximalauschlag) ab. Da hier als Auslenkung  $x$  messtechnisch eine Spannung aufgezeichnet wird, haben die Amplitudenwerte im Messprotokoll die Einheit V. Die Messkurven müssen nicht abgespeichert werden. Schätzen Sie zusätzlich bei den mit \* markierten Messungen die Phasendifferenz (= Winkelversatz) zwischen dem Pendel und anregendem Motor ab.

3.2 Stellen Sie die Motorspannung auf einen Wert mit möglichst hoher Amplitude ein. Starten Sie die Messung und warten Sie die Einschwingzeit ab. Stoppen Sie während der Messung den Motor und nehmen Sie die Abklingkurve einer freien, gedämpften Schwingung auf. Notieren Sie die Wertepaare  $(x_0, t)$  von ca. 15 Maxima der Kurve, beginnend nach dem Abschalten des Motors. In der späteren Auswertung bestimmen Sie aus dem Abklingverhalten die Dämpfung  $\delta$ . Achtung: Nehmen Sie auch die Null-Linie (Untergrund  $a$  auf), so dass Sie später durch  $x(t) = x_0 \cdot \exp(-\delta t) + a$  den Wert  $\delta$  berechnen können.

3.3 Stellen Sie vorsichtig die Wanne mit der Flüssigkeit zur Seite.

Bestimmen Sie mit der Stoppuhr die Eigenfrequenz des ungedämpften Pendels für kleine Auslenkungen. Messen Sie die Zeit  $T_{10}$  für 10 Schwingungen insgesamt 10 mal. Bilden Sie den Mittelwert und die Standardabweichung.

#### 4 Auswertung

- 4.1 Fertigen Sie aus den Daten von 3.1 die Resonanzkurven  $x_0(\omega_a)$  an (relative Werte für  $x$  in Volt genügen). Auf der  $x$ -Achse ist die Anregungskreisfrequenz  $\omega_a$  angetragen, nicht die Motorspannung! Geben Sie eine Fehlerabschätzung an und vergleichen Sie Ihre Resonanzkurve mit den theoretischen Kurvenformen (Abb. 3). Schätzen Sie aus dem Diagramm die Resonanzfrequenz  $\omega_r$  ab.
- 4.2 Tragen Sie die drei Werte der Phasendifferenz aus 3.1 in ein  $\varphi(\omega_a)$ -Diagramm ein und skizzieren Sie qualitativ in das gleiche Diagramm die theoretisch erwartete Kurve aus Abb. 3 rechts. Weitere Punkte Ihrer Kurve können Sie nach Bedarf mit Gl. 20 berechnen, nachdem Sie in den Folgeaufgaben  $\delta$  und die Eigenfrequenz  $\omega_0$  ermittelt haben.
- 4.3 Stellen Sie die Amplitudenwerte  $x_0(t)$  der gedämpften Schwingung (3.2) logarithmisch dar. Bestimmen Sie aus der Steigung  $\delta$  nach Gl.12.
- 4.4 Bestimmen Sie  $\delta$  zusätzlich mit Gl. 21 aus der Halbwertsbreite  $\Delta\omega$  der in Aufgabe 4.1 gezeichneten Resonanzkurve  $x_0(\omega_a)$ . Zur Erinnerung: Die Halbwertsbreite  $\Delta\omega$  ist die Breite der Kurve auf einer Höhe von  $\frac{x_{0-\max}}{\sqrt{2}}$ .  
Vergleichen Sie die Methoden zur Bestimmung von  $\delta$ .
- 4.5 Ermitteln Sie mit dem Ergebnis aus 3.3 die Eigenfrequenz  $\omega_0$  der ungedämpften Schwingung und machen Sie die Fehlerfortpflanzungsrechnung. Tragen Sie die Eigenfrequenz  $\omega_0$  als senkrechte Linie in die Resonanzkurve (3.1) ein. Vergleichen Sie die Eigenfrequenz  $\omega_0$  mit der Resonanzfrequenz  $\omega_r$  der gedämpften Schwingung.