Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Physikalisches Praktikum I

Bachelor Physikalische Technik: Lasertechnik, Biomedizintechnik

Prof. Dr. H.-Ch. Mertins, MSc. M. Gilbert

M04 Energieumwandlung am Maxwellrad

(Pr_PhI_M04_Maxwellrad_6, 14.7.2014)

Name	Matr. Nr.	Gruppe	Team
1.			
2.			

Protokoll ist ok **O** **Datum** **Abtestat**

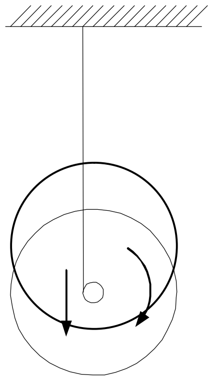
Folgende Korrekturen nötig **O**

Teilnahme erfordert erfolgreiches Beantworten der Zulassungsfragen am Versuchstag (siehe Anleitung).

1. Ziel

In diesem Praktikum untersuchen wir die fundamentalen Gesetze der Mechanik, wie Translation, Rotation, Trägheitsmomente, Drehmomente und die Energieerhaltung am Maxwellrad. Sie bilden die Grundlage für jede mechanische Konstruktion und gelten bis hin in die Quantenmechanik.

2. Theorie



Das Maxwellrad ist eigentlich nichts weiter als das bekannte Jojo. Eine Scheibe sitzt auf einer Achse, um die ein Faden gewickelt ist. Lässt man die Scheibe los, rollt der Faden sich ab und sie bewegt sich nach unten. Dabei wird potentielle Energie in andere Energieformen umgewandelt. Unten angekommen, wickelt sich der Faden wieder auf und das Maxwellrad „klettert“ am Faden nach oben.

2.1 Mechanische Energieformen

Die mechanische Energie eines Körpers ergibt sich aus der Arbeit W, die man aufbringen muss, um ihn durch ein Kraftfeld $\vec{F}(x)$ von x_1 nach x_2 zu bewegen. Man integriert über den Weg des Körpers, wobei entscheidend die Länge der Bahn und die zur Bahn parallele Komponente der Kraft sind, ausgedrückt durch das Skalarprodukt von Kraft und Weg

(1a) $$W = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}(x) \cdot d\vec{x}$$

Ist $\vec{F}(x)$ konstant und immer parallel zum Weg, so folgt einfach

(1b) $$W = F\,(x_2 - x_1)\,.$$

Potenzielle Energie E_{pot} (Gravitationsenergie) gewinnt ein Körper der Masse m, wenn an ihm Arbeit verrichtet wurde durch Anheben im Schwerefeld parallel zur Gravitationsbeschleunigung $\vec{g}$ von x_1 nach x_2 :

(2) $$E_{pot} = \int_{x_1}^{x_2} m\vec{g} \cdot d\vec{x} \;=\; mg(x_2 - x_1) = mg\,\Delta x$$

Die kinetische Energie E_{kin} der Translation ergibt sich aus seiner Geschwindigkeit $v = dx/dt$ zu

(3) $$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$$

Dreht sich ein Körper um eine Achse mit der Winkelgeschwindigkeit □□□so besitzt er die Rotationsenergie

(4) $$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$ wobei I das Trägheitsmoment des Körpers ist.

Die Formeln der kinetischen Energie für Translation (Gl. 3) und Rotation (Gl.4) sind prinzipiell identisch: das Trägheitsmoment entspricht der trägen Masse, die Winkelgeschwindigkeit der Translationsgeschwindigkeit.

2.2 Energieerhaltung

Die mechanische Gesamtenergie des Systems ergibt sich aus der Summe der Einzelterme:

(5) $$E = E_{kin} + E_{pot} + E_{rot}$$

Die Gesamtenergie ist eine Erhaltungsgröße, d.h. sie bleibt konstant, wenn gilt: 1) das System ist abgeschlossen und 2) die Umwandlung der Energieformen erfolgt durch konservative Kräfte:

(6) $$\Delta E = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} + \Delta E_{rot} = 0$$

Ist E = konstant, ($\Delta E = 0$), so kann man die Energieanteile zu allen Zeiten miteinander verbinden, ohne die Bewegung u. Kräfte im Detail kennen zu müssen. Für konservative Kräfte (Federkraft, Gravitation) gilt: die Arbeit, die sie an einem Teilchen verrichten, hängt nicht vom Weg des Teilchens ab., d.h diese Prozesse sind reversibel. Dies ist bei genauer Betrachtung leider nicht der Fall, denn Reibungskräfte sind nicht-konservativ und wandeln irreversibel Energie in Wärme um, d.h. $\Delta E \neq 0$. Trotzdem benutzen wir in erster Näherung Gl. 6.

2.3 Rotation & Trägheitsmoment

Überstreicht ein Punkt des Körpers den Winkel θ, so hat er die Winkelgeschwindigkeit

(7) $$\omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

Die Winkelbeschleunigung ist dann

(8) $$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Der in der Zeit t überstrichene Winkel berechnet sich dann nach $\theta = ½\, \alpha t^2$. Die lineare Geschwindigkeit v des Massepunktes kann aus dem senkrechten Abstand r zur Drehachse mit v = ωr berechnet werden. Das Trägheitsmoment ist gegeben durch

(9) $$I = \Sigma\, m_i r_i^2$$

Es gibt die Trägheit eines Körpers bezüglich einer Rotationsbewegung an. Die Trägheit des Körpers versucht generell den aktuellen Bewegungszustand bei zu behalten. Während für eine Translationsbewegung die Masse m die Trägheit bzgl. der linearen Beschleunigung (F = ma) festlegt, reicht die Masse allein zur Beschreibung der Trägheit einer Rotation nicht mehr aus. Wichtig ist die Verteilung der Masse um die Drehachse (Gl. 9). Je weiter die Masse von der Drehachse entfernt ist, desto schwerer ist es, den Körper in Rotation zu versetzen. Trägheitsmomente einfacher Formen mit homogener Verteilung der Masse m lassen sich wie folgt bestimmen:

(10) $I = ½\, mr^2$ runde Stange mit Durchmesser 2r, Drehung um Längsachse

$I = ½\, m(r_i^2 + r_a^2)$ Hohlzylinder mit innerem u. äußeren Radius um Mittelachse

Weiterhin reicht zur Beschreibung der Rotation Die Kraft $\vec{F}$ allein nicht mehr aus. Wichtig ist hier, an welchem Hebelarm $\vec{r}$ und unter welchem Winkel greift die Kraft an. Deshalb wird das Drehmoment $\vec{M}$ durch folgendes Kreuzprodukt definiert

(11) $$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Mit den neuen Größen können wir jetzt das zweite newtonsche Axiom der Rotation stellt formulieren. Es beschreibt den Zusammenhang zwischen Trägheitsmoment, Winkelbeschleunigung und Drehmoment:

(12) $\vec{M} = I\vec{\alpha}$.

Wir sehen, im Prinzip sind Translations- und Rotationsbewegung gleich: das Drehmoment übernimmt die Rolle der Kraft F, das Trägheitsmoment die Rolle der trägen Masse m und die Winkelbeschleunigung ersetzt die lineare Beschleunigung a.

2.4. Energiebilanz des Maxwellrades

Unter Vernachlässigung der Reibung kann die Bewegung des Maxwellrads als Schwingung eines harmonischen Oszillators angesehen werden. Um hierfür die Bewegungsgleichung des Maxwellrades herzuleiten, betrachten wir seine Energiebilanz (Gl. 5, 6). Zu Beginn der Bewegung fällt das Rad der Masse *m*, aus der Höhe x_0 frei herunter. Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt $v = dx/dt = 0$:

(13)
$$E_{ges} = E_{pot} + E_{trans} + E_{rot}$$
$$mgx_0 = mgx + \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\right)^2$$

Dabei haben wir $\omega = v/r$ benutzt. $r = r_{Achse} + r_{Faden}$: effektiver Achsenradius. Dies ist eine Differentialgleichung, wobei die Lösung einer Differentialgleichung keine Zahl, sondern eine Funktion x(t) ist. In unserem Fall findet man nach längerer Rechnung (siehe Mathe II) die Lösung

(14)
$$x(t) = x_0 - \frac{1}{2}\frac{g}{1+\frac{I}{mr^2}}t^2$$

Das Maxwellrad vollführt also wie ein frei fallender Körper eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung, allerdings mit einer Beschleunigung, die um den Faktor $\left(1+\frac{I}{mr^2}\right)^{-1}$ geringer ist.

Fragen: Zulassung

- Wie sind Drehmoment, Hebelarm, Winkelbeschleunigung definiert?
- Wie ist das Trägheitsmoment definiert?
- Welche Energieformen werden verwendet, um die Bewegung des Maxwellrades zu beschreiben?
- Stellen Sie den Gleichungen für die lineare Bewegung

  $$\frac{dx}{dt} = v \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

  die entsprechenden Gleichungen Drehbewegung gegenüber.
- Wie lautet das 1. Newtonsche Gesetz im Bezug auf die Drehbewegung?

3. Durchführung

3.1 Wiegen, vermessen und skizzieren Sie das Maxwellrad. Möglicherweise ist das Rad aus mehreren Materialien zusammengesetzt. In diesem Fall kennzeichnen Sie die Komponenten. Messen Sie den Fadendurchmesser mehrmals und notieren Sie den Mittelwert. Notieren Sie alle Messgenauigkeiten.

3.2 Analysieren Sie mit Maßband und Stoppuhr die Bewegung des Maxwellrads: Lassen Sie das Maxwellrad aus maximaler Höhe x_0 bis zum Minimum x_{min} ablaufen. Messen Sie Fallhöhe $x_0 - x_{min}$ und Fallzeit t. Machen Sie 10 Wiederholungen bei gleicher Fallhöhe. Notieren Sie die Genauigkeiten der Messungen von x und t.

3.3 Bestimmen Sie die Winkelbeschleunigung α des Rades. Messen Sie dazu die Zeiten t, welche das Rad benötigt, um die Winkel $\theta = 4\pi, 8\pi, 12\pi, 16\pi$ zu überstreichen (je 5 Messungen). Notieren Sie die Messgenauigkeiten für t und θ.

3.4 Versuchen Sie etwas über die reale Dämpfung des „schwingenden" Maxwellrads herauszubekommen. Lassen Sie dazu das Maxwellrad 8 Auf- und Ab- Bewegungen durchführen und messen Sie die anfängliche Fallhöhe $x_0 - x_{min}$ und die periodischen Steighöhen $x_i - x_{min}$ (i =1,2,3...8).

4. Auswertung

4.1 Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Maxwellrads aus seinen Abmessungen und Dichte (Stahl: $\rho = 7{,}85 \cdot 10^3$ kg/m^3 Aluminium: $\rho = 2{,}7 \cdot 10^3$ kg/m^3). Eine Fehlerrechnung ist hier nicht notwendig.

4.2 Bestimmen Sie mit Gl. 14 aus den 10 Messungen von Fallhöhe und Fallzeit das Trägheitsmoment I. Führen Sie eine Fehlerfortpflanzungsrechnung für die Variablen: Fallhöhe x, Fallzeit t, Masse m und effektivem Achsenradius* r durch. Die Fallzeit wurde mehrfach gemessen. Der Fehler ist der statistische + die Messgenauigkeit der Uhr. Für die Fallhöhe $x_0 - x_{min}$, m und r werden die geschätzten systematischen Fehler in die Rechnung eingesetzt.
(effektiver Achsenradius $r = r_{Achse} + r_{Faden}$).

4.3 Vergleichen Sie gemessenes und berechnetes Trägheitsmoment. Diskutieren Sie Unterschiede.

4.4 Tragen Sie die Winkel θ über t^2 auf und bestimmen Sie α aus der Steigung der Ausgleichsgerade: $\theta(t^2)=1/2\ \alpha\ t^2$. Tragen Sie die Fehlerbalken für t^2 ein, indem Sie gemäß Fehlerfortpflanzung vorgehen und für $f = t^2 \quad \Delta f = (\partial f / \partial t)\Delta t = 2t\Delta t$ für jeden Wert berechnen.

4.5 Bestimmen Sie das am Maxwellrad angreifende Drehmoment M (Gl. 12).

4.6 Berechnen Sie aus 3.4 den Energieverlust pro Auf- / Ab-Bewegung des Maxwellrades und tragen Sie ΔE_{pot} über der Nr. i = 1, 2, …., 8 der Auf- / Ab-Bewegung auf.

4.7 Wie muss man ein langsam abrollendes und lange schwingendes Maxwellrad konstruieren?