



Physikalisches Praktikum I

Bachelor Physikalische Technik: Lasertechnik, Biomedizintechnik
Prof. Dr. H.-Ch. Mertins, M.Sc. M. Gilbert

SW02 Schwingende Saite am Monochord

(Pr_PhI_SW02_Monochord_6, 14.07.2014)

Name	Matr. Nr.	Gruppe	Team
1.			
2.			
Protokoll ist ok	<input type="radio"/>	Datum	Abtestat
Folgende Korrekturen nötig	<input type="radio"/>		
Teilnahme erfordert erfolgreiches Beantworten der Zulassungsfragen am Versuchstag (siehe Anleitung).			

1. Ziel

Stehenden Wellen bilden die Grundlage von akustischen Phänomenen, wie z.B. der schwingenden Gitarrensaiten. Andererseits sind sie entscheidend für das Verständnis moderner Technologien im Optikbereich (Laser, Röntgenspiegel) oder im Nanotechnologie- und Halbleiterbereich (Quantum-Dots / Wells). In diesem Praktikum beschäftigen wir uns mit dem Monochord, bei dem stehende Wellen auf einer Stahlsaite angeregt werden, um eine wichtige Materialkonstante, den Elastizitätsmodul zu bestimmen. Sie lernen zudem die Funktionsweise eines Oszilloskopes kennen.

2. Theorie

2.1 Stehende Welle

Führt man an einem an zwei Enden eingespannten Seil quer zur Seilrichtung eine ruckartige Bewegung durch, so pflanzt sich diese transversale Auslenkung (Störung) des Seiles in Längsrichtung fort. Dabei entsteht ein kurzer Wellenzug mit einer charakteristischen Ausbreitungsgeschwindigkeit c . Am festen Ende wird dieser Wellenzug reflektiert; er läuft zurück und überlagert sich mit den anderen Wellenzügen. Die Überlagerung aller Wellen kann zur Ausbildung einer stehenden Welle führen, wenn die Länge des eingespannten Seils und die Wellenlänge in einer bestimmten Beziehung zueinander stehen. Zur Beschreibung betrachten wir zwei identische Wellen $y_1(x, t)$ und $y_2(x, t)$ die aber in entgegengesetzte Richtung laufen

- (1) $y_1(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$ Hinlaufende Welle
 $y_2(x, t) = y_0 \sin(kx + \omega t)$ Rücklaufende Welle
- (2) y_0 Amplitude
 $k = 2\pi / \lambda$ Wellenzahl, $\lambda =$ Wellenlänge
 $\omega = 2\pi f$ Kreisfrequenz, f : Frequenz
 $T = 1/f$ Periode
- (3) $c = \lambda f$ Wellengeschwindigkeit

Die Überlagerung beider Wellen führt zu einer neuen, stehenden Welle $y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$

$$(4) \quad \underbrace{y'(x, t)}_{\text{Auslenkung}} = 2 \underbrace{y_0}_{\text{Amplitude}} \underbrace{\sin(kx) \cdot \cos(\omega t)}_{\text{Schwingungsterm}}$$

Für die Umformung haben wir folgende trigonometrische Formel benutzt:

$(\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta))$. Die resultierende stehende Welle y' unterscheidet sich durch zwei wesentliche Eigenschaften von einer klassischen, laufenden Welle y : der Ort x und die Zeit t sind entkoppelt, d.h. sie tauchen nicht mehr gemeinsam in einer Sinusfunktion auf. Die Amplitude $y_0' = 2y_0 \sin(kx)$ hängt vom Ort x ab – eine *laufende* Wellen hat dagegen für alle x die gleiche Amplitude y_0 . Die zeitliche Änderung der Amplitude wird beschrieben durch $\cos\omega t$. Sie ist in Abb. 1 für verschiedene Zeiten dargestellt. Ob sich eine stehende Welle überhaupt ausbildet, hängt von der Ortsabhängigkeit der Amplitude ab. Für bestimmte Orte x ist der Sinus immer Null, und für andere Orte ist er immer maximal. Diese Bereiche nennt man Schwingungsknoten bzw. Schwingungsbäuche.

Bei einer eingespannten Saite kommt es zur Ausbildung einer stehenden Welle wenn die halbe Wellenlänge oder ganzzahlige Vielfach von $\lambda/2$ genau die Saitenlänge L ergeben. Die einfachsten Fälle sind unten und in Abb. 2 skizziert:

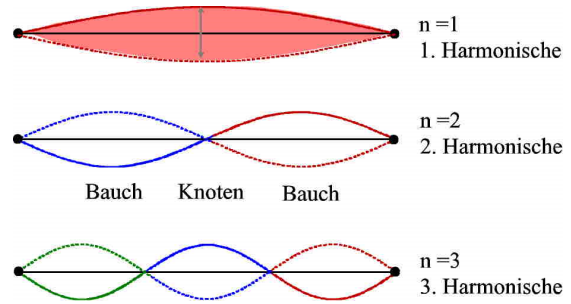


Abb. 2

Für Schwingungs-Knoten an den Befestigungspunkten gilt:

1 Bauch: einfachster Fall $\Rightarrow L = (1/2) \lambda = \lambda = 2L$

2 Bäuche: zweite Wellenform $\Rightarrow L = (2/2) \lambda$

3 Bäuche: dritte Form $\Rightarrow L = (3/2) \lambda$

Stehende Wellen bilden sich also immer dann aus, wenn gilt:

(7) Wellenlänge: $\lambda = 2L/n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

(8) Frequenz: $f = c/\lambda = nc/(2L), \quad n = 1, 2, 3, \dots$

$n = 1$: Grundschwingung (1. Harmonische)

$n = 2$: erste Oberschwingung (2. Harmonische) usw.

Im Versuch tritt die 1. Harmonische am deutlichsten hervor. Deren Frequenz wird mit dem Oszilloskop bestimmt.

Beachte: die Wellenlänge hängt nur von der schwingenden Seillänge L ab, die Frequenz (Ton) hängt bei fester Länge von der Wellengeschwindigkeit c ab weil $c = \lambda \cdot f$. Für das Stimmen einer Gitarrensaite bedeutet dies die Saitenspannung zu ändern, d.h. die Geschwindigkeit c anzupassen, die Gesamtlänge L der Saite bleibt unverändert.

2.2 Elastizitätsmodul der Stahlsaite

In diesem Praktikum wird der Elastizitätsmodul einer eingespannten, schwingenden Saite untersucht. Dazu wird die Spannung σ der Saite variiert, womit sich die Wellengeschwindigkeit c ändert:

(9) $c = \sqrt{\sigma/\rho}$.

Die Saite hat die Massendichte ρ . Das Hooksche Gesetz liefert den Zusammenhang zwischen der Länge l der Saite, der Spannung und dem Elastizitätsmodul E des Saitenmaterials

(10) $\sigma = \frac{F}{A} = \frac{E \Delta l}{l}$

wobei $\Delta l/l$ die relative Dehnung des Saitenelementes gegenüber dem spannungsfreien Zustand $\sigma = 0$ bedeutet. Dies entspricht genau der Dehnung einer Hookschen Feder. Dabei ist die Spannung σ gegeben durch die Kraft F , die auf den Querschnitt A der Saite wirkt.

Aus Gl. 9, 10 folgt für die Geschwindigkeit der Welle

$$(11) \quad c^2 = \frac{E \Delta l}{\rho l} \quad \text{Mit Gl. 8 erhalten wir die Frequenz der stehenden Welle}$$

$$(12) \quad f^2 = \frac{E \Delta l}{4L^2 \rho l}$$

Die Messung der Längen L , l , Δl und der Frequenz f ermöglicht daher zunächst prinzipiell die Bestimmung des Elastizitätsmoduls E . Beachte dabei die Definitionen der Längen: L ist die Länge der schwingenden Saite, l ist eine beliebiges Teilstück der Saite, welches um Δl gestreckt wird.

Beachten Sie: wir haben hier die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Seilwelle auf der flexiblen Saite betrachtet. Etwas anderes ist die Schallgeschwindigkeit in einem festen Körper. Sie hängt von dem Typ der Welle ab.

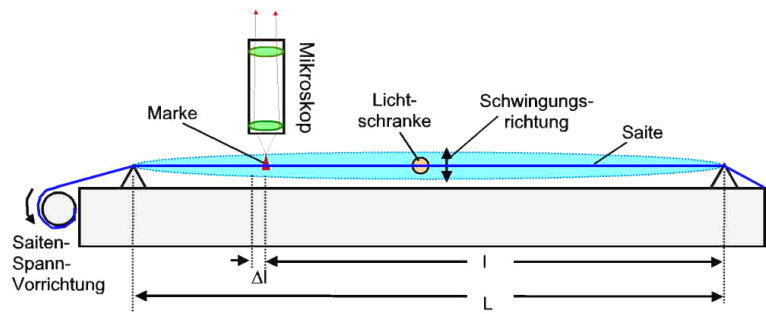
Bei Longitudinalwellen gilt $c = \sqrt{E/\rho}$ und bei Transversalwellen gilt $c = \sqrt{G/\rho}$ mit Schermodul G .

Fragen: Zulassung

- Was ist eine Welle? Durch welche Formel wird sie beschrieben?
- Was sind Wellenlänge, Frequenz, Schwingungsdauer?
- Was ist eine stehende Welle? Wie entsteht sie?
- Was ist das Elastizitätsmodul? Wie lautet das Hooksche Gesetz für eine Schraubenfeder, wie für eine gespannte Saite?
- Wie funktioniert ein Oszilloskop prinzipiell?
- Was wird eingestellt? Was wird gemessen?

3. Durchführung

Die Abbildung zeigt die Skizze des Versuchsaufbaus. Um den relativen Fehler des zu messenden Elastizitätsmoduls E möglichst klein zu halten, muss die Länge Δl gegen über den anderen Größen mit vergleichsweise hoher Genauigkeit gemessen werden. Im



Aufbau wird daher die Längenänderung Δl mit einem Mikroskop bestimmt. Als Markierung auf dem Draht nutzen wir einen der natürlichen Oberflächenfehler des Drahtes. Die Frequenz der Saitenschwingung wird mit Hilfe einer einfachen Gabellichtschranke gemessen, deren Ausgangssignal auf einem Oszilloskop aufgezeichnet wird. Die negativen „Peaks“ zeigen jeweils den Durchgang der Saite an. Die erste Frequenzmessung soll bei einer möglichst niedrigen Saitenspannung durchgeführt werden, so dass im Folgenden Spannung und Frequenzen gesteigert werden können. Beachten Sie die vorgegeben Werte, damit die Saite nicht reißt! Betreuer fragen!

- 3.1 Bestimmen Sie die Längen L und l incl. der Messgenauigkeit. Ermitteln Sie die Massendichte ρ der Saite. Nutzen Sie Literaturwerte für Stahl.
- 3.2 Die Saite wird zu niederfrequenter Schwingung angeregt. Dabei muss sie per Hand nach oben ausgelenkt werden! Seitliche Auslenkungen verfälschen die Messung! Die elektrische Spannung, welche die Lichtschranke (anschalten!) gibt, wird mit Hilfe des Oszilloskops aufgezeichnet. Beachten Sie, dass die Frequenz der Saite halb so groß wie die angezeigte Frequenz ist (warum?).

Fertigen Sie zur Datenerfassung und Auswertung eine Tabelle an :

Nr.	Perioden (dargestellt am Oszilloskop)	Für Perioden benötigte Kästchen	Time/div (ms) (Einstellung am Oszilloskop)	Berechnen T (ms)	Berechnen f (Hz)	Schätzen Δf (Hz)
1	6	9,6	20	$(20 \times 9,6) : 6$ = 32	$1 : 0,032$ = 31	
2						
usw						

Die Werte der ersten Zeile stellen ein Beispiel dar.

- 3.3 Erhöhen Sie die Saitenspannung in 10 Schritten indem Sie die Saite je um $\Delta l = 0,2$ mm spannen (Achtung: kleinstes Intervall auf der Skala $0,02\text{mm} = 20 \mu\text{m}$. Die gesamte Längenänderung darf nicht größer als 4 mm werden!). Bestimmen Sie die Längenänderung mit dem Mikroskop und die Frequenz mit dem Oszilloskop. Wählen Sie für jede Längenänderung eine neue Marke, die Sie gut ablesen können. Hinweis: Das Bild im Mikroskop ist spiegelverkehrt.
- 3.4 Schätzen Sie den systematischen Messfehler der Längenmessungen ab.

4. Auswertung

- 4.1 Geben Sie die in 3.1 gemessenen Daten an.
- 4.2 Erklären Sie, welche physikalischen Größen beim Stimmen einer Gitarre geändert werden.
- 4.3 Beschreiben Sie in eigenen Worten was und wie Sie messen, um den Elastizitätsmodul zu bestimmen.
- 4.4 Tragen Sie das Quadrat der Frequenz f^2 über der Längenänderung Δl auf und fügen Sie Fehlerbalken ein. Führen Sie dazu die Fehlerfortpflanzungsrechnung $\Delta(f^2) = 2f \Delta f$.
- 4.5 Bestimmen Sie den E-Modul aus der Steigung (siehe Gl. 12) und vergleichen Sie mit Literaturwerten. Schätzen Sie anhand der Fehlerbalken in dem Diagramm den Steigungsfehler und damit den Fehler für E ab.
- 4.6 Tragen sie die Wellengeschwindigkeit c über der relativen Längenänderung $\Delta l / l$ auf. Keine Fehlerrechnung.