



Physik I

Bachelorstudiengänge
Wirtschaftsingenieurwesen Physikalische Technologien,
Technische Orthopädie,
Chemieingenieurwesen & Wirtschaftsingenieurwesen Chemietechnik

Vorlesung:

Grundlagen der Physik – Optik – Mechanik - Elektrodynamik
Das Script (unter www.fh-muenster.de/physiklabor), soll Ihnen die Mitschrift ersparen.

Achtung: das Skript ersetzt nicht den Besuch der Vorlesung.

Die Beispielaufgaben werden in der Vorlesung vorgerechnet und sind von Ihnen im Skript nachzutragen

Die Vorlesung orientiert sich an den Büchern:

„Physik“ von Haliday,

„Prüfungstrainer Experimentalphysik“ von Mertins, Gilbert

F2

www.fh-muenster.de/physiklabor: Alle wichtigen Informationen wie die Lösungen der Hausaufgaben, Praktikumsanleitungen, Formelsammlungen, die Bilder in höherer Auflösung und andere Hinweise.

Kapitel**Geometrische Optik**

Brechung & Reflexion, Dispersion
Optische Abbildung, Geräte

Mechanik

Kinematik, Vektoren
Kraft und Bewegung
Arbeit, Energie, Leistung, Energieerhaltung
Teilchensysteme & Impuls, Stoßprozesse
Rotationsbewegungen, Drehmoment, Drehimpuls
Fluid-Dynamik

Schwingungen & Wellen

Harmonische Schwingung,
Erzwungene Schwingung, Dämpfung, Resonanz
Wellen, Interferenz, Stehende Wellen

Elektrostatik & Dynamik

Elektrische Ladung, Elektrische Felder
Elektrisches Potenzial, Kapazität
Strom & Widerstand
Magnetfelder
Induktion

Wellenoptik

Elektromagnetische Wellen, Polarisation
Interferenz, Beugung am Spalt & Gitter
Spektrometer, Einzelspalt,
Auflösungsgrenzen
Laser

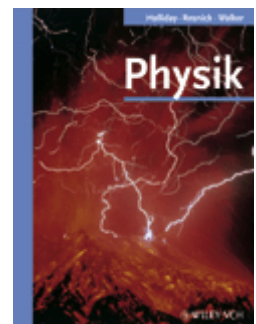
F2

Literatur

Haliday, Resnick Walker „Physik“, Wiley VCH-Verlag

Tipler, „Physik“, Spektrum Akadem. Verlag

Mertins, Gilbert „Prüfungstrainer Experimentalphysik“, Spektr. Akadem. Verl.



1. Maßeinheiten

Um einen Vorgang zu verstehen und mitzuteilen, muss man ihn beschreiben und mit etwas allgemein Bekanntem vergleichen.
Dazu sind Maße und Messvorschriften nötig.

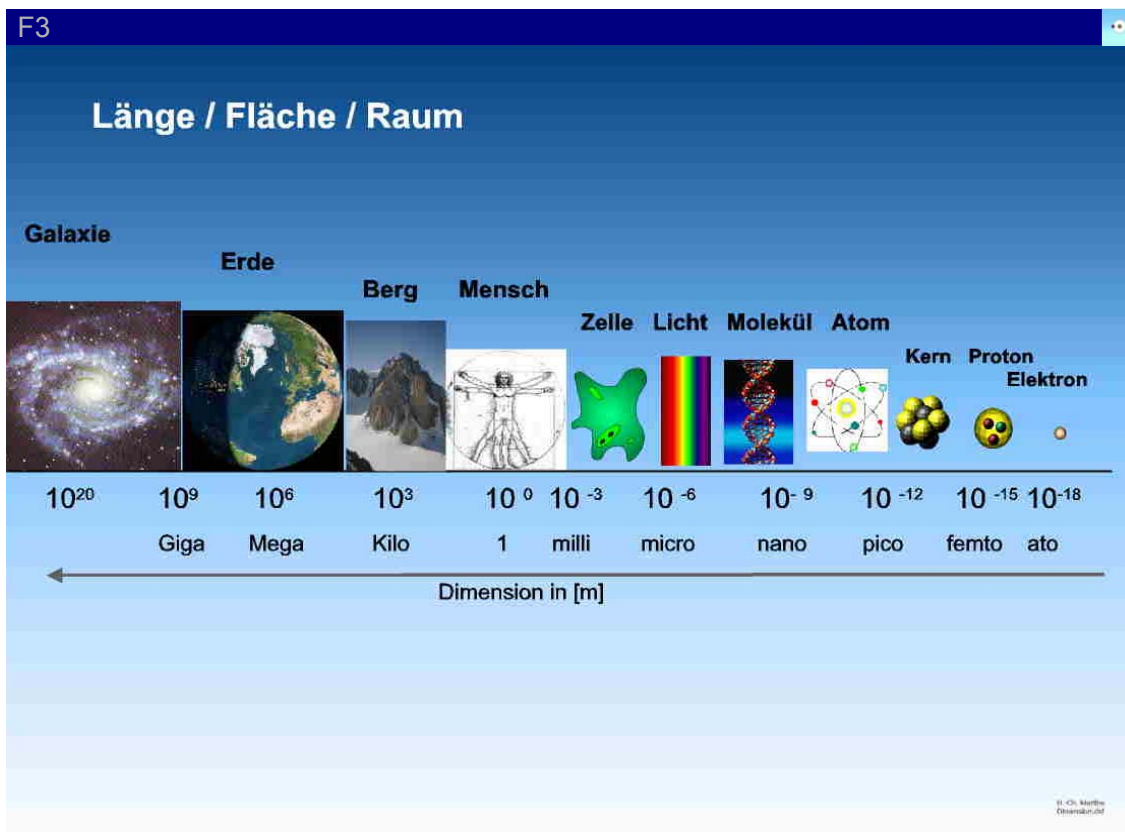
- 1) Vergleich einer Größe mit einem „Normal“ z.B. Länge eines Stabes (Ur- meter)
- 2) Normal hat eine Einheit, z.B. Meter [m]
- 3) weltweit gültig, für alle zugänglich
- 4) unabhängig vom Beobachter u. äußeren Umständen, unveränderlich
- 5) Verfahren entwickeln, um *alle* entsprechenden Größen mit dem Normal zu vergleichen

1.1 Internationales Einheitensystem System (SI)

F3

<u>Größe</u>	<u>Einheit</u>	<u>Zeichen</u>
Länge	Meter	m
Zeit	Sekunde	s
Masse	Kilogramm	kg

Bilden Basis für weitere Einheiten, Geschw. [v] = m/s etc.
1971 festgelegt, entsprechen menschlichem Maßstab,
weitere Einheiten später: Temp [K], elektr. Ladung [C]



1.2 Länge

Definition des Meters [m]

Präzision

1792:	1m = (Entfernung Nordpol – Äquator)/(10.000.000)	?
	1m = Urmeter, eingraviert in Platin-Iridium Stab (Paris)	10-4 m
1960	1m = 1.650.763- fache der Wellenlänge Licht von 86Kr	~10-9 m
1983	1m = Strecke von Licht im Vakuum in 1/299.792.458 s	< 10-9 m

1.3 Zeit

F4/5

jedes Zeitnormal muß definieren können:



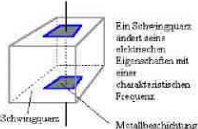


- wann ist ein Ereignis passiert ? Rückdatierung möglich
- über welche Zeitdauer fand ein Ereignis statt

F4

Zeitmessung

Uhr	Dauer	Prozess: einmaliger Ablauf
Sanduhr Wasseruhr	~ 1 min	

F5

Uhr	Dauer	Prozess periodische Wiederkehr
Sonnenuhr	24 h,	Erdrotation 
Pendeluhr	~1s	Schwingung, mechanisches Pendel 
Quarzuhr	~10 ⁻⁷ s	Schwingung, elektro-mechanisch  Ein Schwingquarz besitzt seine elektromechanischen Eigenschaften mit einer charakteristischen Frequenz. Schwingquarz Metallbeinhaltung 
Atomuhr	< 5x10 ⁻¹² s	¹³³ Cs-Lichtemission, Schwingungsdauer der Lichtwelle 

1.4 Masse

F6

Urkilogramm Platin-Iridium Zylinder (Paris), Kopie weltweit verschickt
 Masse des Kohlenstoff **12C**-Atoms: $m = 12u$

$$u = 1.6605402 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

F6

Urkilogramm



http://www.wdr.de/tv/quarks/sendungsbeitraege/2005/1206/002_schwerkraft.jsp?pbild=1

1.5a Abgeleitete Einheiten

Physikalische Größe	Formelzeichen	Maßeinheit	
Frequenz	f, ν	$\frac{1}{s} = Hz$	Hertz
Kreisfrequenz	ω	$\frac{rad}{s}$	
Geschwindigkeit	v	$\frac{m}{s}$	
Beschleunigung	a	$\frac{m}{s^2}$	
Kraft	F	$kg \cdot \frac{m}{s^2} = N$	Newton
Druck	p	$\frac{kg}{ms^2} = \frac{N}{m^2} = Pa$	Pascal
Arbeit, Energie	W, E	$kg \cdot \frac{m^2}{s^2} = Nm = J$	Joule
Leistung	P	$kg \cdot \frac{m^2}{s^3} = W$	Watt
Wärme	Q	$kg \cdot \frac{m^2}{s^2} = Nm = J$	Joule
elektrische Ladung	Q_e	$A \cdot s = C$	Coulomb
elektrische Spannung	U	$\frac{kgm^2}{As^3} = \frac{W}{A} = V$	Volt
elektrischer Widerstand	R	$\frac{kgm^2}{A^2 s^3} = \frac{V}{A} = \Omega$	Ohm
Kapazität	C	$\frac{As^2}{kgm^2} = \frac{C}{V} = F$	Farad
magnetische Induktion	B	$\frac{kg}{As^2} = T$	Tesla

1.5b Einheiten umwandeln

Beispiel:.

Pheidippides läuft 490 v.Ch. von Marathon nach Athen und überbringt den Sieg der Griechen über die Perser. Er läuft mit der Geschwindigkeit 23 Riden/h.

1 Ride = 4 Stadien, 1 Stadion = 6 Plethren, 1 Plethron = 30.8 m.

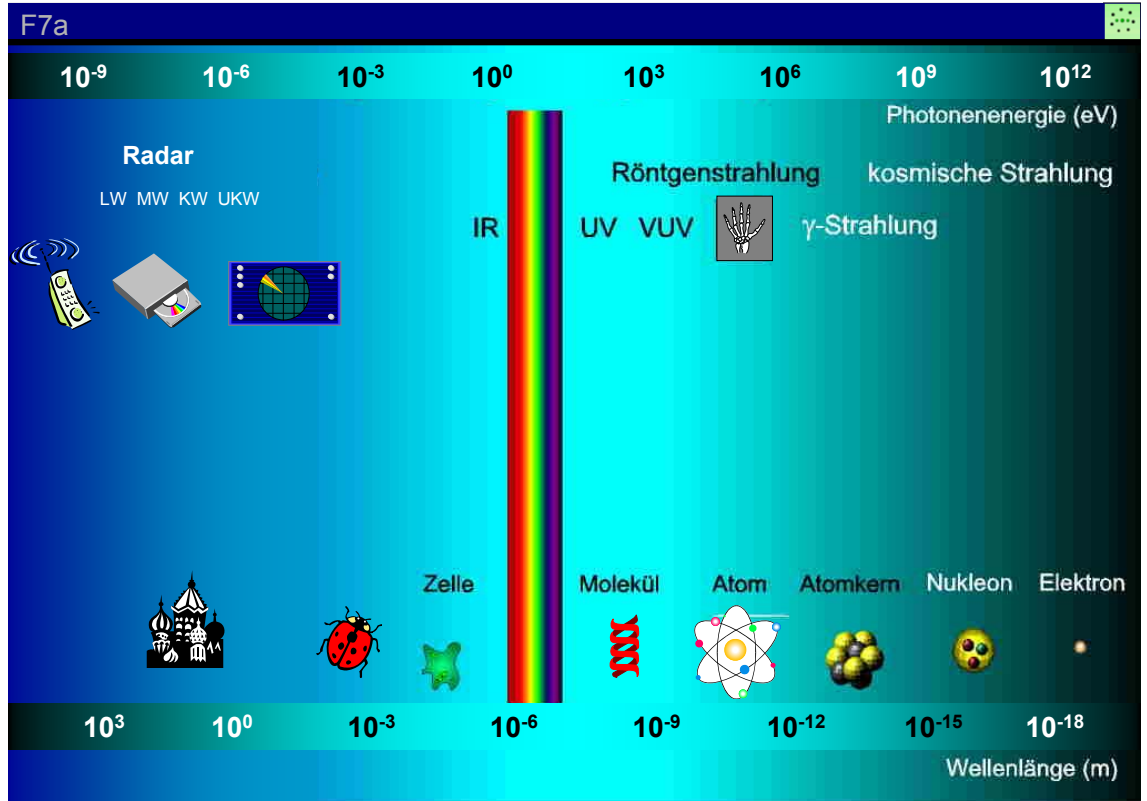
Frage Wie schnell lief er in m/s ?

2. Optik

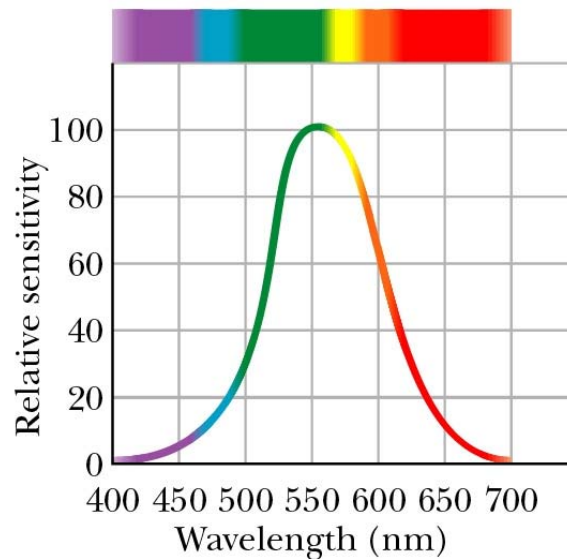
2.1 Elektromagnetische Wellen

F7a/b

Licht ist eine elektromagnetische Welle (EM-Welle), wovon nur ein Teil des Spektrums ist für das menschliche Auge sichtbar ist.



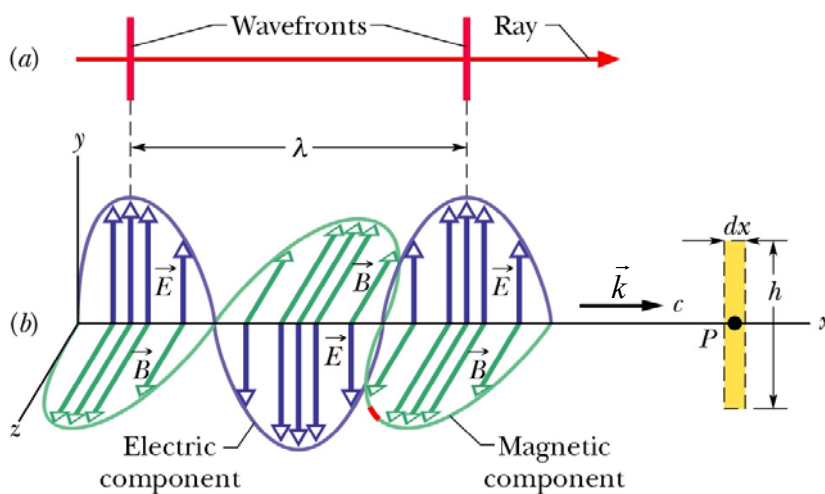
Sichtbarer Teil des Spektrums



2.1.1 Eigenschaften

Elektrisches (E) und magnetisches (B) Feld wechseln periodisch ihre Richtung
Wir betrachten nur die ebene Welle, d.h. keine Krümmung der Front

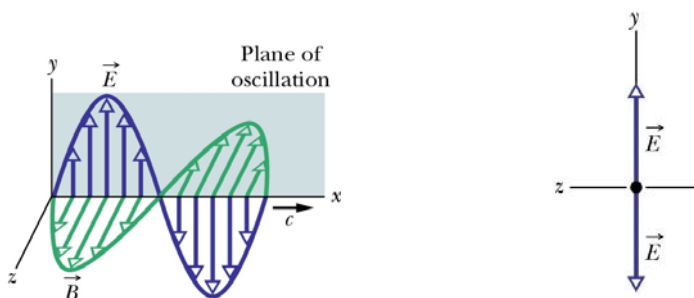
- transversal: $\vec{E} \perp \vec{c}$, $\vec{B} \perp \vec{c}$, d.h. senkrecht auf Ausbreitungsrichtung $\vec{E} \perp \vec{B}$
- kann sich ohne Medium ausbreiten
- Lichtgeschwindigkeit $c = 299\,792\,459$ m/s
- Wellenlänge gibt Farbe bzw. Energie des Lichtes an
sichtbarer Anteil $400\text{ nm} < \lambda < 700\text{ nm}$ (von blau bis rot)



2.1.2 Polarisation

linear polarisiert E -Feld schwingt immer in gleicher Ebene

Polarisationsrichtung = E -Feldrichtung



2.1.3 Erzeugung

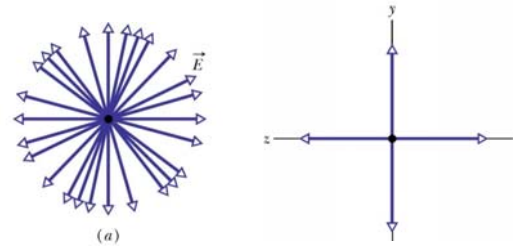
- Thermische angeregte Strahlung in schwarzem Körper (siehe Physik II),
Sternen, Sonne
- Quantenmechanisch: Übergang zwischen Energieniveaus in Atomen
(siehe Physik II)
- Beschleunigte elektrische Ladung strahlt EM Wellen ab
(Röntgenröhre, Antenne)

2.1.4 Hertzscher Dipol

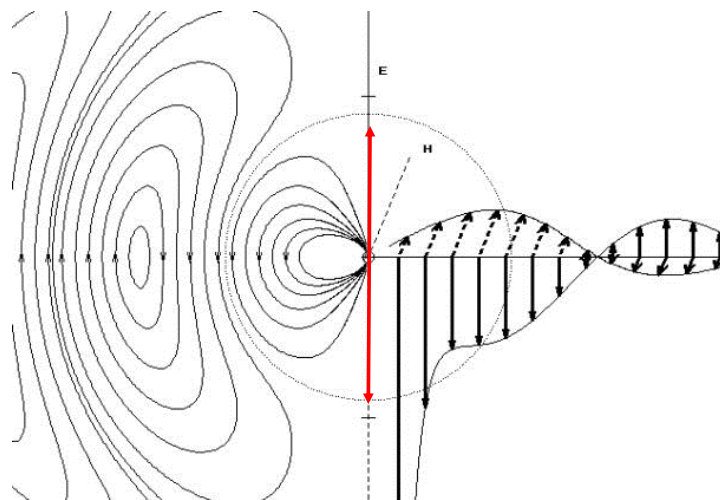
F9

Ist im Prinzip eine Antenne, Erstrahlt linear polarisierte Wellen ab
Wellen immer Quer zur Antenne, aber nie längs der Antenne

Unpolarisiert	viele Wellenzüge mit <u>beliebigen</u> Schwingungsebenen der E-Felder Vektorielle Aufteilung aller Komponenten in gleiche x- y-Anteile
Sonne, Glühlampe	unpolarisiert, da statistisch emittierte Wellenzüge jeder Polarisation
Polarisationsmessung	Beweis, dass Licht transversale EM Welle ist



F9

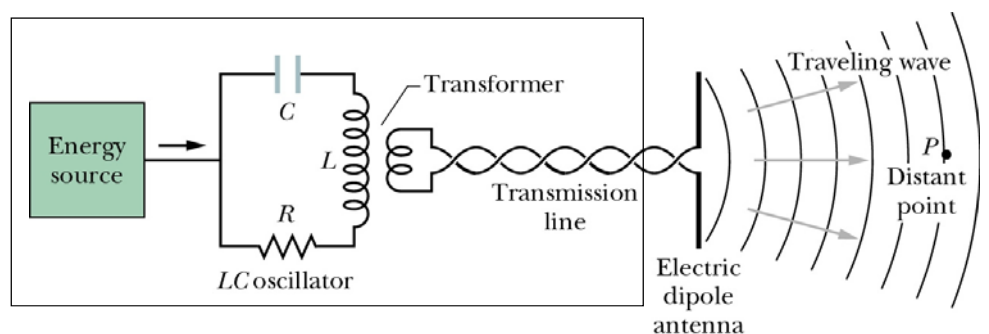


F10

Bsp. Antenne / Mikrowellensender

- Oszillierender elektrischer Strom in Antenne
- LC-Schwingkreis und Energieversorgung
- Antenne wird induktiv eingekoppelt (Details später im Teil Elektrodynamik)

F10



2.1.5 Polarisationsfilter

Polaroidfolien: Kunststoffe mit parallel angeordneten, langkettigen Molekülen

Prinzip: Absorption des lin. Pol. Lichtes, wenn E -Feld parallel zu Molekülen
 Langes Molekül wirkt wie Hertzscher Dipol, Anregung der Elektronen
 Wellen mit E quer zum Molekül werden nicht absorbiert

Nomenklatur: Pol-Filter absorbiert Welle mit E quer zur Polarisationsrichtung des Filters

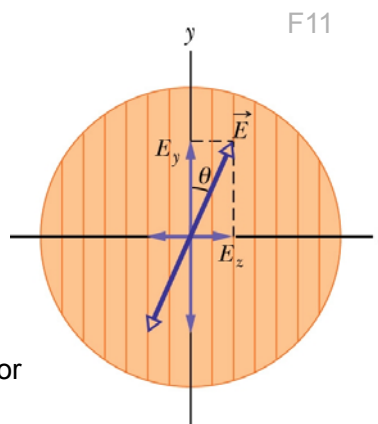
Exp. Mikrowellensender und Drahtnetz, 2 Polfilter

Polarimeter

Aufbau zur Messung von Effekten mit linear polarisiertem Licht,
 Anwendung: Biologie, Chemie, Physik

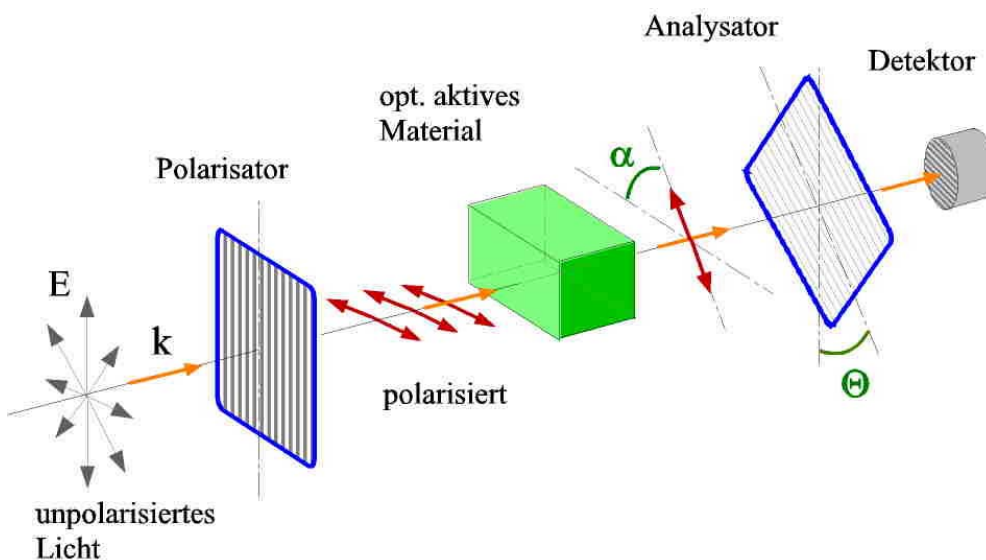
Linear polarisiertes Licht fällt auf Pol-Filter unter Pol-Winkel θ

- Durchgelassene Komponente $E_x = E_0 \sin\theta$
- $I = E_x^2 = E_0^2 \sin^2\theta$ Intensität hinter Analysator



Messung: Polarisator & Analysator 90° verdreht → Lichtabsorption
 Probe steht in der Mitte, dreht die Polarisation des Lichtes
 → Analysator drehen, bis wieder Lichtauslöschung
 → Drehwinkel: Drehung der Polarisation durch die Probe

Polarisationsmessung



2.2 Strahlenoptik

2.2.1 Reflexion & Brechung

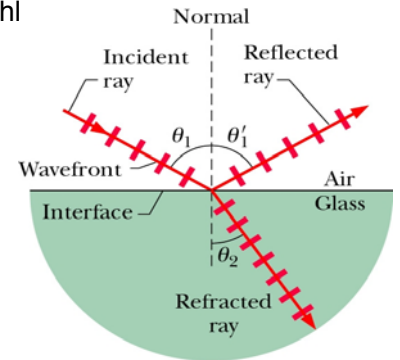
Geometrische Optik: Lichtausbreitung wird durch Lichtstrahlen behandelt

Betrachte Übergang zwischen zwei Medien (z.B. Luft / Glas)

Einfallsebene: definiert durch einfallenden, reflektierten und gebrochenen Strahl

Normale: senkrecht zur Grenzfläche

Lichtweg: von Medium 1 nach Medium 2



Reflexion: Einfallswinkel = Ausfallswinkel

$$\theta_1 = \theta_1'$$

Exp: Reflexion / Brechung am Glasmodell

Brechung:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \quad \text{Snellius-Gesetz}$$

F12

Brechungsindex: n_1, n_2

Materialkonstanten, ohne Einheit; Interpretation als optische Dichte des Mediums

$$n = \frac{c}{c_{mat}}$$

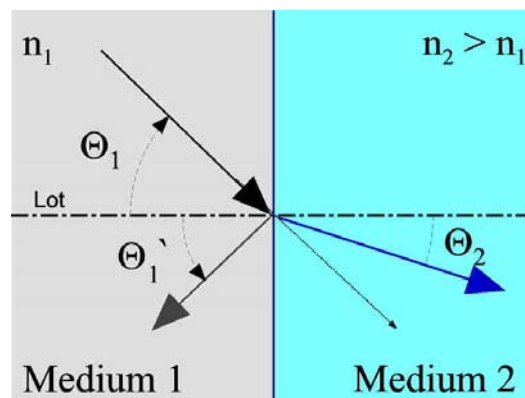
c : Lichtgeschwindigkeit, im Vakuum / Material

c_{mat} : Lichtgeschwindigkeit im Material (ist kleiner, da $n > 1$)

Material	Vakuum	Luft	Quarzglas	Kronglas	Diamant
n (589 nm)	1	1,00029	1,46	1,52	2,42
c (m/s)	$3 \cdot 10^8$	$3 \cdot 10^8$	$2,05 \cdot 10^8$	$1,97 \cdot 10^8$	$1,24 \cdot 10^8$

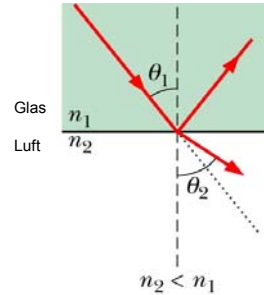
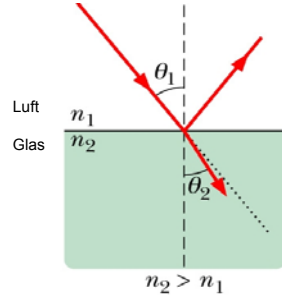
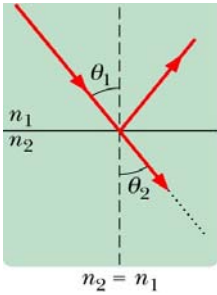
F12

Brechung / Reflexion



Brechungsfälle: $\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1$

- 1) $\theta_1 = \theta_2$ $n_1 = n_2$ \rightarrow keine Brechung
- 2) $\theta_1 > \theta_2$ $n_1 < n_2$ \rightarrow Brechung zum Lot hin
- 3) $\theta_1 < \theta_2$ $n_1 > n_2$ \rightarrow Brechung vom Lot weg



Exp: Lichtbrechung / Reflexion Fälle 1), 2), 3) Totalreflexion,

2.2.2 Totalreflexion

F13a/b/c

Lichtübergang vom optisch dichteren ins dünnere Medium
(z.B. Wasser (n_1) \rightarrow Luft (n_2))

Grenzwinkel $\theta_1 > \theta_{krit}$

\rightarrow Totalreflexion, Licht geht nicht vom dichten ins dünne Medium

$$\sin \theta_1 = \frac{n_2}{n_1} \sin \theta_2$$

$$\rightarrow \sin \theta_{krit} = \frac{n_2}{n_1} \sin 90^\circ = \frac{n_2}{n_1}$$

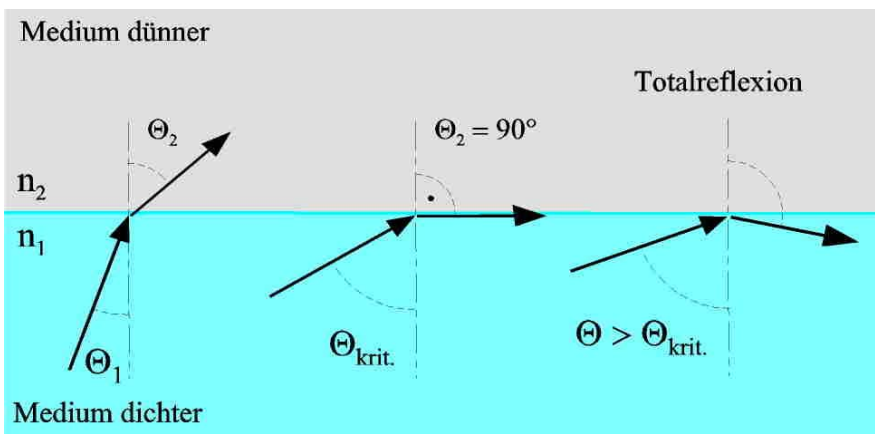
Wenn Grenzwinkel überschritten wird, d.h

$\theta_1 > \theta_{krit}$ \rightarrow Totalreflexion

Exp: Totalreflexion, Lichtleiter, Fasern, Führung im Wasserstrahl !

F13c

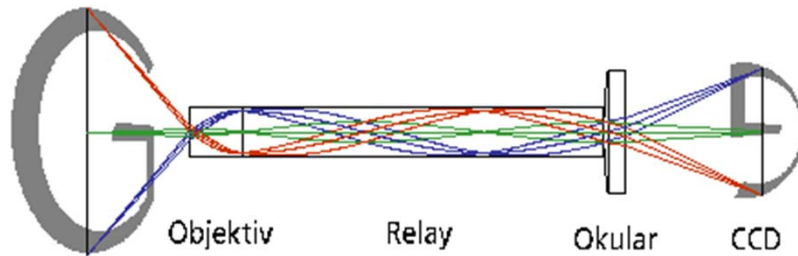
Totalreflexion



Anwendung:

F14a/b

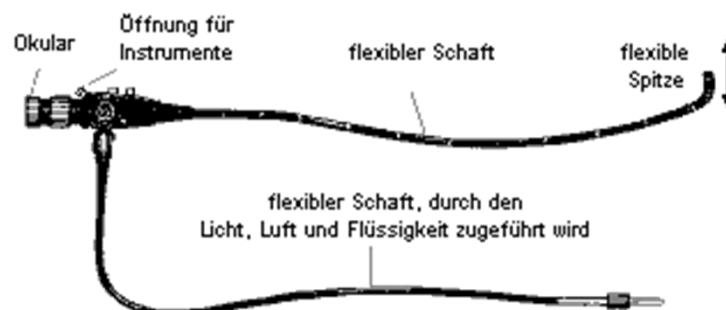
Lichtleiter in der Medizintechnik, Magenspiegelung,
 beachte: Lichtleiter ist außen nicht notwendigerweise verspiegelt !!
 Halbleiterlaser: Strahlführung durch Brechungsindexprofil,
 Datenübertragung



F14a

Lichtleitung durch Totalreflexion

F14b

Endoskopie**Lichtleitung durch Totalreflexion**

2.2.3 Dispersion

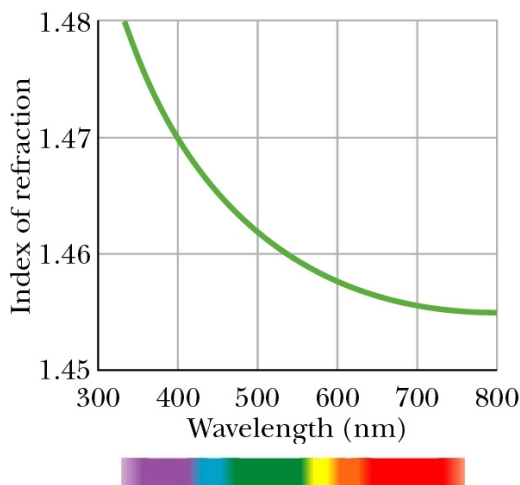
F15

- Lichtfarbe: definiert durch Wellenlänge des Lichtes
- Weißes Licht: Summe aller sichtbaren Komponenten
- Dispersion: „Brechungsindex des Mediums (nicht bei Vakuum) hängt von der Wellenlänge des Lichtes ab“.

Exp: chromatische Dispersion am Glasprisma

F15

Dispersionskurve für Quarzglas



Dispersion →

$$n(\lambda): \quad n_2(\text{blau}) > n_2(\text{rot})$$

F16/17

Snells Gesetz:

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1$$

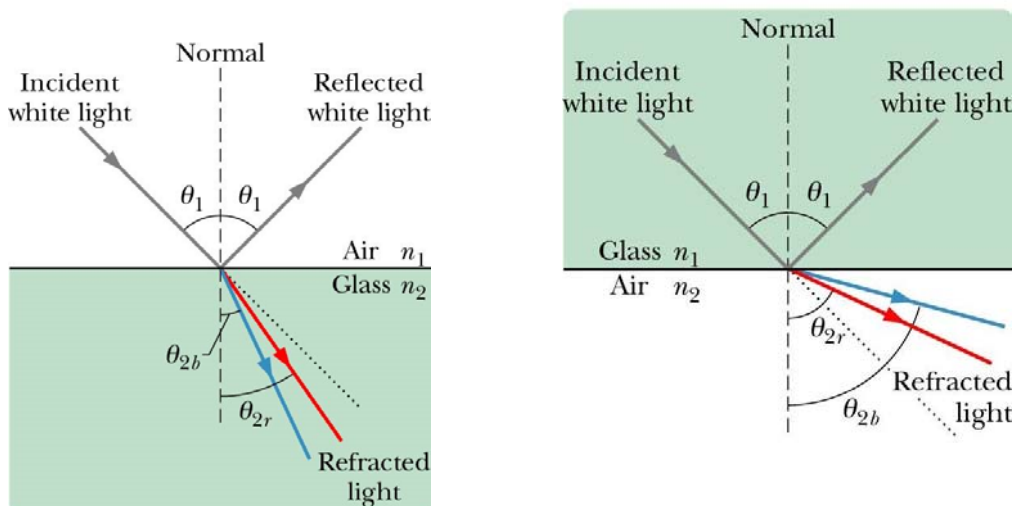
→ θ_2 wird mit zunehmendem Brechungsindex n_2 kleiner.

Übergang:

Luft $n_1 = 1$ → Glas $n_2 > 1$

$$\theta_2(\text{blau}) < \theta_2(\text{rot})$$

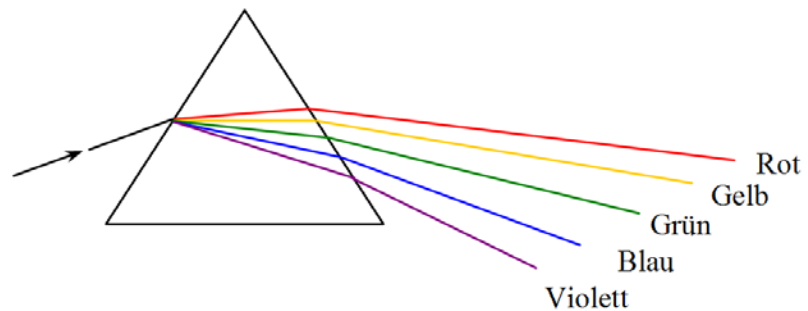
F16



2.2.3 Dispersion

Exp: chromatische Dispersion am Glasprisma

F17



2.2.4 Brewster - Polarisatoren

(Sir D. Brewster 1812)

„Wird Licht unter dem Brewsterwinkel reflektiert, so ist es teilweise polarisiert mit der Schwingungsrichtung des E-Feldes senkrecht zur Einfallsebene.“

Prinzip: Reflexion = Strahlung der Moleküle wie Hertzscher Dipol
Anregung der Moleküle durch einfallendes E-Feld
Hertzscher Dipol strahlt nicht in Längsrichtung wenn :

F18/19

$$\theta_B + \theta_2 = 90^\circ$$

→ kein E-Feld parallel sondern nur senkrecht zur Einfallsebene

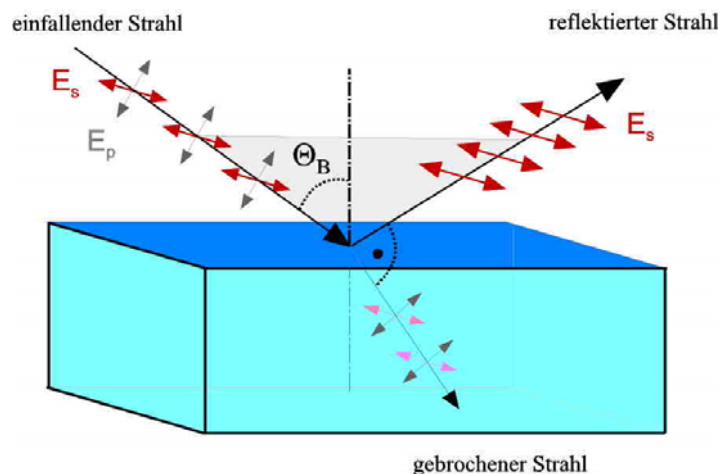
$$\sin \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \sin \theta_2 = \frac{n_2}{n_1} \sin(90^\circ - \theta_B) = \frac{n_2}{n_1} \cos \theta_B$$

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{Anwendung: Brillen mit Polfilter})$$

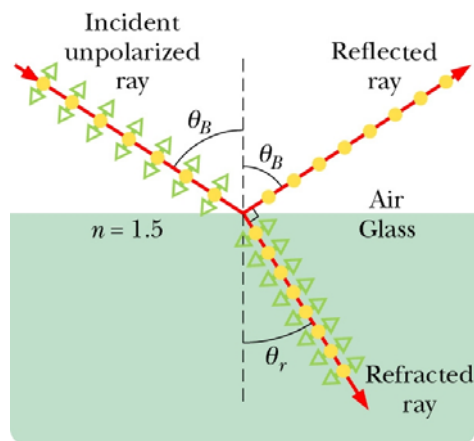
Exp: Polfilter kann Reflexion an Glasplatte auslöschen

F18

Brewster-Winkel



Brewster-Winkel



- Component perpendicular to page
- ↔ Component parallel to page

Bsp. Blaues Licht mit $\lambda=400$ nm fällt senkrecht auf rechtwinkliges Quarzglasprisma mit $n = 1,455$ (Prisma in Luft).

Frage: Wie groß darf ϕ sein, damit an der Seite ac Totalreflexion auftritt?

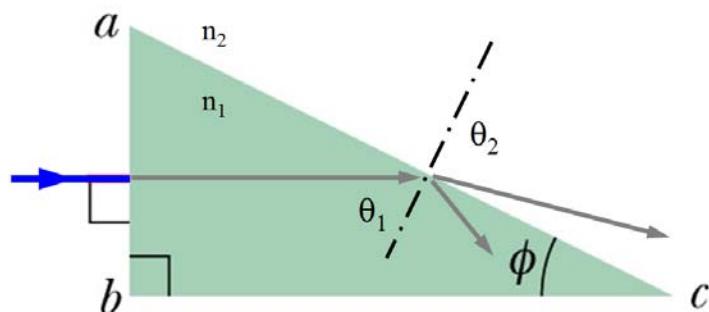
Lsg. Totalreflexion heißt: $\theta_2 \geq 90^\circ$ → F20

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1}$$

Brechungsgesetz was ist n_1 , wo n_2 ?

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2 \frac{n_2}{n_1} = \sin \theta_2 \frac{1}{n_1} = 1 \frac{1}{1,455}$$

$$\theta_1 \geq 43,4^\circ \quad (\text{mit } \sin 90^\circ = 1) \quad \phi = 90^\circ - \theta_1 \leq 46,6^\circ$$



Frage: Was passiert, wenn einfallendes Licht nicht blau sondern weiß ist?

- Lsg. a) weißes Licht setzt sich aus allen Farben d.h. Wellenlängen zusammen
 b) Brechungsindex des Prismas hängt von Wellenlänge ab (Dispersion)

$$n_1(\lambda) \rightarrow \theta_2(\lambda)$$

- wir brauchen die Dispersionskurve für Quarzglas (siehe 3.3)
 → n ist für 400 nm (blau) am größten
 → für alle anderen Farben ist θ_1 zu klein um Totalreflexion zu erzeugen
 → nur blau wird total reflektiert, durchgehender Strahl hat alle Farben außer blau

2.3 Optische Abbildung

2.3.1 reelle / virtuelle Bilder

Bildtypen zur Beschreibung von Abbildungsoptiken (Spiegel, Lupe, Fernglas, Mikroskop):

- a) Reell: lassen sich wirklich auf einer Fläche (Photoplatte) abbilden
 b) virtuell: entstehen durch Verlängerung der Strahlen, die zum Betrachter laufen; sind aber nicht dort abbildbar, wo sie erscheinen

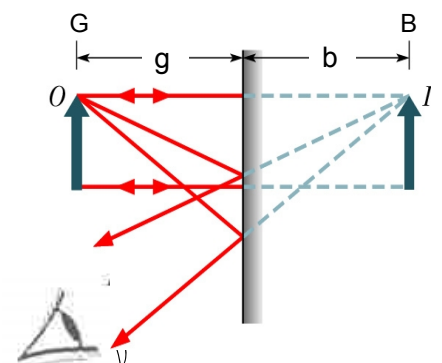
Exp: Spiegel, Foto hinter dem Spiegelglas nicht möglich

2.3.2 Ebene Spiegel

Reflexion des Strahls in eine Richtung (keine diffuse Streuung)
 Bildkonstruktion des leuchtenden Gegenstandes:

Gegenstand: G: Größe (Höhe), g: Gegenstandsweite
 Bild B: Größe des Bildes b: Bildweite

- i) betrachte 2 Strahlen eines Objektpunktes, die das Auge erreichen
 ii) verlängere reflektierte Strahlen bis zum Schnittpunkt → virtuelles Bild
 iii) beachte spezielle Optik, hier: ebener Spiegel: $-b = g$



2.3.3 Kugelspiegel (sphärisch)

Ausschnitt einer verspiegelten Kugel mit Radius r

Konkav:

nach innen gewölbt zum Krümmungsmittelpunkt C

Brennpunkt: Parallele Strahlen werden in F gebündelt, reell

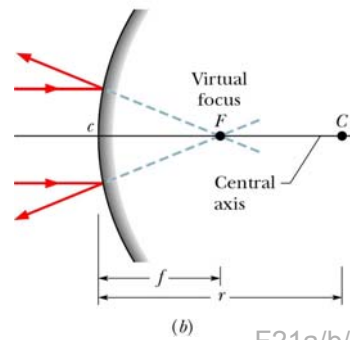
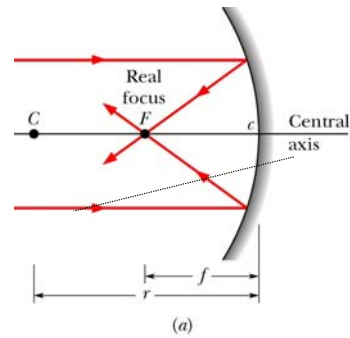
Brennweite: $f = \frac{1}{2} r$

Konvex:

nach außen gewölbt

Brennpunkt: F Verlängerung der reflektierten Strahlen hinter dem Spiegel

Brennweite: $f = -\frac{1}{2} r$ neg., virtueller Fokus

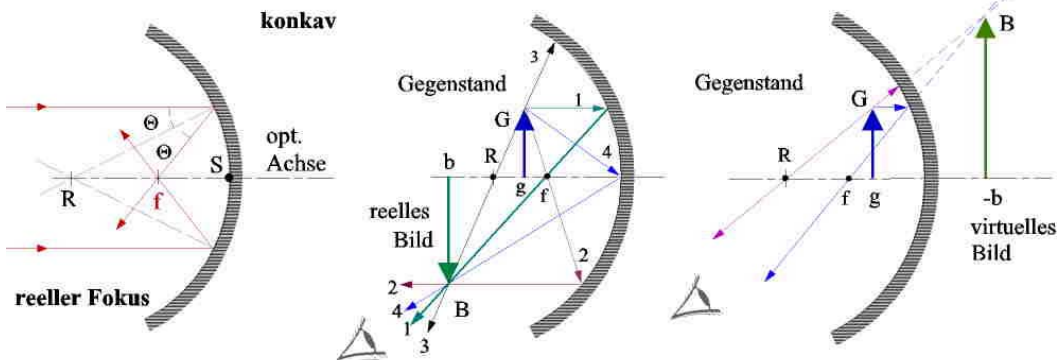


F21a/b/c

Exp: parallele Lichtstrahlen an konkav / konvexem Spiegel reflektieren,

F21c

Reflexion am Hohlspiegel



2.3.4 Abbildung mit dünnen Linsen

F22a/b

Grundlagen

wir betrachten nur dünne Linsen, d.h. Materialdicke klein gegen Brennweite

Sammel-Linse	(konvex)	Zerstreuungs-Linse (konkav)
Geometrie	Mitte dicker	Mitte dünner
Brennpunkt	reell	virtuell
Brennweite	$f > 0$	$f < 0$

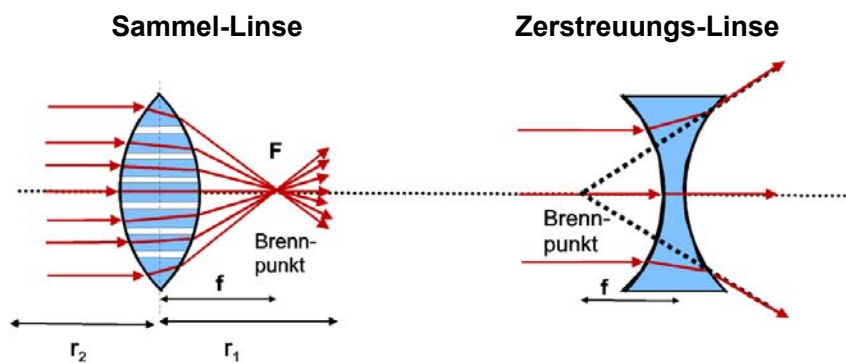
Linsengleichung: $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$ b: Bildweite, g: Gegenstandsweite

Brechkraft $D = \frac{1}{f}$ [D] Dioptrien 1dpt = 1/m, Brillengläser: 1 – 5 Dioptrien.

Linsenkombination: $D = \sum D_j$

Für dicht hinter einander stehende, dünne Linsen. Brechkraft, nicht Brennweite addieren!

F22b

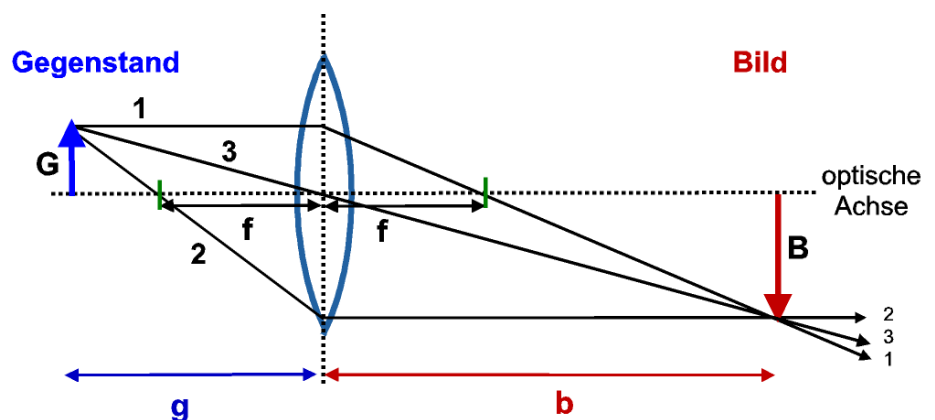


Bildkonstruktion

F23

- 1) Strahlen parallel zur opt. Achse werden durch Brennpunkt gebrochen
 - 2) Brennpunktstrahl wird parallel zur opt. Achse gebrochen
 - 3) Mittelpunktstrahl wird nicht gebrochen
- Bildpunkt = Schnittpunkt der Strahlen

F23



Fälle für Sammellinsen:

- $2f < g < \infty$ Verkleinertes, reelles Bild (siehe Abb.)
- $g \gg f$ Bild im Brennpunkt der Linse
- $g > 2f$ verkleinertes, reelles Bild
- $0 < g < f$ virtuelles Bild, Linse als Lupe

Exp: optische Bank mit Dia, verschiebbarer Linse u. Schirm

Vergrößerung

F23

1. Abbildungsmaßstab m

$$m = \frac{B}{G} \quad \frac{\text{Bildgröße}}{\text{Gegenstandsgröße}}$$

ohne Beweis folgt: $m = -\frac{b}{g}$

Vorzeichen pos.: Bild aufrecht, neg: Bild steht Kopf

Bild reell \rightarrow b positiv, virtuell \rightarrow b negativ

Vergrößerung: $|m| > 1$ Verkleinerung: $|m| < 1$

2. Winkelvergrößerung:

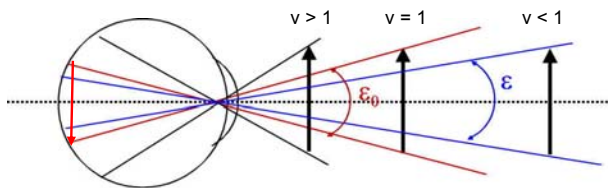
F24

$$v = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad \text{bezogen auf Sehwinkel des menschl. Auges}$$

Gegenstand 25 cm vor dem Auge $\rightarrow v = 1$ (Min. Abstand zum Scharfstellen)

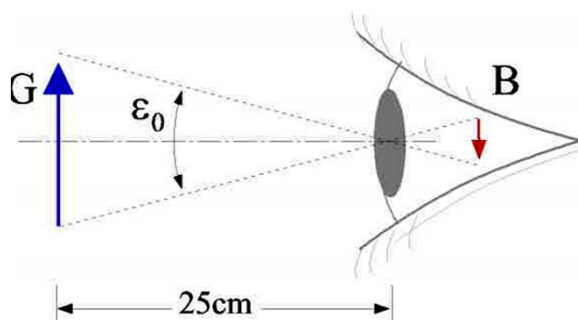
Ziel optische Geräte: Sehwinkel ε vergrößern

Auflösung: Netzhaut trennt 2 Punkte, wenn Sehwinkel $\alpha \sim 1' = 1/60^\circ$



F24

Sehwinkel



Bsp.

F23

Eine Kamera mit Brennweite 75 mm nimmt eine 1,8 m große, 27 m entfernt stehende Person auf.

Frage Wie groß ist das Bild der Person?

Lsg. $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$ mit $f = 0,075 \text{ m}$, $g = 27 \text{ m}$ Linsengleichung

$$b = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{g} \right)^{-1} \rightarrow b = \frac{fg}{g-f} = 0,0752 \text{ m}$$

Abstand Film – Linse = Bildweite

gesucht war Bildgröße B , folgt aus Abbildungsmaßstab m und Gegenstandsgröße G

$$m = \frac{B}{G} = -\frac{b}{g} \rightarrow B = -G \frac{b}{g} = -1,8 \text{ m} \frac{0,0752}{27} = -0,005 \text{ m} = -5 \text{ mm}$$

(Minus: Person steht Kopf)

2.5 Optische Geräte

F25

2.5.1 Lupe

virtuelles Bild $0 < g < f$ Arbeitsbereich

Winkel ohne Lupe: $\tan \varepsilon_0 \approx \varepsilon_0 = \frac{G}{25 \text{ cm}}$

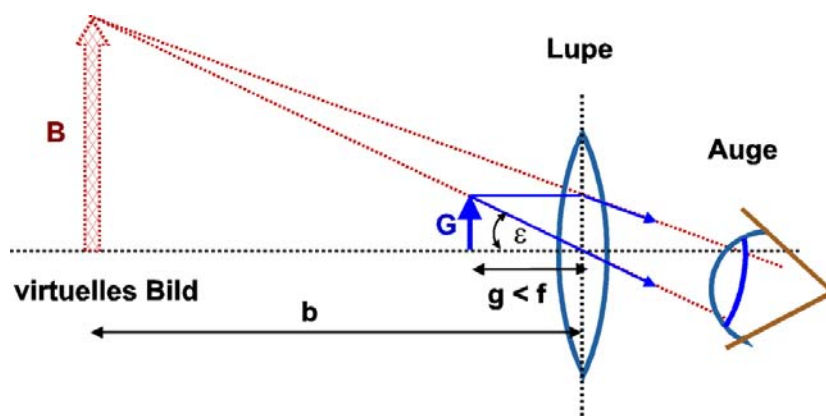
Winkel mit Lupe: $\tan \varepsilon \approx \varepsilon = \frac{G}{g}$

Vergrößerung max. $g = f \rightarrow \tan \varepsilon \approx \varepsilon = \frac{G}{f}$

Vergrößerung $v = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \approx \frac{25 \text{ cm}}{f}$

Bsp. Lupe mit $f = 3 \text{ cm}$ vergrößert $v = 8,3$ fach

F25

Sammellinse als Lupe

2.5.2 Mikroskop

F26

Ziel: Beobachtung von kleinen, nahen Gegenständen

Objektiv f_{ob} nahe am Gegenstand

Gegenstand $g > f_{ob}$ mit $g \approx f_{ob}$

Okular f_{ok} am Auge

Bild B_1 reell, vergrößert nahe bei f_{ok}

Tubuslänge s Abstand der Fokuspunkte F_{Ob} , F_{Ok} meist 16 cm

Scharf stellen: s variieren so dass Bild nahe bei f_{ok} liegt

Bild B_2 virtuelles Bild des vom Objektiv erzeugten (reellen) Bildes (seitenverkehrt)

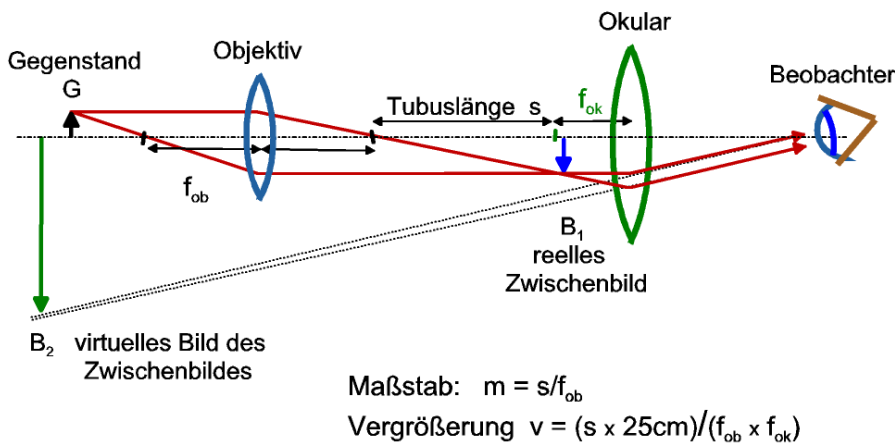
Abbildungsmaßstab: $m = \frac{B_1}{G} \approx \frac{s + f_{ob}}{g} = \frac{s}{f_{ob}}$ mit $s \approx s + f_{ob}$, $g \approx f_{ob}$

Vergrößerung $v = m \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{s}{f_{ob}} \frac{25 \text{ cm}}{f_{ok}}$

Fernrohr/ Auge F27/28

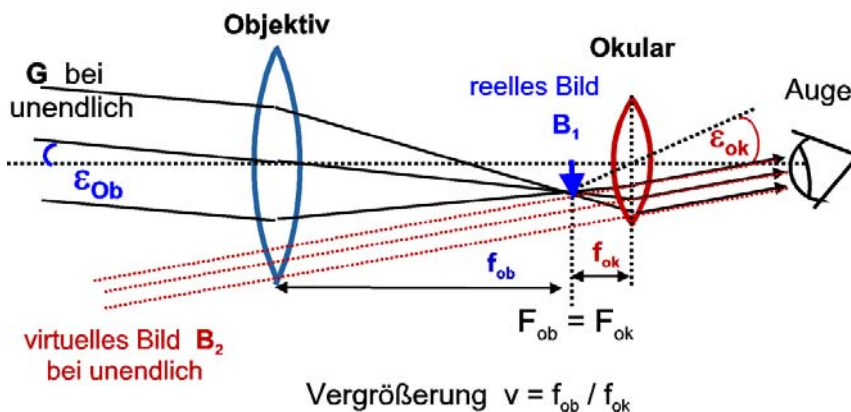
F26

Mikroskop



F27

Kepler-Fernrohr

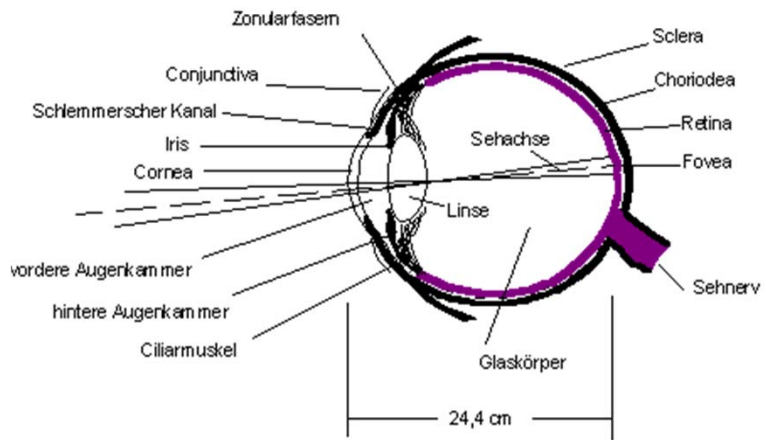


Optische Wahrnehmung

F28

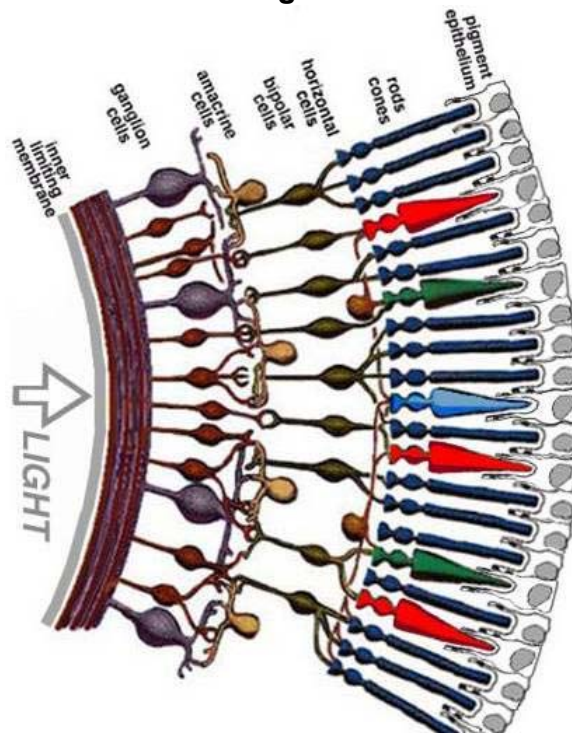
F28a

Auge I



F28b

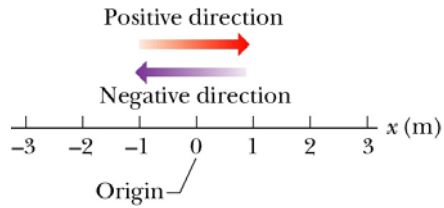
Auge II



1. Kinematik

Wir betrachten nur einfache, geradlinige Bewegungen. Das bewegte Objekt ist ein punktförmiges Teilchen, oder nur den Schwerpunkt betrachten.

1.1 Ort & Verschiebung



Referenzpunkt: Nullpunkt auf x-Achse

Verschiebung: $\Delta x = x_2 - x_1$
Wechsel von Ort x_1 nach x_2

Richtung: Δx positiv: $x_2 > x_1$, neg. $x_2 < x_1$
Bewegung von $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$ dann $\Delta x = 0$
berücksichtigt nur Anfang- Endpunkt, nicht die zurückgelegte Strecke

Betrag: Abstand zwischen x_2 und x_1

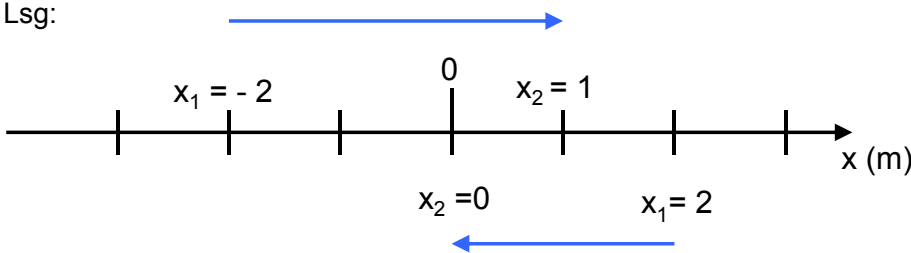
Vektor: Betrag, Richtung

Bsp.

Welche Paare ergeben negative Verschiebung (x_1, x_2):

$(-2\text{m}, 1\text{m}), (2\text{m}, 0\text{m}) \rightarrow$ Zeichnen

Lsg:



1.2 Geschwindigkeit

1.2.1 Mittlere Geschwindigkeit

Beschreibe Position des Teilchens durch $x(t)$, Ort als Funktion der Zeit t

Geschwindigkeit: $v_{gem} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ Mittelwert

Startzeit $t_1 = 0$,

Einheit $[v] = \text{m/s}$ Strecke / Zeit

Exp. Laufband, 5 Studenten stoppen Zeit Δt , die sie braucht von Punkt x_1 nach x_2 . 5 verschiedene Streckenlängen ausmessen; $x(t)$ auftragen und v berechnen.

Messung

Start x_1 (m)	Ziel x_2 (m)	$\Delta x = x_2 - x_1$ (m)	Δt (s)	v (m/s)

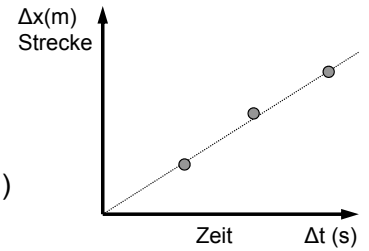
Darstellung: Daten in $x(t)$ -Diagramm eintragen

Deutung : $v =$ Steigung der Geraden $x(t)$

Anschauung: Steigung der Geraden in $x(t)$ zwischen Koordinaten (x_1, t_1) u. (x_2, t_2)

v_{gem} pos.: Gerade steigt nach rechts

v_{gem} neg.: Gerade fällt nach rechts



Praktisch Startwert x_1, t_1 auf 0 setzen $\rightarrow v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - 0}{t_2 - 0} = \frac{x}{t}$

Bsp. Igel bewegt sich auf geradlinigem Weg von $x_1 \rightarrow x_2$ in der Zeit Δt

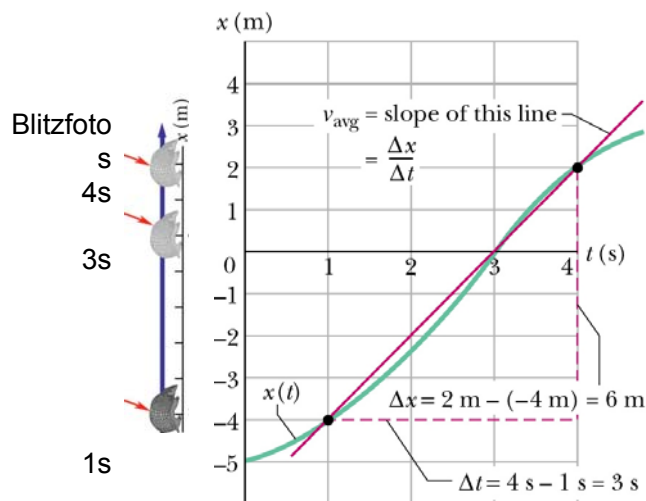
mittlere Geschwindigkeit des Igels zwischen Koordinaten

F29

$$(x_1 = -4m, t_1 = 1s) \text{ u. } (x_2 = 2m, t_2 = 4s)$$

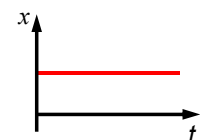
$$v_{gem} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{2m - (-4)m}{4s - 1s} = \frac{6m}{3s} = 2 \frac{m}{s}$$

F29

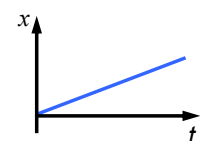


Typische Funktionen

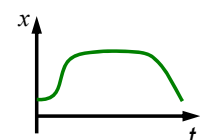
a) $x(t) = \text{konst}$ Teilchen bewegt sich nicht $\Delta x = 0$



b) $x(t) = v t$ Teilchen hat konstante Geschwindigkeit



c) $x(t)$ beschleunigt, konstante Geschwindigkeit, stoppt, kehrt um



Beachte: Vektor hat Betrag und Richtung, z.B. Tachometer mißt nur Betrag

1.2.2 Momentangeschwindigkeit

Sie fahren mit dem Auto von Münster nach Steinfurt und benötigen für 30 km $\frac{1}{2}$ Stunde, dann \rightarrow Mittelwert: v_{gem} für längeren Zeitraum Δt

$$v_{gem} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{30 km}{0,5 h} = 60 \frac{km}{h} = 60 \frac{1000 m}{3600 s} = 16,7 \frac{m}{s}$$

2 Wochen später erhalten Sie Post vom Polizeipräsidenten mit Blitzfoto und Rechnung: $\rightarrow v = 135 km/h$

Frage Geschwindigkeit zur Zeit des Blitzfotos ?

Lsg. Momentangeschwindigkeit

a) Mittlere Geschwindigkeit

F30

für Zeitraum $\Delta t = t_5 - t_1$ $v_{gem} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{100 - 0 m}{6 - 0 s} = 16,7 \frac{m}{s} = 60 \frac{km}{h}$

für Zeitraum $\Delta t = t_4 - t_2$ $v_{gem} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{45 - 18 m}{3,3 - 2,5 s} = 33,8 \frac{m}{s} = 121 \frac{km}{h}$

\rightarrow Geschwindigkeit hängt selbst vom Zeitpunkt ab

b) Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_3 des Blitzfotos

$\rightarrow v$ bei t_3 : Zeitraum muss zum Zeitpunkt schrumpfen: $\Delta t \Rightarrow 0$

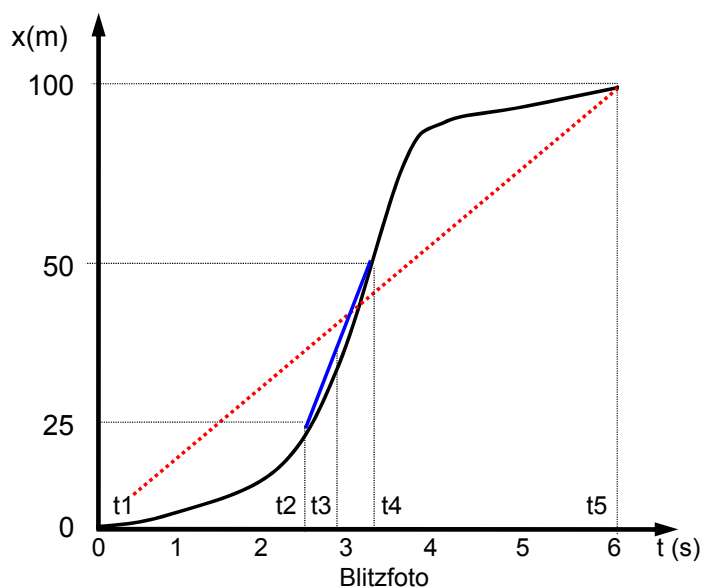
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Momentangeschwindigkeit ist die aktuelle Steigung der Kurve $x(t)$ zur Zeit t , also mathematisch gesehen die Ableitung der Kurve am Punkt t .

F30



Mittlere und Momentan- Geschwindigkeit



1.3 Differenzieren - Regeln zum Differenzieren einfacher Funktionen

$$1) \quad x(t) = a \quad = \text{konstant} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{denn } a \text{ hängt nicht von } t \text{ ab}$$

$$2) \quad x(t) = a \cdot t \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = a$$

$$3) \quad x(t) = t^m \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = m \cdot t^{m-1} \quad , \quad \text{mit } m = \text{konstant}$$

$$4) \quad x(t) = e^t \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = e^t$$

$$5) \quad x(t) = \ln t \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$$

$$6) \quad x(t) = \sin t, \quad x(t) = \cos t \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dx}{dt} = -\sin t$$

$$\text{Summenregel:} \quad \frac{d}{dt}(u(t) + v(t)) = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt}$$

$$\text{Produktregel:} \quad \frac{d}{dt}(u(t) \cdot v(t)) = u \frac{dv}{dt} + v \frac{du}{dt}$$

$$\text{Kettenregel} \quad \frac{d}{dt}(f(g(t))) = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dt}$$

Bsp: Ort $x(t) \leftrightarrow$ Geschwindigkeit $v(t)$

F31a

- a) Aufzug steht,
- a) -b) fährt los mit wachsender Geschw. bis zur Maximalgeschw.
- c) bremsst am Ziel ab, d) steht

Frage: Geschwindigkeit $v(t) = ?$

Lsg. 1. Aufzug steht für $t = 0\text{s}$ bis $t = 1\text{s}$ und $t > 9\text{s}$

d.h. $x(t) = \text{konst} \rightarrow v = dx/dt = 0$

2. $t = 3\text{s}$ bis 8s : linearer Weggewinn $x(t) = v_0 \cdot t$

$v = dx/dt = (24\text{m} - 4\text{m}) / (8\text{s} - 3\text{s}) = 4 \text{ m/s}$

v ist pos, Gerade $x(t)$ steigt an

1.4.1 Beschleunigung

F31b

Rate der Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit

Mittelwert $a_{\text{gem}} = \Delta v / \Delta t = (v_1 - v_2) / (t_2 - t_1)$ für geradlinige Bewegung

Momentan. $a = \lim (\Delta v / \Delta t) = dv/dt$ Ableitung $v(t)$ nach t

$\Delta t \rightarrow 0$

Steigung der Kurve $v(t)$

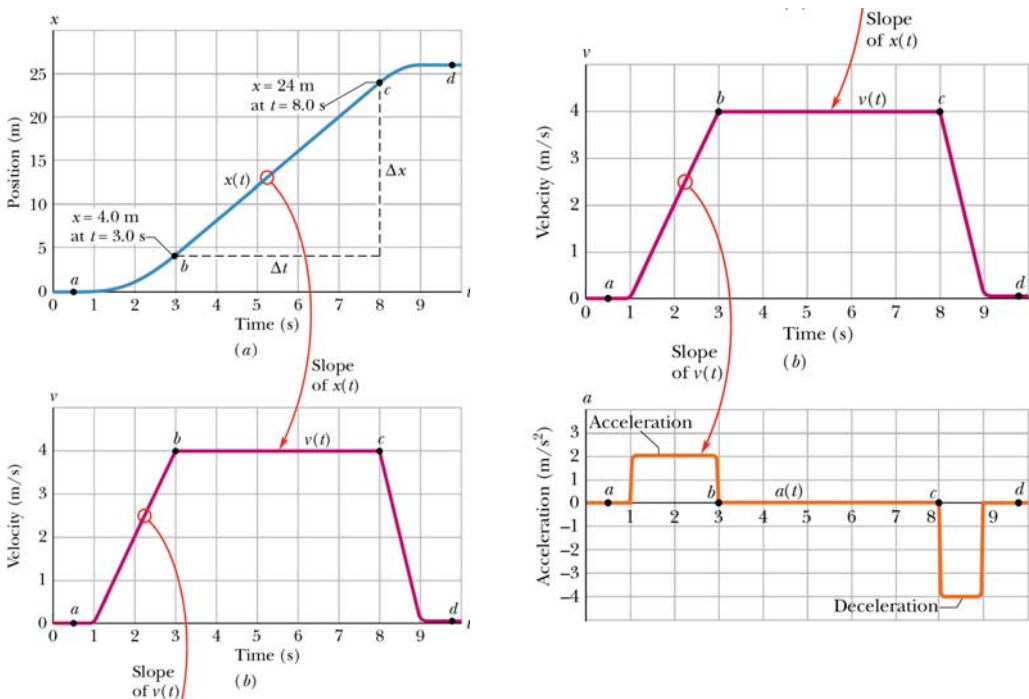
$a = dv/dt = d/dt(dx/dt) = d^2x/dt^2$

Einheit $[a] = \text{m/s}^2$, Länge/(Zeit*Zeit)

Vektor Betrag, Richtung

Vorzeichen Vorzeichen von a und v gleich \Rightarrow Betrag von v nimmt zu, Teil wird schneller
 Vorzeichen von a , v verschieden \Rightarrow Betrag v nimmt ab, Teil wird langsamer

F31a



Beschleunigungsgefühl

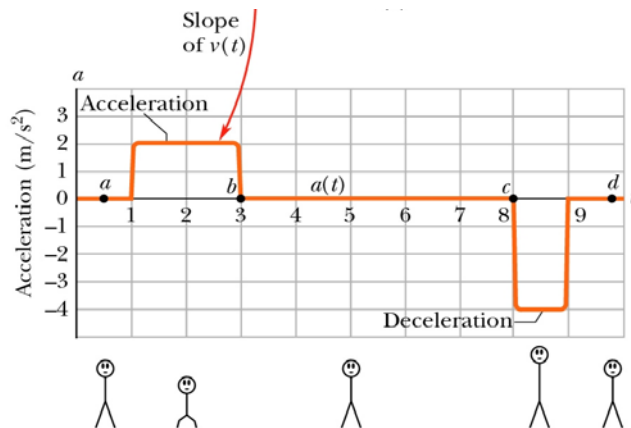
F31c

Lift fährt nach oben → Beschleunigung = Person nach unten gedrückt, $a > 0$
 Abbremsen → Person hoch gezogen, $a < 0$

Körper funktioniert wie ein Beschleunigungsmesser, aber nicht als Geschwindigkeitsmesser

Auto $v = 50 \text{ km/h}$ oder Flugzeug $v = 900 \text{ km/h}$ nicht unterscheidbar, nur Geschwindigkeitswechsel → Reiz der Achterbahn

F31c



1.4.2 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

F32

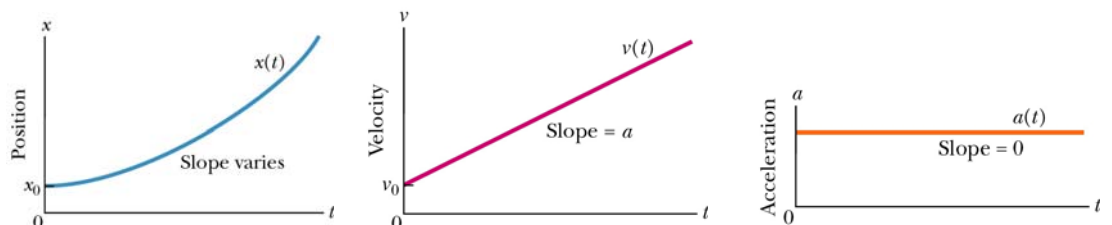
Sonderfall: konstante Beschleunigung (Auto Start / Bremsen vor Ampel)

- Start: Zeit: $t_0 = 0$
- Ort: $x(t_0) = x_0$
- Geschwindigkeit: $v(t_0) = v_0$
- Beschleunigung: $a = \text{konstant}$
- $a = (v - v_0)/(t - 0) \rightarrow v(t) = v_0 + at$
- $v = (x - x_0)/(t - 0) \rightarrow x(t) = x_0 + v(t)t$
- Durchschnitt: $v_{gem} = (v_0 + v)/2$ zwischen t und $t=0$

$$v_{gem} = \frac{1}{2}(v_0 + v_0 + at) = v_0 + \frac{1}{2}at$$

$$x(t) = x_0 + v(t)t = x_0 + (v_0 + \frac{1}{2}at)t = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

F32



Übersicht: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Gleichung	Fehlende Größe u. Bedeutung
1. $v(t) = v_0 + at$	$x - x_0$ Verschiebung zum Anfangspunkt
2. $x - x_0 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} at^2$	v aktuelle Geschwindigkeit
aus Gl.1. & Gl.2. folgt:	
3. $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	t Zeitpunkt, Dauer
4. $x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v) \cdot t$	a Beschleunigung
5. $x - x_0 = vt - \frac{1}{2} at^2$	v_0 Anfangsgeschwindigkeit (Gl.1 in Gl.2)

1.4.3 Freier Fall

F33

eine typische konstant beschleunigte Bewegung ist der freie Fall

Beobachtung: Abstand der Wassertropfen Δx wird größer.
 Tab. Schrittweise ausfüllen
 Tropfen, Zeit, Ort

Deutung: zurückgelegter Weg der Tropfen bei

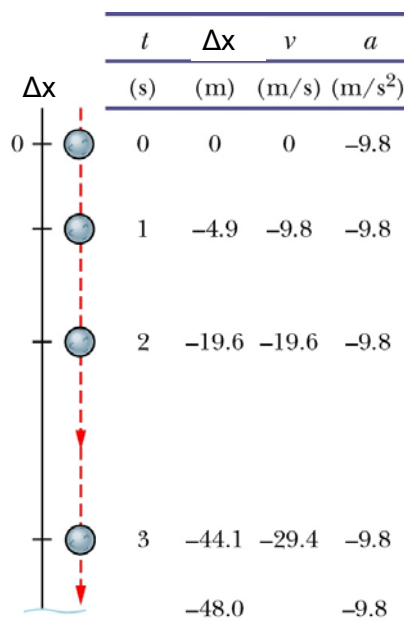
Blitzfolge 1. Blitz $t_1 = 1\Delta t$,
 2. Blitz $t_2 = 2\Delta t$

Weg $\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$, $v_0 = 0$ in unserem Exp.
 $\rightarrow \Delta x \sim t^2$ wächst quadratisch mit der Zeit

Vergleich unbeschleunigt $a = 0 \Rightarrow \Delta x = v_0 t$

Exp: Wassertropfen fallen im Takt von ca. 3Hz aus einem Tropf. Stroboskop erzeugt ein stehendes Bild der Wassertropfen.

F33



Geschwindigkeit $v(t) = v_0 + at = at$ wächst linear mit der Zeit

Gravitationsbeschleunigung

$$a = -g = -9.81 \text{ m/s}^2$$

konstante Beschleunigung in Erdnähe Richtung Erdmittelpunkt

Gravitation wird negativ gerechnet (zeigt nach unten)

Gilt in Erdnähe: g ist unabhängig von den Eigenschaften des Gegenstandes, sofern kein Luftwiderstand herrscht.

Exp. a) Fallrohr mit Luft: Papier, Kugel fallen lassen, Kugel fällt schneller – warum?
b) Fallrohr evakuiert: Papier und Kugel fallen gleich schnell

Bsp. Ein Ball wird (entlang einer y -Achse) mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 12 \text{ m/s}$ senkrecht in die Luft geworfen. Der Luftwiderstand sei 0.

Frage Wie lange braucht der Ball bis zur maximalen Höhe?

Lsg. Idee: 1) $a = -g = \text{konstant}$

2) $v = 0 \text{ m/s}$ am höchsten Punkt

$$v = v_0 + at \quad (\text{Gl. 1})$$

$$\rightarrow t = (v - v_0)/a = (0 - 12 \text{ m/s})/(-9.8 \text{ m/s}^2) = 1,2 \text{ s}$$

Frage: Wie hoch ist die maximale Höhe über dem Ausgangspunkt?

Lsg. Setze y statt x in Gl. 3 ein mit Ausgangspunkt $y_0 = 0$

$$y = (v^2 - v_0^2)/(2a) = (0 - (12 \text{ m/s})^2)/(-2 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2) = 7,3 \text{ m}$$

Frage: Wie lange braucht der Ball um 5 m hoch zu fliegen?

Lsg. Bekannt sind: $a = -g$, v_0 , $y - y_0 = 5 \text{ m}$, setze $y_0 = 0 \text{ m}$

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{Gl. 2.}$$

$$\frac{1}{2} g t^2 - v_0 t + y = 0 \quad \text{quadratische Gl.}$$

$$\rightarrow t = v_0/g \pm (1/g)[v_0^2 - 2gy]^{1/2}$$

$$\rightarrow t = 0,53 \text{ s und } t = 1.9 \text{ s,}$$

gibt 2 Zeiten, da der Ball erst von unten und später von oben $y = 5 \text{ m}$ passiert

2. Vektoren

Hilfsmittel zur Darstellung von gerichteten Größen im Ortsraum

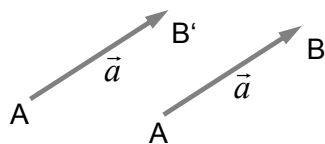
Skalar: Betrag, ohne Richtung
Bsp. Masse, Temperatur, Druck, Energie etc.

Vektor: Betrag mit Richtung
Bsp. Verschieb. $\Delta \vec{x}$, Geschwindigkeit \vec{v} , Beschleunigung \vec{a} , Kräfte...

Verschiebung \vec{a} von Ort A nach Ort B

Darstellung: Pfeil

Betrag: $|\vec{a}| = a = \text{Länge}$



Vektoren können parallel verschoben werden, ohne dass sie sich ändern, denn Betrag und Richtung bleiben erhalten

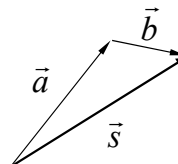
2.1 Vektoraddition

Summe der einzelnen Verschiebungen \vec{a} und \vec{b}

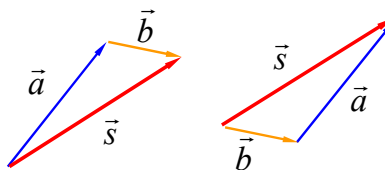
Vektorsumme $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$

keine algebraische Summe!

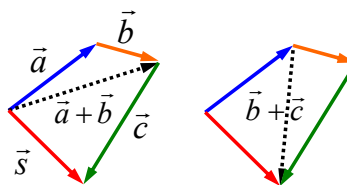
Methode: Pfeile parallel verschieben, so dass Spitze an den Anfang passt



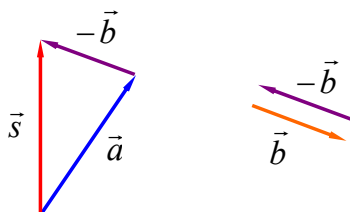
Kommutativgesetz: $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$



Assoziativgesetz: $\vec{s} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$



Subtraktion: $\vec{s} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ Richtungsumkehr von \vec{b}



Darstellung:

Vektor geht in die Papierebene hinein \otimes

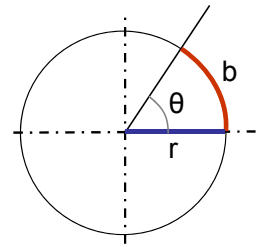
Vektor kommt aus der Papierebene heraus \odot

2.2 Trigonometrische Funktionen

nötig, um Vektorkomponenten zu bestimmen

a) Winkelmaße: voller Kreis = $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$

$$\theta = \frac{\text{Bogen}}{\text{Radius}} = \frac{b}{r}$$



$$1 \text{ rad} = 360^\circ / 2\pi = 57,296^\circ$$

$$\rightarrow 1^\circ = 0,01745 \text{ rad}$$

b) Vorzeichen: Winkel pos. wenn gegen Uhrzeigersinn

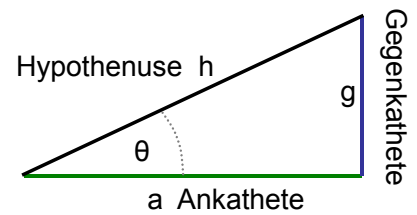
c) Winkelseiten

d) Winkelfunktionen

$$\sin \theta = g/h$$

$$\cos \theta = a/h$$

$$\tan \theta = g/a = \sin\theta/\cos\theta$$



e) Inverse trigonom. Funktion, nötig, um θ zu berechnen

$$\begin{aligned} \text{Umkehrfunktion} \quad \arcsin (g/h) &= \theta \\ \arccos (a/h) &= \theta \\ \arctan (g/a) &= \theta \end{aligned}$$

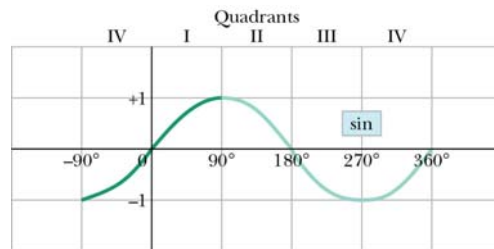
F34

prüfe Ergebnisse, meist gibt der Taschenrechner nur den Wert aus erstem Quadranten!

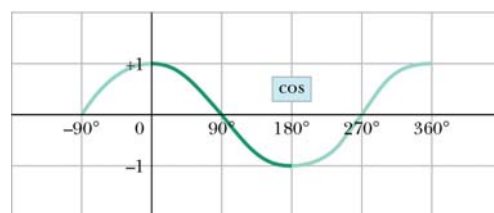
Bsp. Frage: bestimme θ aus $\sin \theta = 0.5$

Lsg. $\theta = \arcsin (0.5) = 30^\circ \pm n 360^\circ, n \in \mathbb{N}$
 oder auch $\theta = 150^\circ \pm n 360^\circ, n \in \mathbb{N}$

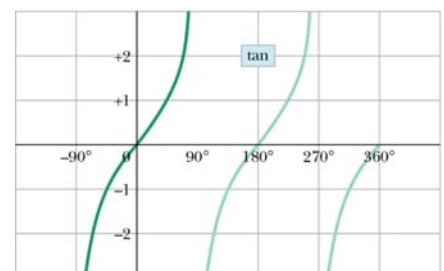
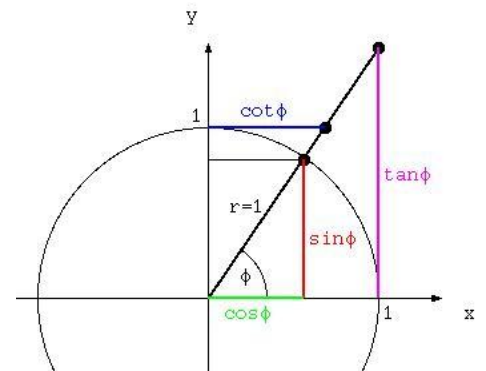
F34



(a)



(b)



(c)

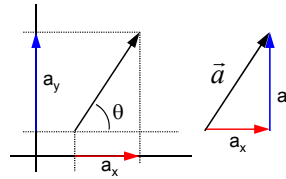
2.3 Vektorkomponenten

bisher geometrische Addition von Vektoren, besser ist die analytische Addition der Komponenten im rechtwinkligen x-y-Koordinatensystem

Projektion des Vektors auf Koordinatenachsen

x-Komponente: $a_x = a \cos(\theta)$

y-Komponente: $a_y = a \sin(\theta)$



Mit den Vektorkomponenten besitzt man die vollständige Information über den Vektor.

Darstellung von \vec{a} für definiertes Koordinatensystem:

1) x-y-Komponenten $\vec{a} = (a_x, a_y)$ 2 Angaben

2) Betrag $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

& Winkel $\tan(\theta) = a_y / a_x$ 2 Angaben

Wie baut man nun aber den Vektor korrekt aus den x-y-Komponenten auf?

2.4 Einheitsvektoren

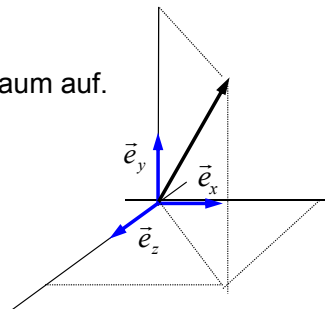
$$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$$

- spannen ein Koordinatensystem im 3-dimensionalen Raum auf.
- geben Richtung vor
- stellen eine *Basis* dar.

$$\text{Betrag} = 1 = |\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z|$$

keine Einheit

Anordnung: rechtshändig



Darstellung beliebiger Vektoren durch Einheitsvektoren und Vektorkomponenten möglich:

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

- Vektorkomponenten:
- hängen von Einheitsvektoren ab
 - ändern sich z.B. wenn Basissystem gedreht wird
 - der Vektor bleibt aber unverändert im Raum

2.5 Vektoren komponentenweise addieren

Wenn Vektorkomponenten bzgl. den Einheitsvektoren bekannt sind, dann kann man die Vektoren "Achse für Achse" addieren bzw subtrahieren.

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

also: Vektoren sind gleich, wenn ihre entsprechenden Komponenten gleich sind.

Bsp.: gegeben $\vec{a} = (4,2m) \vec{e}_x - (1,5m) \vec{e}_y$
 $\vec{b} = (-1,6m) \vec{e}_x + (2,9m) \vec{e}_y$
 $\vec{c} = (3,7m) \vec{e}_y$

gesucht $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

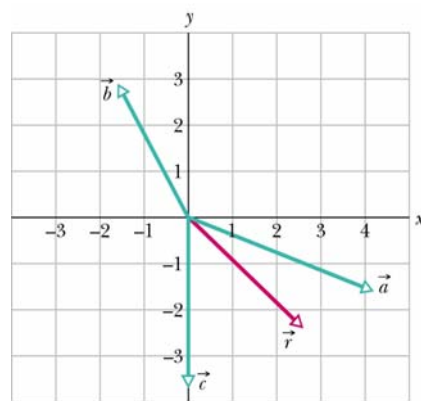
$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x + c_x \\ a_y + b_y + c_y \\ a_z + b_z + c_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4,2m - 1,6m + 0m \\ -1,5m + 2,9m - 3,7m \\ 0m + 0m + 0m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,6m \\ -2,3m \\ 0m \end{pmatrix} = \underline{(2,6m) \vec{e}_x - (2,3m) \vec{e}_y}$$

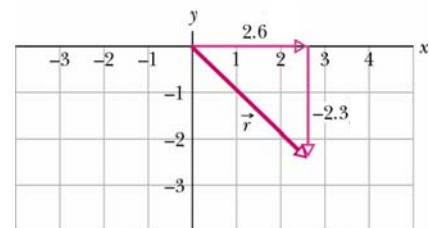
Betrag-Winkel-Darstellung: $|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = \sqrt{(2,6)^2 + (-2,3)^2 + (0)^2} = \underline{3,5m}$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-2,3m}{2,6m}\right) = \underline{41^\circ}$$

F35



(a)



(b)

2.6 Vektormultiplikation

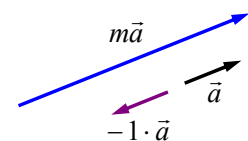
Vektormultiplikationen entsprechen nicht den herkömmlichen Zahlenmultiplikationen.

2.6.1 Multiplikation mit Skalar

Produkt zwischen Vektor und einer Zahl m (Skalar). Es wird komponentenweise multipliziert:

$$m\vec{a} = ma_x \vec{e}_x + ma_y \vec{e}_y + ma_z \vec{e}_z$$

$$m\vec{a} = \begin{pmatrix} ma_x \\ ma_y \\ ma_z \end{pmatrix}$$



Vektor wird länger ($m > 0$) oder ändert die Richtung ($m = -1$), die Orientierung (Winkel) bleibt aber!

2.6.2 Skalarprodukt

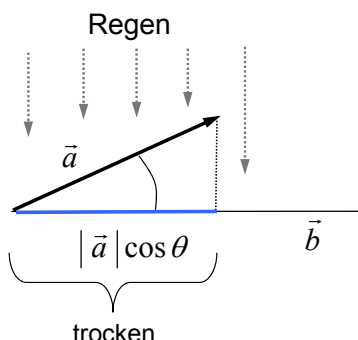
Das Skalarprodukt von zwei Vektoren ergibt eine Zahl (Skalar).

Berechnung:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta$$

$$= a \cdot b \cos \theta$$



Projektion von \vec{a} auf \vec{b}

Es gilt: a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ Kommutativgesetz

b) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ maximal, wenn $\theta = 0^\circ$, bzw. $\theta = n \cdot 180^\circ$

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ wenn $\theta = 90^\circ$, bzw. $\theta = 90^\circ \pm n \cdot 180^\circ$

→ Test ob 2 Vektoren senkrecht zueinander stehen.

Bsp. Bestimme den Winkel θ zwischen zwei Vektoren.

Lsg. Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cos \theta$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Beträge: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, $b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$

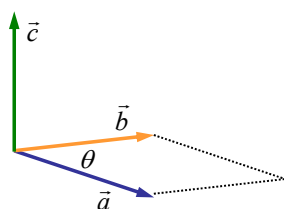
Winkel: $\theta = \arccos\left(\frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{a b}\right)$

2.6.3 Kreuzprodukt (Vektorprodukt)

Das Kreuzprodukt von zwei Vektoren \vec{a} , \vec{b} ergibt einen neuen Vektor \vec{c}

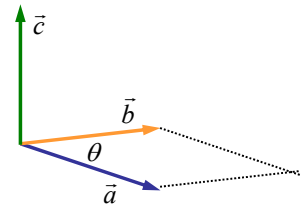
Berechnung: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - b_y a_z \\ a_z b_x - b_z a_x \\ a_x b_y - b_x a_y \end{pmatrix}$$



$$= (a_y b_z - b_y a_z) \vec{e}_x + (a_z b_x - b_z a_x) \vec{e}_y + (a_x b_y - b_x a_y) \vec{e}_z$$

- Es gilt:** 1) $c = a \cdot b \sin \theta$
 2) \vec{c} senkrecht auf \vec{a} und \vec{b}
 3) rechte Hand Regel:
 \vec{a} Daumen
 \vec{b} Zeigefinger
 \vec{c} Mittelfinger



Die Anfangspunkte der Vektoren berühren sich

Kreuzprodukt ist: a) maximal, wenn \vec{a} senkrecht auf \vec{b}
 b) 0, wenn \vec{a} parallel (antiparallel) zu \vec{b}

Deutung: $c = |\vec{c}|$ Flächeninhalt der von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Fläche und \vec{c} definiert Lage der Fläche im Raum, da senkrecht auf der Fläche

Beachte: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ wegen rechter-Hand-Regel

3. Bewegung im 3-dimensionalen Raum

F36

neu: Darstellung beliebiger Bewegungen im Raum möglich.

3.1 Ort & Verschiebung

Ortsvektor: $\vec{r}(t) = r_x(t)\vec{e}_x + r_y(t)\vec{e}_y + r_z(t)\vec{e}_z$

Bewegung: Zeitabhängigkeit von $\vec{r}(t)$ steckt in den Komponenten $r_x(t), r_y(t), r_z(t)$

Die Einheitsvektoren sind zeitlich konstant

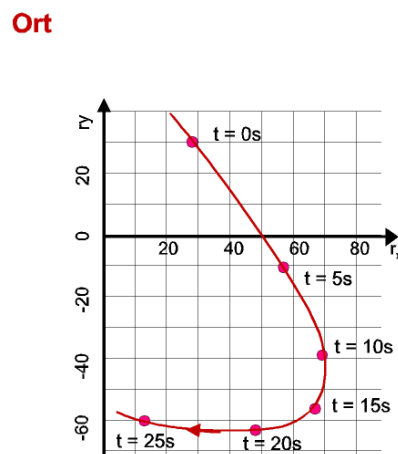
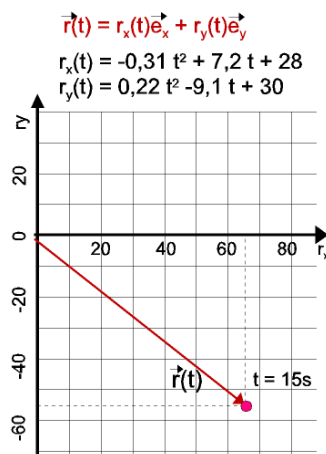
Teilchenbewegung zeigt vom Ursprung (0, 0, 0) zum aktuellen Ort

Verschiebung: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ in der Zeit t_1 bis t_2

$$= \Delta r_x \vec{e}_x + \Delta r_y \vec{e}_y + \Delta r_z \vec{e}_z$$

F36

Bewegung im 3-dimensionalen-Raum



Bsp. Der Ortsvektor eines Teilchens wird gegeben:

F37

$$\text{Zu Zeit } t_1: \vec{r}_1 = (-3m)\vec{e}_x + (2m)\vec{e}_y + (5m)\vec{e}_z$$

$$\text{Zu Zeit } t_2: \vec{r}_2 = (9m)\vec{e}_x + (2m)\vec{e}_y + (8m)\vec{e}_z$$

Frage: Verschiebung $\Delta\vec{r}$ in der Zeit von t_1 bis t_2 ?

$$\text{Lsg.:} \quad \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

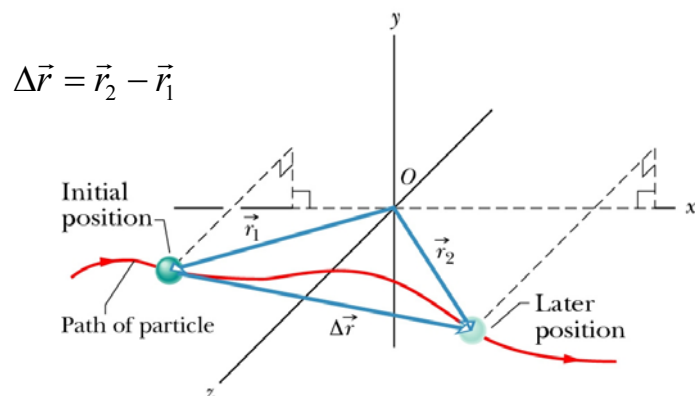
Komponentenweise:

$$= (9 - (-3)m)\vec{e}_x + (2 - 2m)\vec{e}_y + (8 - 5m)\vec{e}_z$$

$$= (12m)\vec{e}_x + 0\vec{e}_y + (3m)\vec{e}_z$$

Bewegung parallel zur x-z-Ebene, da keine y-Komponente

F37



3.2 Geschwindigkeit

F38

Durchschnittsgeschwindigkeit:

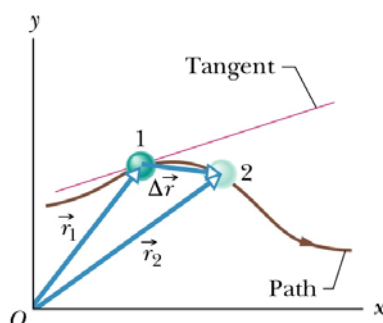
$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta r_x}{\Delta t} \vec{e}_x + \frac{\Delta r_y}{\Delta t} \vec{e}_y + \frac{\Delta r_z}{\Delta t} \vec{e}_z$$

Merke: a) Zeitabhängigkeit von (t) steckt in den Komponenten $r_x(t), r_y(t), r_z(t)$

Einheitsvektoren $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sind zeitlich konstant.

b) Eine 3-dim. Bewegung lässt sich nicht mehr im Ort-Zeit Koordinatensystem darstellen, da wir keine 4-te Dimension zum Zeichnen besitzen.

F38



Momentangeschwindigkeit:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Ableitung bedeutet: $\lim \Delta t \rightarrow 0$ zur Zeit t_1 , damit folgt:

- 1) $\Delta \vec{r}$ läuft gegen 0 also läuft \vec{r}_2 auf \vec{r}_1 zu
- 2) die Richtung von $\vec{v} = \Delta \vec{r} / \Delta t$ nähert sich der Tangente im Punkt r_1
- 3) Durchschnittsgeschwindigkeit nähert sich der Momentangeschwindigkeit

Es gilt: Richtung der Momentangeschwindigkeit eines Teilchens verläuft immer tangential zur Bahnkurve des Teilchens am momentanen Ort des Teilchens.

$$\begin{aligned} \vec{v} = d\vec{r}/dt &= \frac{dr_x}{dt} \vec{e}_x + \frac{dr_y}{dt} \vec{e}_y + \frac{dr_z}{dt} \vec{e}_z \\ &= v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z \end{aligned}$$

F39

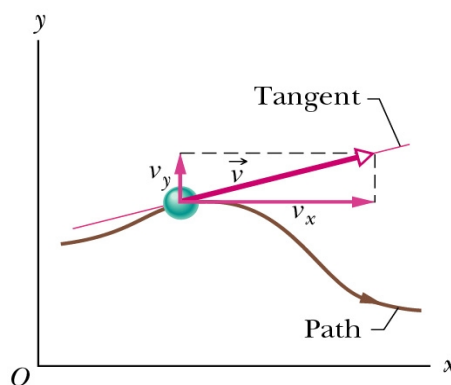
mit den Geschwindigkeitskomponenten:

$$v_x = \frac{dr_x}{dt}, \quad v_y = \frac{dr_y}{dt}, \quad v_z = \frac{dr_z}{dt}$$

Vorsicht: Ortsvektor zeigt vom Koordinatenursprung zum Ortspunkt r (Verschiebung \vec{r})

Geschwindigkeitsvektor zeigt die momentane Richtung an.

F39



3.3 Beschleunigung

F40

tritt auf bei Änderung der Geschwindigkeit eines Teilchens in der Zeitspanne Δt :

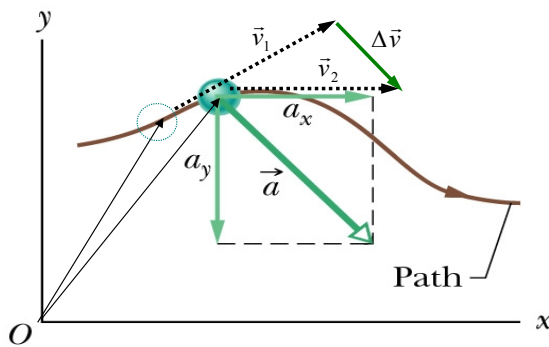
- a) im Betrag und / oder
- b) in der Richtung von \vec{v}_1 auf \vec{v}_2

Durchschnitt: $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ (zwischen Orten r_1, r_2)

Momentan: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{e}_x + \frac{dv_y}{dt} \vec{e}_y + \frac{dv_z}{dt} \vec{e}_z$
 $= a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$

Beschleunigungskomponenten: $a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt}$

F40



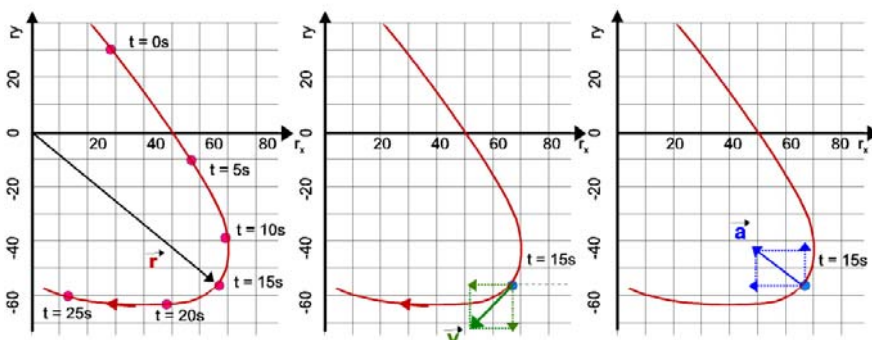
Beschleunigungsvektor \vec{a}

- kein Verschiebungsvektor
- zeigt die Richtung der Beschleunigung an, d.h. Richtung der Geschwindigkeitsänderung
- der Betrag von \vec{a} gibt die Größe der Beschleunigung an
- wenn nur Betragsänderung von \vec{v} : dann ist \vec{a} tangential zur Bahn
- wenn nur Richtungsänderung von \vec{v} : dann steht \vec{a} senkrecht auf der Bahntangente

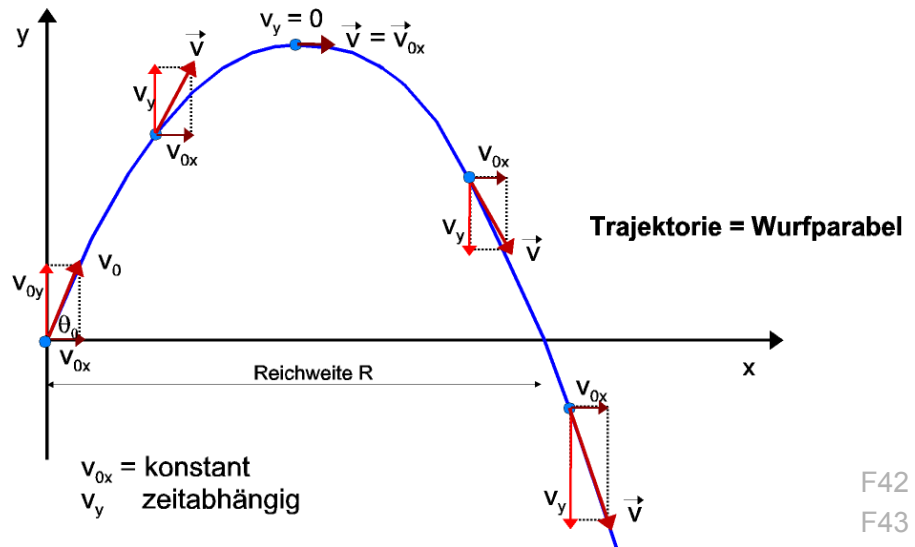
F41a/b

F41a/b

<p>Ort</p> $\vec{r}(t) = r_x(t)\vec{e}_x + r_y(t)\vec{e}_y$ $r_x(t) = -0,31 t^2 + 7,2 t + 28$ $r_y(t) = 0,22 t^2 - 9,1 t + 30$	<p>Geschwindigkeit</p> $\vec{v}(t) = d\vec{r}(t)/dt = v_x(t)\vec{e}_x + v_y(t)\vec{e}_y$ $v_x(t) = -0,62 t + 7,2$ $v_y(t) = 0,44 t - 9,1$	<p>Beschleunigung</p> $\vec{a}(t) = d\vec{v}(t)/dt = a_x(t)\vec{e}_x + a_y(t)\vec{e}_y$ $a_x(t) = -0,62$ $a_y(t) = 0,44$
---	--	---

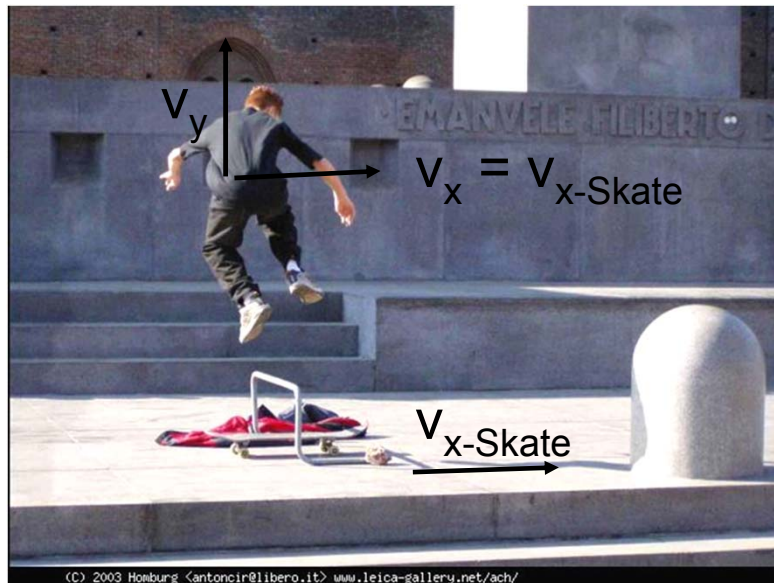


Wurfbewegung



F42
F43

F42/43



4. Kraft

Wenn ein Teilchen seine Geschwindigkeit ändert (Betrag oder Richtung) dann wissen wir, daß irgendetwas dies bewirkt haben muß. Erste wissenschaftl. Beobachtung der Verbindung zwischen Kraft und Beschleunigung durch Newton. (1642 – 1727))

Newtonsche Mechanik gilt nicht wenn:

- a) Geschwindigkeiten nahe Lichtgeschwindigkeit → Relativitätstheorie
- b) Mikrokosmos der Atome betrachtet wird → Quantenmechanik

4.1. Erstes newtonsches Gesetz (Trägheitsgesetz)

„Ein sich selbst überlassener Körper, auf den keine äußeren Kräfte wirken, bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit. Ändert er seinen Bewegungszustand, so wird er beschleunigt und es muss eine Kraft auf ihn wirken.“

4.2. Zweites newtonsches Gesetz

Unsere Erfahrung ist, dass eine gegebene Kraft bei verschiedenen Körpern verschiedene Beträge der Beschleunigung bewirken. Worin unterscheiden sich die Körper?

Exp. 2 Bälle werden mit einem Tritt (gleiche Kraft) zur Wand geschossen

Experiment	Beobachtung	Deutung	Trägheit
a) Ball mit Luft gefüllt	große Beschleunigung	Masse klein	klein
b) Ball mit Wasser	kleine Beschleunigung	Masse groß	groß

→ $a \sim \frac{1}{m}$ Beschleunigung ist invers proportional zur Masse m

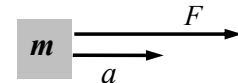
Exp. Bleistift steht auf Papierstreifen (am Ende), schnell wegziehen, Stift bleibt stehen

Zweites newtonsches Gesetz

„Die auf einen Körper wirkende Gesamtkraft ist gleich dem Produkt aus Masse und Beschleunigung des Körper“

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

$$[F] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = \text{N} = \text{Newton}$$



Definition der Kraft durch Beschleunigung einer Masse möglich.

Masse: [m] = kg

Intrinsische Eigenschaft des Körpers, erfasst seine Trägheit

Verbindet Beschleunigung und Kraft, die der Körper erfährt

Wir spüren Masse eines Körpers nur, wenn wir versuchen ihn zu beschleunigen

Superpositionsprinzip

Kräfte sind Vektorgrößen; wirken mehrere Kräfte, so können diese vektoriell addiert werden zur resultierenden Kraft:

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

Einzelkomponenten sind unabhängig voneinander

$$F_x = m a_x, \quad F_y = m a_y, \quad F_z = m a_z$$

Bsp. Körper auf reibungsfreier Unterlage. Zwei Kräfte ziehen horizontal.

Frage Welche dritte Kraft wirkt, wenn

a) Körper in Ruhe,

b) $v = \text{konstant}$ nach links?

Lsg. a) 2N nach links,

b) 2N nach links, denn je $a = 0$



4.3 Inertialsystem

„Ein Inertialsystem ist ein System, in dem die newtonschen Gesetze gelten.

Es gibt keine Scheinkräfte.“

Kennzeichen: Inertialsysteme ruhen oder bewegen sich mit $v = \text{konstant}$.

Sind nicht beschleunigt und rotieren nicht!

Bsp. Ball wird im LKW fallen gelassen, LKW beginnt zu beschleunigen mit \vec{a}_{LKW}

1) Bezugssystem Straße, $v = 0$ (Inertialsystem)

Beobachter sieht Ball senkrecht nach unten fallen

LKW fährt unter dem Ball weg mit Beschl. \vec{a}_{LKW}

$$\text{Kraft: } \vec{F} = m \vec{g}$$

F44a/b

2) Bezugssystem beschleunigter LKW (Nicht-Inertialsystem)

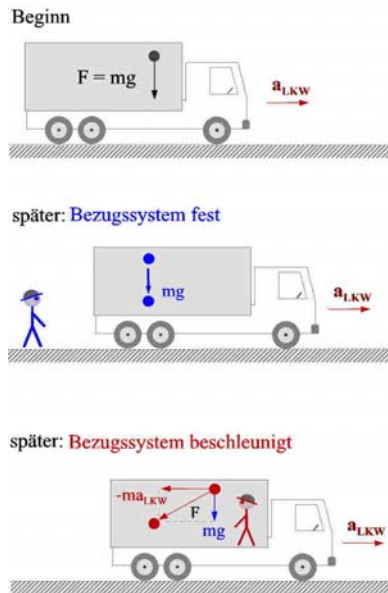
Beobachter sieht Ball nach links unten fallen

$$\text{Kraft: } \vec{F} = -m \vec{a}_{LKW} + m \vec{g} \quad \text{Scheinkraft: } -m \vec{a}_{LKW} \text{ (Trägheitskraft)}$$

Inertialsystem

F44a/b

Inertialsystem & beschleunigtes Bezugssystem



Bsp. Puck auf Eisfläche, $m = 0,20 \text{ kg}$

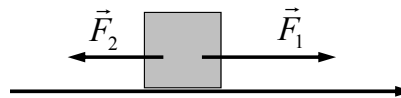
– $\vec{F}_2 = 2 \text{ N}$, $\vec{F}_1 = 5 \text{ N}$, je parallel zur x-Richtung

Frage Beschleunigung in x-Richtung?

Lsg. $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 3 \text{ N}$

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{3 \text{ N}}{0,20 \text{ kg}} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



Einheiten: $\text{N} = \text{kg m/s}^2$

nur solange die Kraft wirkt, beschleunigt der Puck, hört die Kraft auf zu wirken, bewegt er sich mit der konst. Endgeschw. weiter.

4.4 Gravitationskraft

Massen ziehen sich an. Die Gravitationskraft auf den Körper A (Mond, Rakete, Satellit) wird durch die Masse eines zweiten Körpers B (Erde) im Abstand r erzeugt, der den ersten zu sich hin zieht.

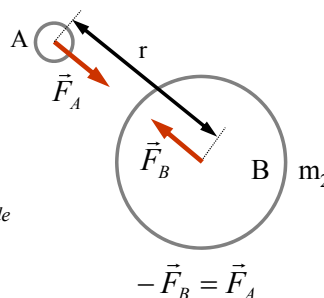
Gravitationsgesetz:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 / (\text{kg s}^2)$$

in Erdnähe: $g = G \frac{m_{\text{Erde}}}{r_{\text{Erde}}^2} = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ $m_2 = m_{\text{Erde}}$

$$\vec{F}_g = m \vec{g} \quad m = m_1$$



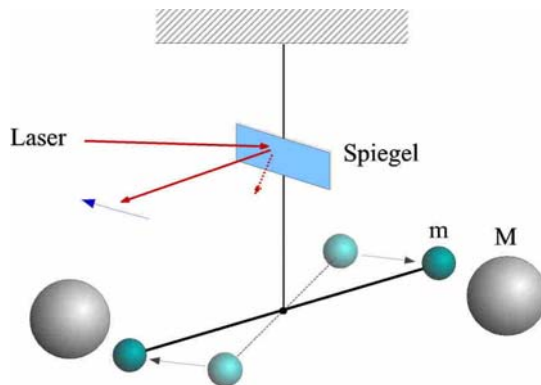
Gravitationskraft wirkt immer, auch wenn Körper in Ruhe sind.

F45

Gravitationskraft

F45

Cavendish-Drehwaage



Gewicht $|\vec{F}_g|$

Gewicht eines Körpers entspricht der Kraft, die ich aufwenden muss, um den Körper am freien Fall zu hindern.

Bsp. Ball übt Kraft von 2 N nach unten aus

Ich übe Kraft von 2 N nach oben aus \rightarrow Ball ruht

\rightarrow Ball wiegt 2N, ist 2N schwer, ein anderer Ball übt 3N aus

\rightarrow dieser ist schwerer

Gewicht F_g eines Körpers ist der Betrag der Gravitationskraft, die auf den Körper wirkt:

$$|\vec{F}_g| = mg$$

Beachte: Gewicht ist nicht gleich Masse, ist keine intrinsische Eigenschaft

Bsp. auf Erde: $m = 1\text{kg}$, \rightarrow Gewicht $W_E = 1\text{kg} \cdot 9,81\text{m/s}^2 = 9,81\text{ N}$

auf Mond: $m = 1\text{kg}$, \rightarrow $W_M = 1\text{kg} \cdot 1,7\text{m/s}^2 = 1,7\text{ N}$

Gewicht darf man nur messen, wenn keine zusätzliche Beschleunigung auf den Körper senkrecht zum Erdboden wirkt, z.B. Personenwaage benutzen im Zimmer, Zug, aber nicht im beschleunigten Fahrstuhl.

Exp: i) Körper (Masse m) hängt am Faden, gleicher Faden hängt am Körper nach unten

langsam ziehen am unteren Faden mit F_z

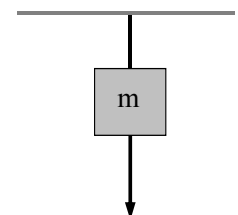
\rightarrow reißt oberhalb des Körpers $F = mg + F_z$

ii) schnell ziehen am unteren Faden

\rightarrow reißt unterhalb des Körpers

Trägheit des Körpers trennt oben / unten

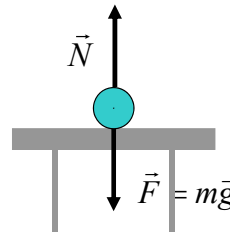
oben wirkt mg , unten wirkt $F_z > mg$



4.5.1 Normalkraft N

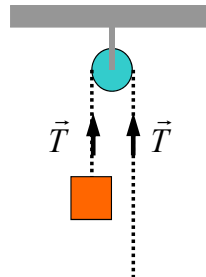
Wenn ein Körper nach unten gegen eine Oberfläche drückt, so verformt sich diese und wirkt auf den Körper mit der Normalkraft N entgegen.

$$\vec{N} = m\vec{g}$$



4.5.2 Zugspannung T

Wenn eine Kraft \vec{F} über eine Schnur auf einen Körper übertragen wird, dann wirkt eine Zugspannung \vec{T} auf die Schnur



Ideale Schur: masselos, dehnt sich nicht
ist nur eine Verbindung zum Körper

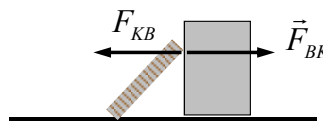
4.6 Drittes newtonsches Gesetz (actio = reactio)

Wenn zwei Körper miteinander wechselwirken, dann besitzen die Kräfte, welche die Körper aufeinander ausüben, denselben Betrag aber entgegengesetzte Richtung.

Kraft: Buch \rightarrow Kiste \vec{F}_{BK}

Kraft; Kiste \rightarrow Buch \vec{F}_{KB}

$$\text{Es gilt: } \vec{F}_{BK} = -\vec{F}_{KB}$$



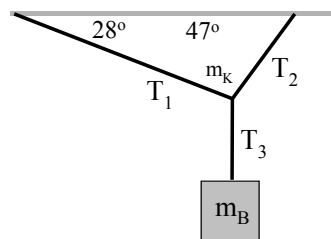
Kräfte bilden ein Kraft – Gegenkraft – Paar

Exp. Kräfte auf hängenden Block mit Federkraftmessern

Bsp. Block $m_B = 15 \text{ kg}$

Knoten $m_K = 0 \text{ kg}$

Frage: Zugspannung T in den Seilen ?



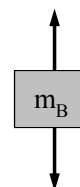
Lsg: i) Block allein betrachten

Nutze 2tes Newton'sches Gesetz und verbinde Kräfte mit Beschleunigung

$$T_3 - F_g = m_B a_B$$

$$T_3 - m_B g = m_B a_B = 0 \text{ da Block in Ruhe}$$

$$\rightarrow T_3 = m_B g = 15 \text{ kg } 9,81 \text{ m/s}^2 = 147 \text{ N}$$



Lsg. ii) Knoten betrachten:

2tes Newton'sches Gesetz: Summe der Kräfte = Masse x Beschleunigung.

$$T_1 + T_2 + T_3 = m_K a_K = 0 \quad \text{da Knoten in Ruhe d.h. } a_K = 0$$

$$T_1x + T_2x + T_3x = 0 \quad \text{x-Komponenten}$$

Gl.1) $-T_1 \cos 28^\circ + T_2 \cos 47^\circ + 0 = 0$

$$T_1y + T_2y + T_3 = 0 \quad \text{y-Komponenten}$$

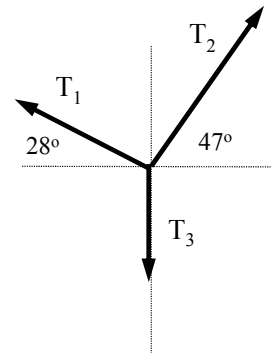
Gl.2) $T_1 \sin 28^\circ + T_2 \sin 47^\circ + T_3 = 0$

Aus 1) $T_1 = T_2 \cos 47^\circ / \cos 28^\circ$

In 2) $\sin 28^\circ T_2 \cos 47^\circ / \cos 28^\circ + T_2 \sin 47^\circ + T_3 = 0$

$$\rightarrow T_2 = -T_3 / (\cos 47^\circ + \tan 28^\circ \sin 47^\circ) = 134 \text{ N}$$

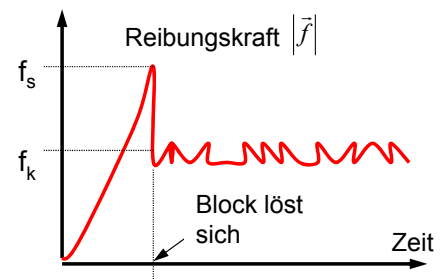
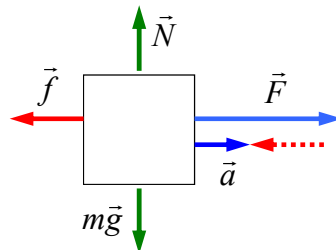
$$\rightarrow T_1 = 104 \text{ N}, \quad \rightarrow T_3 = 147 \text{ N}$$



4.7 Reibung

Reibung ist unvermeidbar, und unverzichtbar. Ein Auto verbraucht ca. 20% des Benzin's um Reibung zu überwinden, aber ohne Reibung würden die Räder durchdrehen, man könnte sich nicht fortbewegen, so wie auf dem Eis.

Exp. Block liegt auf einer horizontalen Tischplatte und wird mit von 0 ansteigender Kraft in x-Richtung gezogen. Federkraftmesser zeigt wirkende Kraft.



4.7.1 Eigenschaften der Reibung

Haftreibung: bewegt sich der Körper bei Kraftanwendung (horizontal) nicht, so heben sich Haftreibung \vec{f}_S und die parallel zur Oberfläche wirkende Kraft \vec{F}_x auf, d.h.

$$\vec{f}_S = -\vec{F}_x$$

Maximalbetrag von $\vec{f}_S = -\vec{F}_x$ berechnet sich aus: $f_{Smax} = \mu_S N$

μ_S : statischer Haftreibungskoeffizient, N : Normalkraft

- Mikroskopische Berührungsfläche ca. 10^{-4} der totalen Fläche
- Haftreibung durch Kaltverschweißung der berührenden Flächenteile und durch „Anheben“

Gleitreibung: Beginnt der Körper zu gleiten, so verringert sich die Reibungskraft auf den Wert:

$$f_k = \mu_k N \quad \rightarrow \mu_k < \mu_S$$

μ_k : kinetischer Reibungskoeffizient

Beachte:

- die Normalkraft N stellt ein Maß für den Andruck des Körpers auf die Fläche dar.
- \vec{f} immer parallel zur Oberfläche und \vec{N} immer senkrecht zur Oberfläche
- Koeffizienten μ sind dimensionslos, gelten zwischen 2 Flächen
z.B. μ_S : zwischen Ei & Teflonpfanne = 0,04,
zwischen Bergschuh & Fels = 1,2

Bsp. ABS-System Bremsweg kürzer, da $f_s > f_k$ und Kurvenfahrt bei Bremsvorgang möglich

Bsp. Ein Kind zieht einen mit der Masse $m = 75 \text{ kg}$ beladenen Schlitten mit konstanter Geschwindigkeit über horizontale Eisfläche. Gleitreibungskoeffizient zwischen Kufen & Eis $\mu_k = 0,10$, Seil im Winkel von 42° .

F46a/b

Frage Kraft (Zugspannung) des Seils auf Schlitten?

Lsg. $v = \text{konst} \rightarrow a = 0$

\vec{f}_k verhindert Beschleunigung

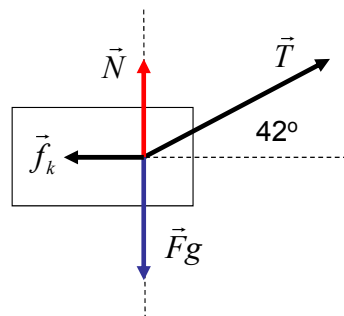
$\vec{N} \neq mg$, Normalkraft durch Schnee unbekannt, da bewegt!

F46a

$$\vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_g + \vec{f}_k = 0$$

x-Achse: $T_x + 0 + 0 + f_k = 0$
 $T \cos 42^\circ - \mu_k N = 0$

y-Achse $T_y + N - F_g + 0 = 0$
 $T \sin 42^\circ + N - mg = 0$



Zwei Gl. mit 2 Unbekannten, x-Gl. nach N auflösen, in y-Gl. einsetzen

$$T = \frac{\mu_k mg}{\cos 42^\circ + \mu_k \sin 42^\circ} = 91 \text{ N}$$

F46b

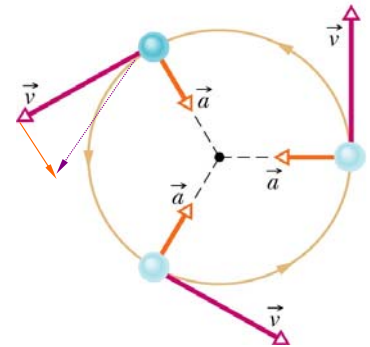
Frage: Zugspannung wird über 91 N vergrößert. Wie verhält sich der Betrag von f_k ?

Lsg: mit $f_k = \mu_k N$
 Mit y-Gl. $T \sin 42^\circ + N - mg = 0$
 $f_k = \mu_k N = \mu_k (mg - T \sin 42^\circ)$

f_k wird kleiner mit wachsendem T weil Seil nach oben zeigt

4.8 Gleichförmige Kreisbewegung

- bedeutet:
- Bahn des Teilchens ist ein Kreis
 - Betrag der Geschwindigkeit $|\vec{v}|$ ist konstant
 - Richtung von \vec{v} zeigt immer tangential zur Kreisbahn



4.8.1 Zentripetalbeschleunigung

- $|\vec{a}| = a = \frac{v^2}{r}$ $r = \text{Radius}$
- \vec{a} zeigt immer auf Kreismittelpunkt

4.8.2 Zentripetalkraft

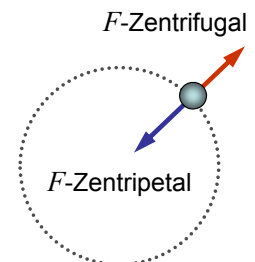
Eine Zentripetalkraft beschleunigt einen Körper auf eine Kreisbahn, indem sie nur die Richtung seiner Geschwindigkeit, nicht aber den Betrag ändert.

$$F = mv^2/r \quad \text{Betrag der Zentripetalkraft}$$

Ist eine Trägheitskraft (Fliehkraft), resultiert aus drittem Newton'schen Gesetz actio = reactio und ist der Zentrifugalkraft entgegengesetzt.

4.8.3 Zentrifugalkraft:

- Exp.**
- Fliehkraftregler
 - Erdabplattung
 - fliegende Kugeln in rotierender Schiene, Kugelhöhe ist unabh. von der Masse
 - Zentrifuge



Bsp. Auto fährt durch Kurve:

Zentripetalkraft: Reibung zwischen Reifen und Straße zwingt das Auto auf die Kreisbahn.

Zentrifugalkraft: Fahrer rutscht zur Seite (Trägheit), weil Reibung zwischen Sitz / Fahrer für notwendige Zentripetalkraft zu gering

Zentripetalkraft: Wand drückt auf Fahrer, zwingt ihn auf den Kreis

Bsp. Auto der Masse 1300 kg fährt in Kurve mit Radius $r = 15 \text{ m}$ und Reibung $\mu_k = 1,1$.

Frage: Wie schnell darf es maximal durch die Kurve fahren, ohne wegzurutschen?

$$\text{Lsg: } F_z = N \rightarrow \frac{mv^2}{r} = mg\mu$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{g\mu r} = \sqrt{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 1,1 \cdot 15 \text{ m}} = 12,7 \text{ m/s} = 46 \text{ km/h}$$

Frage: Wohin bewegt sich das Auto, wenn die Bodenhaftung verloren geht?

Lsg: tangential, da F_z fehlt, um es auf den Kreis zu ziehen

5. Arbeit & Energie

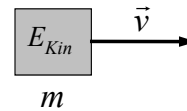
Die Newton'schen Gesetze ermöglichen uns die Analyse beliebiger Bewegungen. Oft ist die Analyse aber kompliziert und man kennt nicht alle Details der Bewegung, z.B. Berg-Talfahrt. Eine effektive Technik ist die Betrachtung der Energie dieses Systems. Sie lässt sich auf chemische oder biologische Funktionen ausdehnen.

5.1 Kinetische Energie

Ein Objekt der Masse m und Geschwindigkeit v besitzt die kinetische Energie E_{kin}

$$E_{Kin} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$[E_{Kin}] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2 = 1 \text{ J, Joule}$$



Die kinetische Energie ist eine skalare Eigenschaft eines bewegten Körpers.

5.2 Arbeit W

wenn eine Kraft auf das Objekt wirkt, so dass es beschleunigt (gebremst) wird, so verändert sich seine kinetische Energie. Die Kraft hat dann Arbeit an diesem Objekt verrichtet.

- Arbeit ist übertragene Energie
- skalare Größe wie die Energie
- Einheit [W] = [Ekin] = Joule

Beachte:

- i) Energie wird zu / abgeführt, ohne dass Materie zu / abgeführt wird.
- ii) alltäglicher Arbeitsbegriff beinhaltet jede Form der mentalen, körperlichen Anstrengung, ist aber meist nicht Arbeit im physikalischen Sinn. Bsp. gegen eine Hauswand drücken kostet Arbeit, man wird müde, aber es wird keine Energie auf die Wand übertragen, da sie sich nicht bewegt
→ physikalisch keine Arbeit.

5.3 Arbeit & kinetische Energie

Bsp. Ein Ring gleitet reibungsfrei über einen Draht; konstante Kraft beschleunigt ihn entlang der x-Richtung...

$$F_x = m a_x \quad (\text{mit } F_x = F \cos \phi)$$

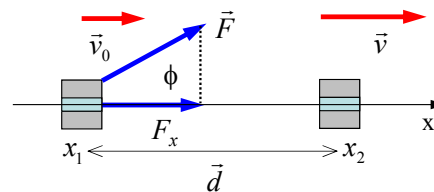
...von Anfangsgeschwindigkeit v_0 nach v , über die Strecke d

aus Kapitel 1.4.2: $v^2 = v_0^2 + 2 a_x d$

$$\rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2d}$$

$$\rightarrow F_x = m \left(\frac{v^2 - v_0^2}{2d} \right)$$

$$\rightarrow F_x d = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$



$$W = F \cos \Phi d$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

(Skalarprodukt)

Energietransfer, durch Kraft verursacht

Endenergie

Anfangsenergie

Arbeit W: berechnet sich nur aus der Kraft entlang des Weges der Verschiebung d .

Beschleunigungsarbeit ist als kinetische Energie in der Masse gespeichert.

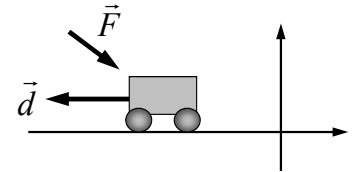
Vorzeichen: i) $W > 0$ wenn \vec{F} -Komponente in Richtung der Verschiebung d besitzt - Objekt gewinnt Energie

ii) $W < 0$ wenn \vec{F} -Komponente entgegen der Verschiebung d besitzt - Objekt gibt Energie ab

iii) $W = 0$ wenn \vec{F} senkrecht auf \vec{d}

Bsp. Auto rollt über Straße, Motor ist aus
Wind bläst mit konstanter Kraft

$$\vec{F} = 2N \vec{e}_x - 6N \vec{e}_y \text{ dagegen.}$$



Frage: Arbeit des Windes am Auto auf der Strecke: $\vec{d} = -3m \vec{e}_x + 0m \vec{e}_y$

$$\begin{aligned} \text{Lsg. } W &= \vec{F} \cdot \vec{d} \\ &= (2N \vec{e}_x - 6N \vec{e}_y) \cdot (-3m \vec{e}_x) \\ &= (2N \vec{e}_x) \cdot (-3m \vec{e}_x) - (6N \vec{e}_y) \cdot (0m \vec{e}_y) \\ &= 6J + 0J = -6J \end{aligned}$$

→ die Kraft des Windes entzieht dem Auto auf der Strecke $d = 3m$ eine Energie von 6 J.

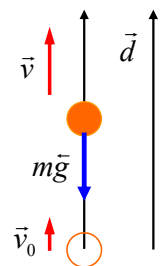
5.4 Arbeit durch Gravitationskraft

Tomate wird mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 nach oben geworfen

$$\rightarrow E_{kin-0} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Gravitation bremst auf der Strecke (Verschiebung) \vec{d} ab

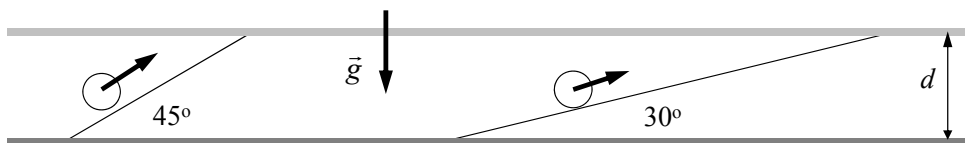
$$\begin{aligned} W &= m\vec{g} \cdot \vec{d} \\ &= mg d \cos \phi \quad \text{von Gravitation verrichtete Arbeit} \end{aligned}$$



Aufwärts: $\phi = 180^\circ \rightarrow W = m g d (-1) \rightarrow W < 0$: Energie der Tomate wird abgeführt
Tomate wird langsamer

Abwärts: $\phi = 0^\circ \rightarrow W = m g d (1) \rightarrow W > 0$: Energie wird der Tomate zugeführt
Tomate wird schneller

Bsp: zwei identische Bälle werden über unterschiedliche Rampen auf gleiche Höhe gezogen. Frage
Bei welcher Rampe wird mehr Arbeit verrichtet?



Lsg. beide gleich, kommt nur auf senkrechte Komponente an (Höhe) da $W = m \vec{g} \cdot \vec{d}$

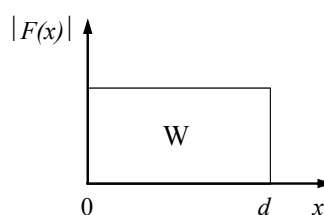
5.5 Arbeit durch konstante und veränderliche Kräfte

F47a/b

Fall 1: Kraft $F(x)$ = konstant über dem Weg x

$$W = \vec{F} \cdot \vec{x} = Fd \quad \text{mit } \vec{F} \text{ parallel } \vec{x}$$

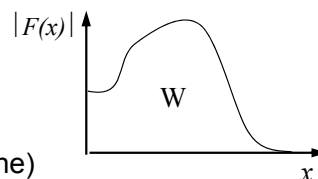
Interpretation: Fläche unter Kurve $F(x)$



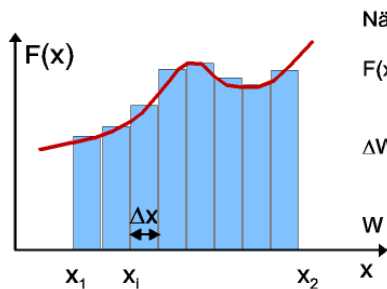
Fall 2: Kraft-Betrag $|F(x)|$ ändert sich mit dem Ort aber Richtung konstant

W = Fläche unter der Kurve $F(x)$

W = Integral über $F(x)$ (kommt später in Mathe)



F47a/b

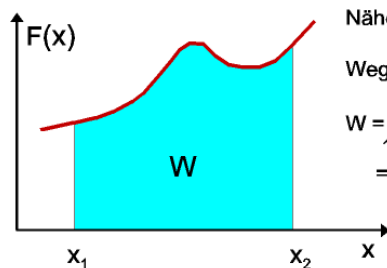


Näherung:

$F(x_i)$ = konstant im Segment i
über kleinen Weg Δx

$\Delta W_i = F(x_i) \Delta x$ Arbeit in Segment i
auf kleinem Weg Δx

$W = \sum \Delta W_i = \sum F(x_i) \Delta x$ Gesamtarbeit



Näherung verbessern: Integrieren

Weg $\lim \Delta x \rightarrow 0$

$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$ Gesamtarbeit

$= W(x_2) - W(x_1)$ Arbeit von x_1 nach x_2

5.6 Federkraft

Dehnt oder staucht man eine Feder um Strecke d , so wirkt eine entgegengesetzte Kraft mit

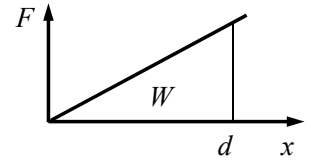
F48

$$\vec{F} = -k \vec{d}$$

Hook'sches Gesetz
 k = Federkonstante

Arbeit durch Federkraft

Feder wird um Strecke d gestaucht oder gedehnt



W = Fläche unter der Kurve $F(x)$

$$W = \frac{1}{2} \vec{F} \cdot \vec{d} = \frac{1}{2} F d$$

da Kraft und Weg parallel

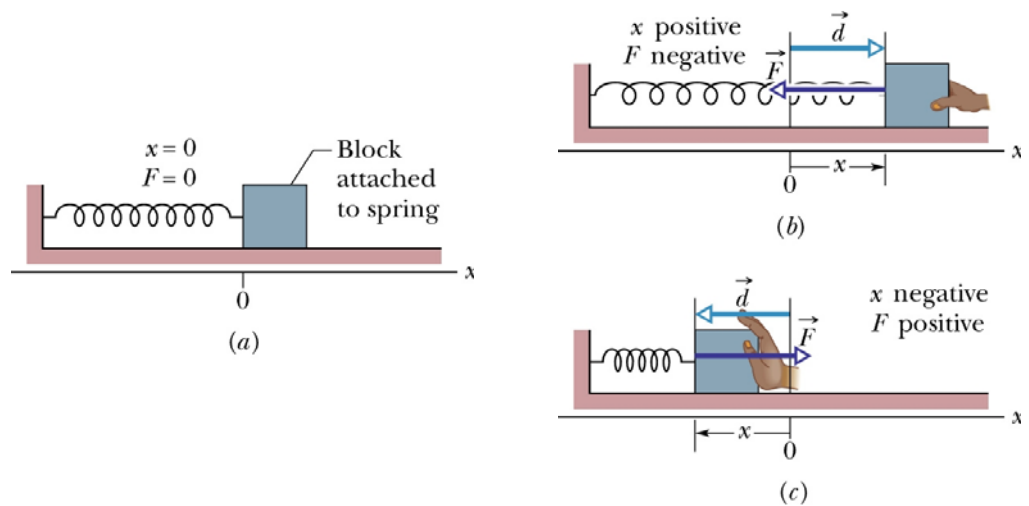
$$W = \frac{1}{2} k d^2$$

mit $F = kd$, Dreiecksfläche

$$E_{\text{Feder}} = \frac{1}{2} k d^2$$

Federenergie ist gespeicherte Dehnungsarbeit

Exp. 1) Block an Feder, ziehen / stauchen



5.7 Leistung P

Ein Bauunternehmer möchte Dachziegel vom LKW auf das Dach eines Hauses befördern. Dazu benutzt er eine Seilwinde, welche die nötige Kraft zum Heben der Ziegel aufbringt. Wir können die Arbeit der Seilwinde bestimmen. Wichtiger für den Unternehmer ist aber die Rate, also Arbeit pro Zeit, d.h. ob er 5 min. oder 5 Tage benötigt.

$$P = \Delta W / \Delta t$$

durchschnittliche Leistung = Arbeit pro Zeit

$$P = dW/dt$$

momentane Leistung

$$[P] = \text{J/s} = \text{W}$$

Watt (James Watt)

$$1 \text{ PS} = 735 \text{ W}$$

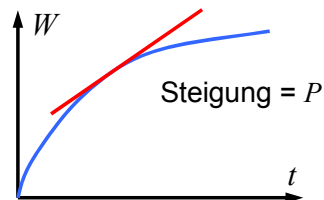
Pferdestärken

Interpretation

- 1) $\Delta W = P \Delta t$ Arbeit = Leistung x Zeit
- 1 Kilowattstunde = 1 kW x h
 = 1000 W x 3600s
 = 3,60 MJ (Mega-Joule)

- 2) Leistung = Ableitung der Arbeit nach der Zeit

Leistung ist die Rate, mit der die angelegte Kraft Arbeit verrichtet.



Leistung & Kraft

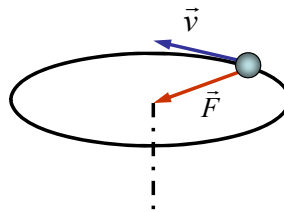
$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{(F \cos \theta dx)}{dt}$$

$$= F \cos \theta v \quad (\text{wenn } F, \theta \text{ zeitlich konstant, dann})$$

$$= \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (\text{Skalarprodukt})$$

- Bsp.** ein Klotz ist am Seil befestigt und bewegt sich in gleichförmiger Kreisbewegung

Frage Wie groß ist die von der Kraft bewirkte Leistung auf den Klotz?



Lsg. Null, da Zentripetalkraft \vec{F} senkrecht auf v , bzw dx !

5.8 Energieerhaltung

5.8.1 Potenzielle Energie E_{pot}

System: Teilchen bewegt sich im Kraftfeld von x_1 nach x_2

Ziel: Energieerhaltungssatz so aufstellen, dass Umwandlung von kinetischer in gespeicherte, potenzieller Energie des Systems möglich wird

Ziel: potenzielle Energie definieren

Geht, wenn Kraft $\vec{F}(x)$ zeitlich konstant, und Prozesse umkehrbar (reversibel).

Geht nicht, wenn Energie in Reibungswärme gewandelt und verloren wird.

Dann ist die Arbeit $W = \Delta E_{\text{pot}} =$ Änderung der potenziellen Energie des Systems

$$W = \Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}}(x_2) - E_{\text{pot}}(x_1)$$

Arbeit hängt nur von Anfangs (x_1) und Endpunkt (x_2) ab, nicht aber vom Weg, der von x_1 nach x_2 führt

5.8.2 Potenzielle Energie der Gravitation

System: Ball – Erde: Gravitation verrichtet Arbeit am Ball auf dem vertikalen Weg $y_1 \rightarrow y_2$,

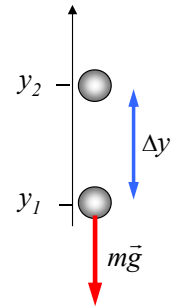
Die potenzielle Energie ändert sich um:

$$\Delta E_{pot} = mg(y_2 - y_1) = mg \Delta y$$

$$E_{pot}(y) = mgy \quad \text{Referenzpunkt } y_1 = 0, y_2 = y$$

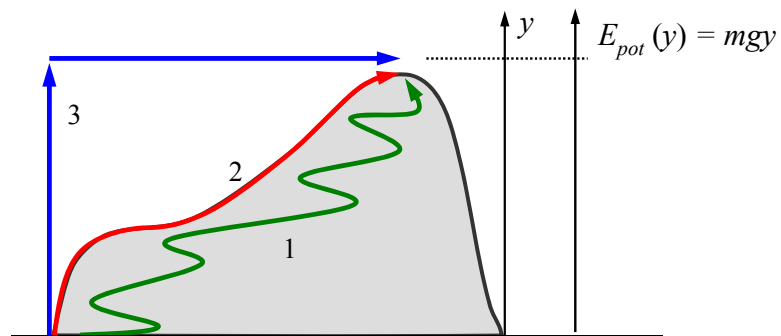
Die potenzielle Energie $E_{pot}(y)$ des Systems Teilchen – Erde hängt nur von der vertikalen Position (Höhe y) des Teilchens relativ zum Referenzpunkt $y_1 = 0$ ab, nicht von der horizontalen Position.

→ Arbeit unabhängig vom Weg (1), (2), (3)



F49

F49



5.8.3 Elastische potenzielle Energie

Ziehen oder Stauchen der Feder ändert ihre elastische potenzielle Energie

$E_{pot} = E_{Feder}$ um:

$$E_{pot}(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

Referenzpunkt: Feder entspannt bei $x = 0$

5.8.4 Energieerhaltung am Pendel

Qualitative Diskussion der Energieumwandlung

F50

oben: $E_{kin} = 0$, $E_{pot} = \max$

→ Gravitationskraft beschleunigt auf dem Weg nach unten:

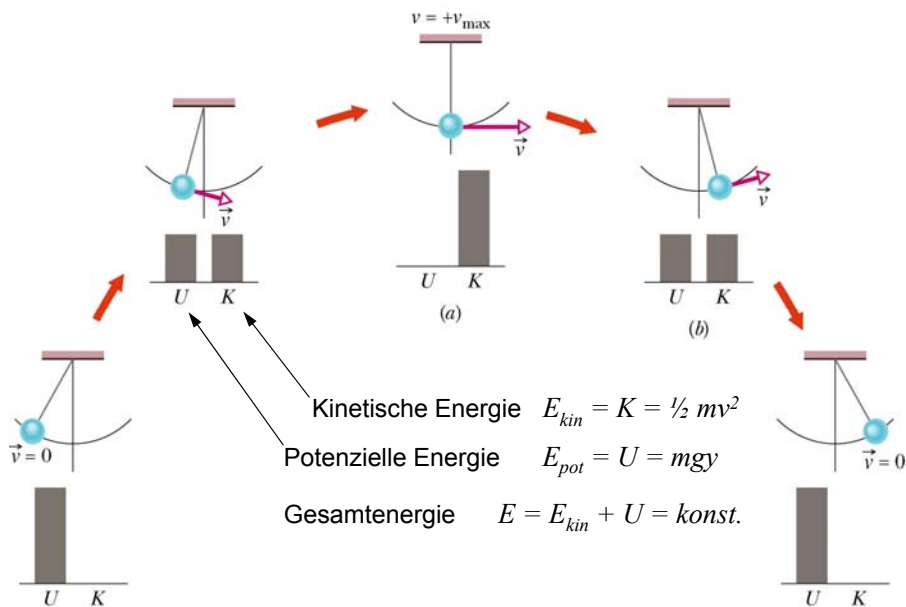
→ E_{kin} wächst, E_{pot} nimmt ab

unten: $E_{kin} = \max$, $E_{pot} = 0$

Weg nach oben: E_{kin} nimmt ab, E_{pot} nimmt zu, Gravitationskraft bremst ab

Energieerhaltung am Pendel

F50



5.8.5 Energieerhaltungssatz

- Wenn gilt:
- 1) System ist abgeschlossen
 - 2) Umwandlung der Energieformen durch reversible Prozesse

Dann ist die mechanische Energie eines Systems eine Erhaltungsgröße:

$$E_{mech} = E_{kin} + E_{pot} = \text{konstant}$$

also: $E_{mech-1} = E_{kin-1} + E_{pot-1}$, $E_{mech-2} = E_{kin-2} + E_{pot-2}$

$$\Delta E_{mech} = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} = 0$$

Ist die mechanische Energie eine Erhaltungsgröße, so kann man E_{kin} & E_{pot} zu allen Zeiten verbinden, ohne die dazwischen liegende Bewegung u. Kräfte zu berücksichtigen.

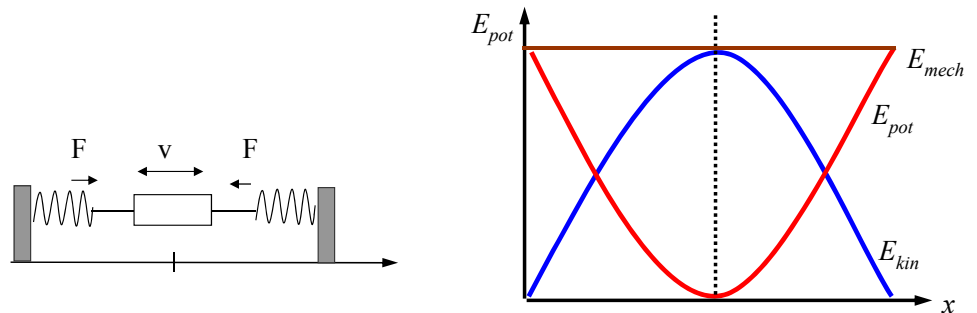
5.8.6 Energieerhaltung bei Federkräften

Potenzielle Energie $E_{pot} = \frac{1}{2} kx^2$

Kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2} mv^2$

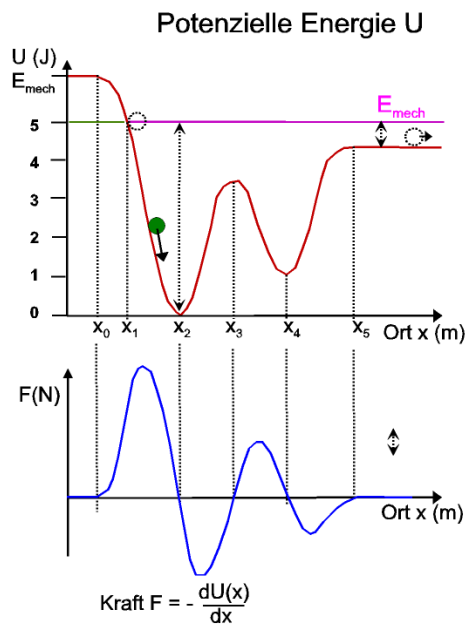
Gesamtenergie $E_{mech} = E_{kin} + E_{pot} = \text{konstant}$

F51a/b



Exp. Luftkissenbahn, Wagen zwischen 2 Federn gespannt, schwingt um die Nullposition,

F51b



$U(x) + E_{kin} = E_{mech} = \text{konstant}$

$\Rightarrow E_{kin} = E_{mech} - U(x)$

$E_{kin} = 0$ bei x_1 , Start

$= E_{mech} = \text{max}$ bei x_2

$= 0,5 \text{ J konstant}$ für $x > x_5$

Umkehrpunkt: x_1

Gleichgewicht:

a) indifferent $x < x_0, x > x_5$

b) stabil x_2, x_4

c) instabil x_3

da $E_{kin} \geq 0 \Rightarrow x \geq x_0$

H.-Ch. Mertins
Abb810.dsf

5.8.7 Energieerhaltung & abgeschlossene Systeme

„Die Gesamtenergie E_{mech} eines abgeschlossenen Systems kann sich nicht verändern.

$$E_{mech} = E_{kin} + E_{pot-elas} + E_{pot-grav} + E_{therm} + E_{int}$$

Lösungsstrategie zur Energieerhaltung:

- welche Objekte gehören zum System ?
- sind die Prozesse umkehrbar (reversibel), d.h. gibt es keine Reibung, Strömungswiderstand ?
- ist das System abgeschlossen?
- was sind Anfangs- und Endzustand des Systems ?
- was ist der Referenzpunkt der potenziellen Energie?

Bsp. Bunjeespringerin, $m = 61 \text{ kg}$, Höhe über Fluß 45 m
 Seil $L = 25 \text{ m}$ (entspannt)
 erfüllt Hook'sches Gesetz mit $k = 160 \text{ N/m}$

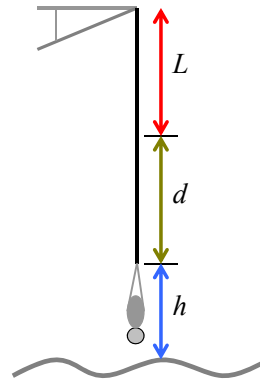
Frage: Abstand ihrer Füße vom Wasser, wenn sie am tiefsten Punkt ankommt?

Idee: Energieerhaltung anwenden,

Voraussetzung: nur konservative Kräfte übertragen Energie

Kräfte: Gravitation, Federkraft je konservativ, Luftwiderstand sei 0

System: Springerin – Erde – Seil



$$\Delta E_{kin} + \Delta E_{pot-elas.} + \Delta E_{pot-grav} = 0$$

F52

F52



Bsp. Bunjeespringerin

Berechne Seildehnung d aus Energieänderungen zwischen Extrempunkten (oben, unten)

$$\Delta E_{kin} = 0 \quad \text{für oben u. unten}$$

$$\Delta E_{pot-grav} = -mg(L + d)$$

$$\Delta E_{pot-elas.} = \frac{1}{2}kd^2$$

$$\rightarrow 0 + \frac{1}{2}kd^2 - mgL - mgd = 0 \quad (\text{quadratische Gleichung})$$

$$\rightarrow d^2 - \frac{2mgL}{k} - \frac{2mgd}{k} = 0 \rightarrow d = 17,9\text{m}$$

$$\rightarrow h = 45\text{m} - L - d = 2,1\text{m} \quad \text{über dem Wasser.}$$

6 Impuls

6.1 Ein Teilchen

Ein Teilchen mit der Masse m und Geschwindigkeit v hat den Impuls:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \vec{p} \text{ immer parallel zu } \vec{v}$$

was ist die zeitliche Änderung des Impulses?

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}mv = m \frac{dv}{dt} = ma \quad \text{wenn Masse } m = \text{konstant}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{Zweites Newton'sches Axiom:}$$

Wenn eine Kraft auf das Teilchen wirkt, ändert sich sein Impuls.

6.2 Impulserhaltung

Betrachte System aus n Teilchen, die untereinander in Wechselwirkung treten können und äußere Krafteinwirkung erfahren können.

Der Gesamtimpuls des Systems ist:

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n \\ &= m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n\end{aligned}$$

„Wirkt keine äußere Kraft auf ein geschlossenes & isoliertes Teilchensystem und ist die Teilchenzahl (Gesamtmasse) konstant, dann ist auch der Gesamtimpuls konstant“

$$\vec{p} = \text{konstant} \quad \text{d.h.} \quad \vec{p}_i = \vec{p}_f$$

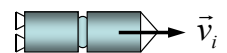
Anfangsimpuls i gleich Endimpuls f (i : initial, f : final)

Beweis wenn keine äußere Kraft vorhanden ist, gilt:

$$0 = \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow P = \text{konstant}$$

- Beachte: 1) innerer Kräfte zwischen den Teilchen eines System ändern zwar die einzelnen Impulse p_i , nicht aber den Gesamtimpuls P .
- 2) Bei Rechnung wird Impulserhaltung komponentenweise betrachtet.

Bsp. Weltraumtransporter sprengt Lastmodul ab



- Bewegen sich geradlinig auf die Sonne zu
- Gesamtmasse M , Lastmodul $m = 0,2 M$
- Anfangsgeschwindigkeit: $v_i = 2100 \text{ km/h}$ relativ zur Sonne
- Nach Abtrennung: Transporter ist um 500 km/h schneller als das Lastmodul
- Frage: Wie schnell ist der Raumtransporter relativ zur Sonne?



Lsg. Impulserhaltung gilt: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$
 Anfangsimpuls: $P_i = M v_i$
 Endimpuls: $P_f = (0,2 M) v_{LM} + (0,8 M) v_{RT}$
 Relativgeschw. $v_{LM} = v_{RT} - 500 \text{ km/h}$

$$\begin{aligned}\rightarrow M v_i &= 0,2 M (v_{RT} - 500 \text{ km/h}) + 0,8 M v_{RT} \\ \rightarrow v_{RT} &= v_i + 0,2 \times 500 \text{ km/h} = \underline{\underline{2200 \text{ km/h}}}\end{aligned}$$

6.3.2 Elastische Stöße

Stoß mit ruhendem Objekt

- Exp.** Pendelgestell: eine Kugel schwingt gegen die linke Seite,
 → rechts hebt sich eine Kugel
- zwei Kugeln stoßen links
 → zwei Kugeln heben sich rechts

„Beim elastischen Stoß bleibt die gesamte kinetische Energie des Systems erhalten, die kinetische Energie der einzelnen Teilchen kann sich ändern.“

Bei elastischen Stößen nutzt man immer Energie- & Impulserhaltung!

Frage Warum ruht die erste Kugel (Billiard) ?

Lsg. a) Impulserhaltung $m_1 v_{1i} + 0 = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$

b) Energierhaltung $\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$

Fall: gleiche Massen $m_1 = m_2 = m$

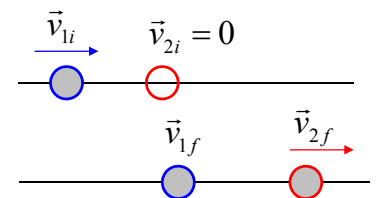
aus a: → $v_{2f} = v_{1i} - v_{1f}$

aus b: → $v_{1i}^2 - v_{1f}^2 = v_{2f}^2$

v_{2f} ersetzen: → $(v_{1i} + v_{1f})(v_{1i} - v_{1f}) = (v_{1i} - v_{1f})^2$

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{1i} - v_{1f}$$

$$v_{1f} = 0$$



Stoß mit ruhendem Objekt allgemein:

aus Energie- & Impulserhaltung: $v_{1f} = v_{1i} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ $v_{2f} = v_{1i} \frac{2m_1}{m_1 + m_2}$

Spezialfälle:

1) Gleiche Massen: $m_1 = m_2$ → $v_{1f} = 0$, $v_{2f} = v_{1i}$
 unser Experiment, Billiard

2) schweres Ziel: $m_2 \gg m_1$ → $v_{1f} \approx -v_{1i}$, $v_{2f} \approx v_{1i} \cdot 2m_1 / m_2$
 Perle gegen Kanonenkugel

3) schweres Geschöß: $m_1 > m_2$ → $v_{1f} \approx v_{1i}$, $v_{2f} \approx 2v_{1i}$

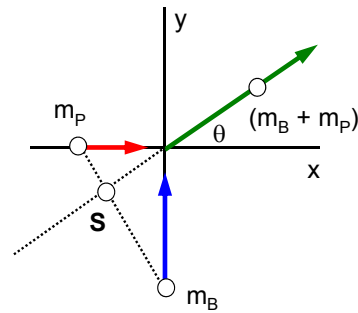
Faktor 2 in 2) durch Richtungsumkehr des leichten Balls $v \rightarrow -v$,
 in 3) von $v = 0 \rightarrow 2v$

6.3.3 inelastische Stöße

Bsp. Zwei Schlittschuläufer stoßen zusammen und halten sich fest

Paul $m_P = 83 \text{ kg}$, $v_{iP} = 6,2 \text{ km/h}$ in x-Richtung

Barbara $m_B = 55 \text{ kg}$, $v_{iB} = 7,8 \text{ km/h}$ in y-Richtung



Frage: Geschw. des Paares nach Zusammenstoß ?

F54

Lsg: System ist abgeschlossen (kein Massenverlust) und isoliert (keine Reibung)

F55a-d

F54

Lsg. Zwei Schlittschuläufer

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

$$m_P \vec{v}_{Pi} + m_B \vec{v}_{Bi} = (m_P + m_B) \vec{v}_f \quad \vec{v}_f = \text{gemeinsame Geschw.}$$

x-Achse: $m_P v_{Pi} + m_B \cdot 0 = (m_P + m_B) v_f \cos \theta$

Gl. durcheinander teilen, da 2 Unbekannte

y-Achse: $m_P \cdot 0 + m_B v_{Bi} = (m_P + m_B) v_f \sin \theta$

$$\rightarrow \tan \theta = \frac{m_B v_{Bi}}{m_P v_{Pi}} = 0,834$$

$$\rightarrow \theta = 39,8^\circ$$

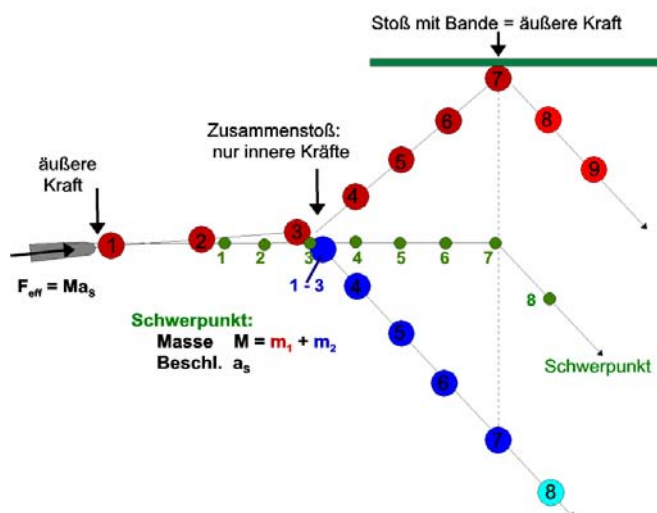
aus y-Richtung $\rightarrow v_f = \frac{m_B v_{Bi}}{(m_P + m_B) \sin \theta} = 4,86 \text{ km/h}$

Frage: wie läuft der Schwerpunkt vor / nach dem Stoß ?

Lsg. keine äußere Kraft, also v_s identisch vor / nach dem Stoß
 \rightarrow Umgekehrtes Billiardproblem

F55b

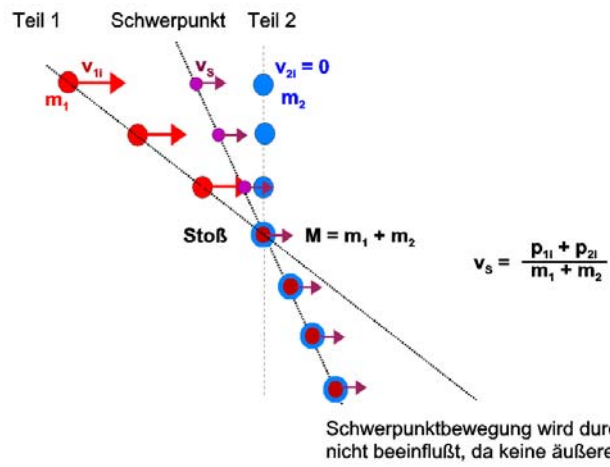
Schwerpunktsbewegung eines Teilchensystems



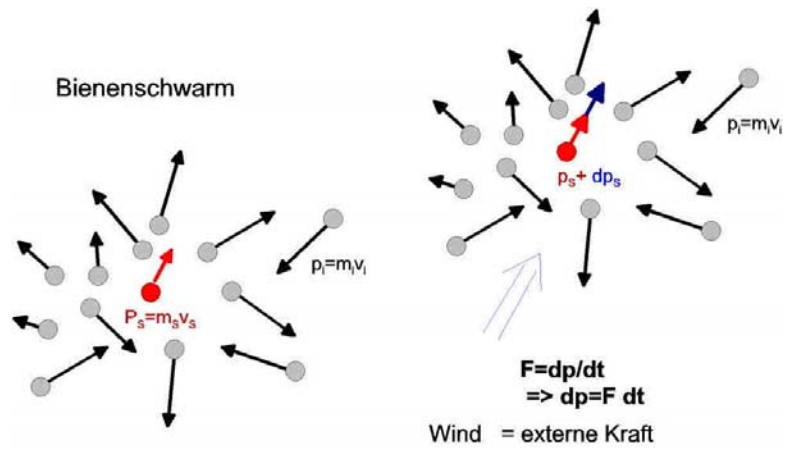
inelastische Stöße

F55c

Inelastischer Stoß: Schwerpunktbeziehung



F55d



7. Rotation

Alle Bewegungsformen lassen sich aus Translations- und Rotationsbewegungen aufbauen.

Wir betrachten starren Körper mit fester Drehachse (keine Bowlingkugel).

Beschreibung: Translationsbewegung ist eindeutig beschrieben durch Ort $x(t)$

→ Rotationsbewegung ist eindeutig beschrieben durch Winkel $\Theta(t)$

7.1 Drehwinkel:

$$\Theta = s/r$$

$[\theta] = \text{rad}$ Bogenmaß

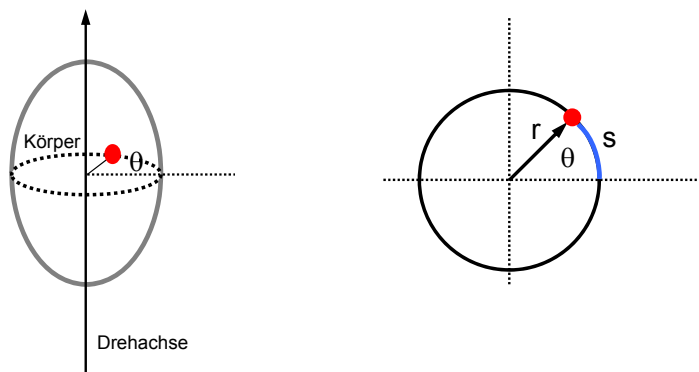
$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

$\theta < 0$ im Uhrzeigersinn

$\theta > 0$ gegen Uhrzeigersinn

Beschreibung gilt nicht nur für einen Punkt des starren Körpers, sondern für alle Punkte!

Beachte: Winkel müssen immer in rad angegeben werden, auch wenn die Bezeichnung rad meist nicht mitgeschrieben wird.

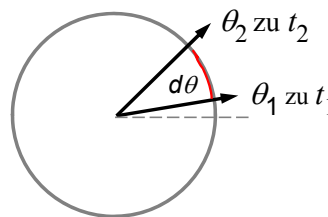


7.2 Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = d\theta / dt$$

$$[\omega] = \text{rad} / \text{s},$$

$$1 \text{ U/min} = 2\pi/60 \text{ s}$$



7.3 Winkelbeschleunigung:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$[\alpha] = \text{rad} / \text{s}^2$$

Bsp. Drehende Scheibe: sei: $\theta(t) = -1 - 0,6t + 0,25t^2$ $[t] = \text{s}$, $[\theta] = \text{rad}$

Frage: $\theta(t)$, z.B für $t = -2 \text{ s}$

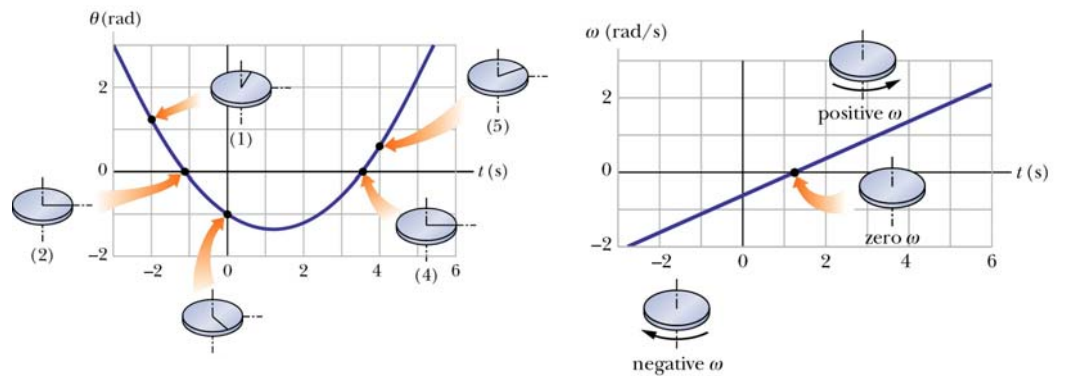
Lsg. $\theta(-2) = -1 + 0,6 \cdot 2 + 0,25 \cdot (-2)^2 = 1,2 \text{ rad} = 1,2 \frac{360^\circ}{2\pi} = 69^\circ$

Zeichne $\theta(t)$ für $-3\text{s} < t < 6\text{s}$

Winkelgeschwindigkeit als Funktion der Zeit: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = -0,6 + 0,5t$

Winkelbeschleunigung:

F57



7.4 Rotation bei konstanter Winkelbeschleunigung

Rotationen bei konstanter Winkelbeschleunigung lassen sich analog den Gleichungen von Translationsbewegungen mit konstanter Beschleunigung ausdrücken.

Translations-	Unbekannte		Rotations-Gleichung	
1. $v(t) = v_0 + at$	$x - x_0$	$\theta - \theta_0$	$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$	} Lernen!
2. $x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$	v	ω	$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$	
3. $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	t	t	$\omega^2(t) = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$	
4. $x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	a	α	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$	
5. $x - x_0 = vt - \frac{1}{2} at^2$	v_0	ω_0	$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2} \alpha t^2$	

Bsp: Frage: können obige Gleichungen angewendet werden auf:

$\theta(t) = -5t^3 + 27t^2 - 4,$ nein, denn $\alpha = \theta^2(t)/dt^2 = -15t + 54$

$\theta(t) = -5t^2 + 27t + 1,$ ja, denn $\theta^2(t)/dt^2 = -10 = \text{konstant}$

7.5.1 Rotation & Translation

Bei Rotation eines starren Körpers um eine Drehachse legen alle Punkte den selben Winkel pro Zeiteinheit zurück.

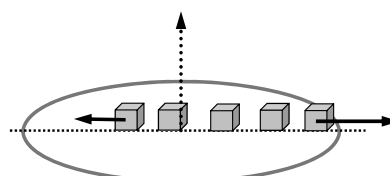
Die zurückgelegte Strecke, Geschwindigkeit steigt aber mit dem Umfang also mit dem Abstand vom Zentrum (Drehachse). Beispiel Karussell

Exp. rotierende Scheibe mit Klötzen

Bei Anstieg von ω rutschen zuerst die äußeren Klötze

- 1) Bezugssystem Raum
- 2) Bezugssystem Scheibe, Kamera dreht mit

Gesucht: Zusammenhang zwischen Rotations- und Translationsgrößen.

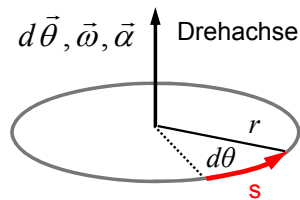


Rotation & Vektoren

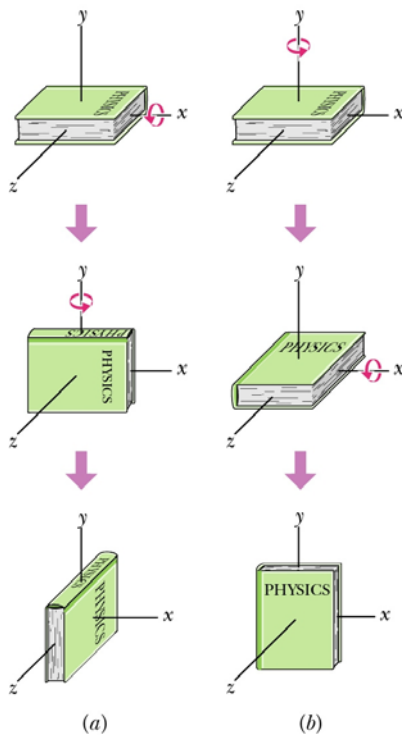
Größe	Vektorrichtung	Orientierung
Geschwindigkeit $\vec{\omega}$	Drehachse	rechte Hand Regel
Beschleunigung $\vec{\alpha}$	Drehachse	rechte Hand Regel
Winkel <u>nur kleines</u> $d\vec{\theta}$	Drehachse	rechte Hand regel

Beachte: Für große Winkel ist θ kein Vektor, denn das Kommutativgesetz gilt nicht bei Addition der Drehwinkel. Die Reihenfolge der Rotationen ist wichtig!

F58



F58



Nur für kleine Werte verhält sich der Rotationswinkel wie ein Vektor.
Die Reihenfolge der Addition, d.h. der Drehungen spielt dann keine Rolle.

Ort

Punkt: $\vec{r} = |r|(\cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y)$ $r = \text{Radius}$ F59a

Kreisbogen: $d\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$
 $d\vec{r} = d\vec{\theta} \times \vec{r}$ $d\vec{\theta}$ in Richtung der Drehachse, nur kleines $d\vec{\theta}$

Betrag: $dr = d\theta \cdot r$ Bezeichnung in Büchern oft $\vec{s} = d\vec{r}$

Geschwindigkeit

F59b

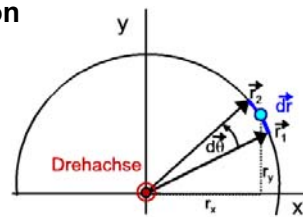
Vektor: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Betrag: $v = \omega r$ (ohne Beweis)

ω konstant für alle Punkte des Körpers, aber v nimmt mit Abstand von der Drehachse zu.

F59b

Rotation

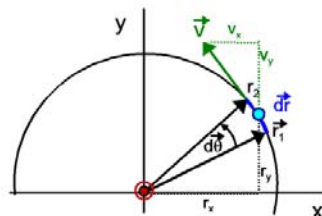


Ort

$\vec{r} = r(\cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y)$ Ort

$d\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ Bogensegment

$d\vec{r} = d\vec{\theta} \times \vec{r}$ wenn $d\theta \ll 1$



Geschwindigkeit

$\vec{v} = d\vec{r}/dt = \omega r(-\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y)$

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Beschleunigung

F59c

Vektor: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt}$

Skalar: $a = \frac{d\omega}{dt} \cdot r + \omega \frac{dr}{dt}$ (Produktregel)

$a = \frac{d\omega}{dt} \cdot r + \omega \left(r \cdot \frac{d\theta}{dt} \right)$

$a = \alpha \cdot r + \omega^2 r$

$a = \text{tangentele} + \text{radiale Beschleunigung}$

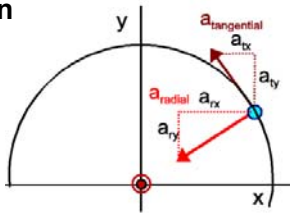
$a_{\text{tangential}}$ Proportional Geschwindigkeitsänderung

a_{radial} tritt auch bei konstanter Geschwindigkeit auf
 mit $\omega = v/r \rightarrow \omega^2 r = v^2/r$ Zentripetalbeschleunigung

Beschleunigung

F59c

Rotation



Beschleunigung

$$\vec{a} = d\vec{v}/dt$$

$$= \alpha r (-\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y) \quad \text{tangential}$$

$$+ \omega^2 r (-\cos\theta \vec{e}_x - \sin\theta \vec{e}_y) \quad \text{radial}$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}$$

Vektoren parallel zur Drehachse: $d\theta, \omega, \alpha$

Bsp. Astronaut soll Linearbeschleunigung von 11 g aushalten. Dazu trainiert er in einer mit konstanter Geschwindigkeit rotierenden Zentrifuge mit Radius 15 m.

Frage Winkelgeschwindigkeit der Zentrifuge?

Lsg Beschleunigung $a = \alpha r + \omega^2 r$

a) tangential $\alpha r = 0$ da $\alpha = d\omega/dt = 0$ da $\omega = \text{konstant}$

b) radial nach außen $a = \omega^2 r \rightarrow$

$$\omega = \sqrt{a/r} = \sqrt{11 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 / 15 \text{ m}} = 2,68 / \text{s}$$

$$\omega = 2,68 / \text{s} \cdot \frac{60 \text{ s}}{2\pi} = 25,6 \frac{\text{U}}{\text{min}}$$

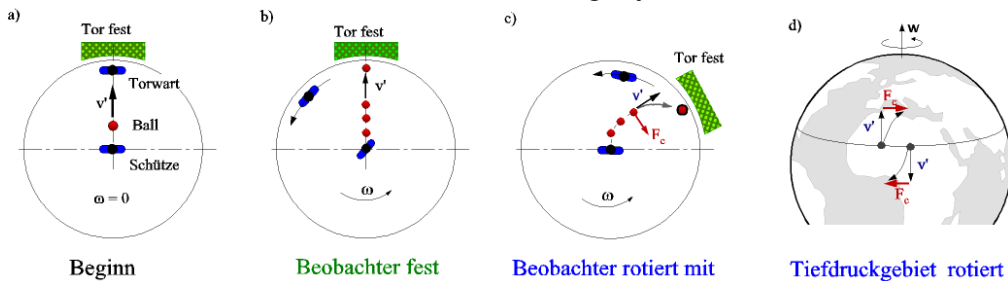
Frage: wie groß ist die tangetiale Beschleunigung, wenn Zentrifuge in 20 s auf Null abbremst?

Lsg. $a = \alpha r = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} r = \frac{2,68 / \text{s} - 0}{20 \text{ s}} 15 \text{ m} = 2 \text{ m/s}^2$ 20% der Erdbeschleunigung

Einschub: rotierendes Bezugssystem F60a-d

F60d

Rotierendes Bezugssystem



7.6 Kinetische Rotations-Energie

Problem: Ein rotierendes Kreissägeblatt besitzt offensichtlich kinetische Energie. Wie groß ist diese? Bekannte Form $E = \frac{1}{2} m v^2$ für das Sägeblatt als Ganzes, d.h. Betrachtung des Schwerpunktes hilft nicht weiter, denn $v_{\text{Schwerpunkt}} = 0$.

Lsg. betrachte jeden Massenpunkt m_i des Sägeblatts mit individueller Geschwindigkeit v_i

$$E_{kin} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad \text{individuelle Geschw. } v_i \text{ abhängig vom Abstand zur Drehachse.}$$

$$v_i = \omega r_i \quad \text{Winkelgeschw. } \omega \text{ ist aber für alle Punkte gleich.}$$

$$E_{kin} = \sum \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \sum m_i r_i^2 \omega^2$$

$$E_{Rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (\text{ähnliche Form wie: } E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2)$$

- Exp.** a) 2 Dosen leer/voll rollen die Schräge hinunter
 b) Ring + Holzrolle mit identischer Masse

7.7 Trägheitsmoment:

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad \text{gibt die Massenverteilung bzgl. einer Drehachse an}$$

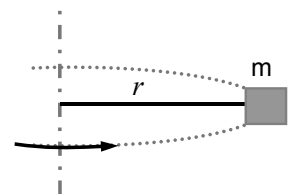
$$[I] = \text{kgm}^2$$

Translationsbewegung: $E_{kin} \sim \text{träge Masse } m$

Rotationsbewegung: $E_{kin} \sim \text{Trägheitsmoment } I$

Je kleiner das Trägheitsmoment, desto leichter lässt sich ein Körper drehen

Bsp. Trägheitsmoment einer Stange: $I_a > I_b$

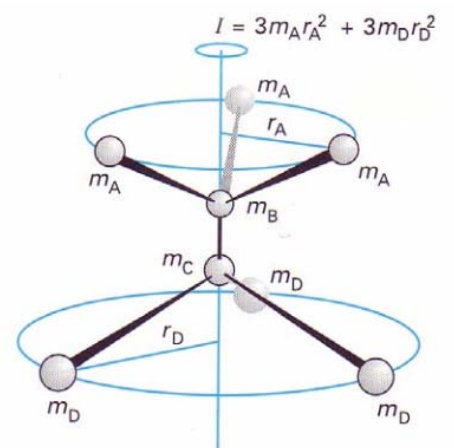
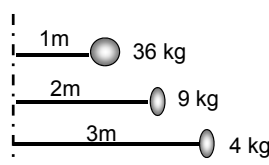
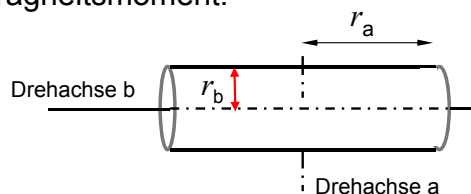


Bsp. Ordne die Trägheitsmomente nach ihrer Größe
 Lsg: Alle gleich $I = m r^2$

F61

F61

Trägheitsmoment:



Trägheitsmoment

F62

Die Berechnung des Trägheitsmomentes eines beliebigen Körpers ist nicht trivial.

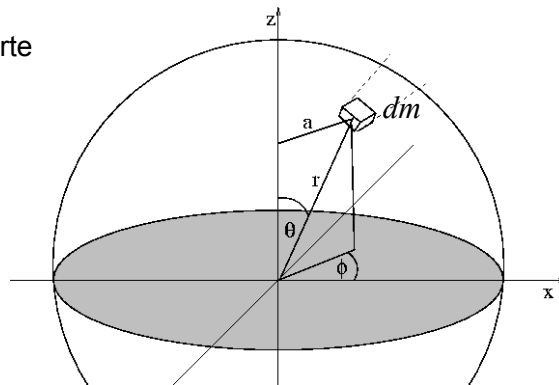
Man muss über alle einzelnen Punkte summieren, also das

Integral $I = \int r_i^2 dm$ bilden.

Meist nutzt man Tabellierte Werte

Bsp. Kugel:

$$I_{Kugel} = \int r^2 dm = \frac{2}{5} M r^2$$



Exp. Buch dreht erst um Achse mit höchstem Trägheitsmoment, später um Achse mit kleinstem Moment I (Energieiminimierung).

F62

<p>Hoop about central axis</p> <p>$I = MR^2$ (a)</p>	<p>Annular cylinder (or ring) about central axis</p> <p>$I = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$ (b)</p>	<p>Solid cylinder (or disk) about central axis</p> <p>$I = \frac{1}{2} MR^2$ (c)</p>
<p>Solid cylinder (or disk) about central diameter</p> <p>$I = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$ (d)</p>	<p>Thin rod about axis through center perpendicular to length</p> <p>$I = \frac{1}{12} ML^2$ (e)</p>	<p>Solid sphere about any diameter</p> <p>$I = \frac{2}{5} MR^2$ (f)</p>
<p>Thin spherical shell about any diameter</p> <p>$I = \frac{2}{3} MR^2$ (g)</p>	<p>Hoop about any diameter</p> <p>$I = \frac{1}{2} MR^2$ (h)</p>	<p>Slab about perpendicular axis through center</p> <p>$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$ (i)</p>

7.8 Drehmoment

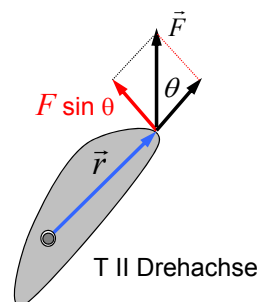
Warum ist die Türklinke möglichst weit vom Scharnier der Tür entfernt?
 In welche Richtung muß ich ziehen, um die Tür am leichtesten zu öffnen?

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$T = r F \sin \theta$$

[T] = Nm, nicht mit Arbeit verwechseln!

nur Kraftkomponente senkrecht auf \vec{r} bewirkt Drehmoment



Hebelarm: Komponente von \vec{r}_i , die senkrecht auf \vec{F} steht

F63

\vec{T} senkrecht auf \vec{r} und \vec{F}

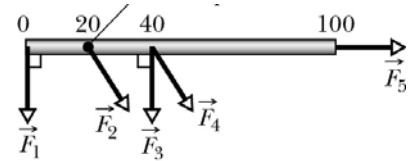
\vec{T} Fläche, von \vec{F} und \vec{r} aufgespannt

Idee: Die Lage der Drehachse wird durch die Kraft und ihre Orientierung zum Hebelarm festgelegt.

Das Drehmoment spielt für die Rotation die gleiche Rolle, wie die Kraft für die Linearbewegung.

Das resultierende Drehmoment ist die Summe der einzelnen Drehmomente.

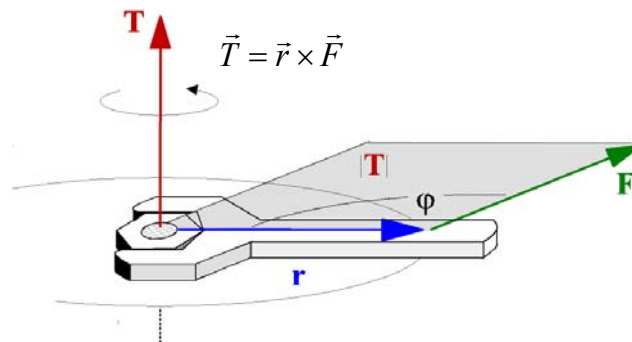
Bsp. Ordne die Drehmomente nach ihrer Größe. (alle Kräfte sind betragsmäßig gleich)



Exp. Drehmomentenschlüssel, Balkenwaage

F63

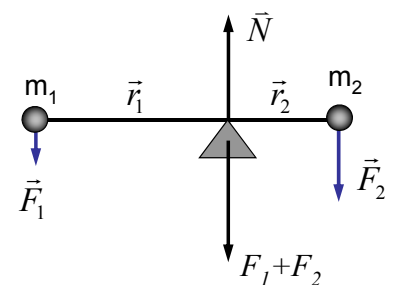
Drehmoment



Bsp. Hebelgesetz - Waage

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = -\vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$



Wie muss man einen Körper stützen, auf dessen Massenpunkte m_i die Schwerkraft wirkt ?

sei
$$\vec{F}_{ges} = \sum m_i \vec{g} = 0$$

→
$$\vec{T}_{1 ges} = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{g} = -\vec{g} \times \sum m_i \vec{r}_i = 0$$

→
$$\sum m_i \vec{r}_i = 0$$

Ursprung der Vektoren muß im Schwerpunkt liegen.

7.9 Zweites Newton'sches Axiom für die Rotation

F64

Kraft zieht Masse m auf Kreisbahn mit Radius r , Teilchen rotiert um Drehachse, aber wie wird die Masse beschleunigt?

Nur tangentiale Kraftkomponente wirkt

$$F_t = F \sin\theta = ma_t \quad a_t : \text{lineare Tangentialbeschleunigung}$$

mit $T = (F \sin\theta) r$

$$\Rightarrow T = ma_t r = m (\alpha r) r = mr^2 \alpha \quad \text{mit } a_t = \alpha r, \alpha: \text{Winkelbeschleunigung.}$$

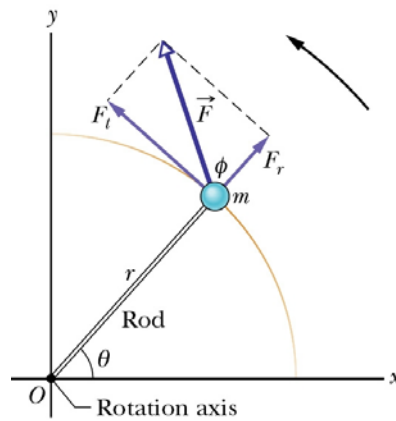
$$\Rightarrow \underline{T = I \alpha} \quad (\alpha \text{ im Bogenmaß})$$

Das Drehmoment ergibt sich aus Trägheitsmoment und Winkelbeschleunigung.

Vergleiche mit linearer Bewegung $F = ma$.

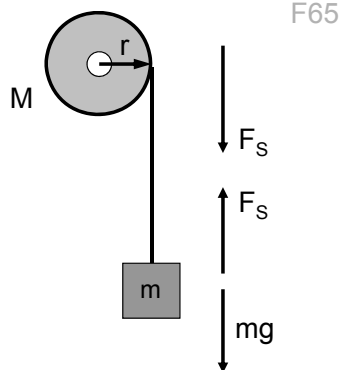
F64

Tangentialbeschleunigung



Bsp. Scheibe mit $M = 2,5 \text{ kg}$, $r = 20 \text{ cm}$, einheitliche Dicke
Horizontale Drehachse,
masseloses Seil hält Block $m = 1,2 \text{ kg}$

- Frage
- a) Beschleunigung des fallenden Blocks
 - b) Seilkraft F_S
 - c) Winkelbeschleunigung ω



Bsp. Rotierende Scheibe

F65

Lsg: a) $F_S - mg = ma$ (1) Block beschleunigt mit a

$T = I\alpha$ (2) Drehmoment

$\rightarrow -r F_S \sin\theta = \frac{1}{2} M r_2 \alpha$

Trägheitsmoment der Scheibe, dreht gegen Uhr

$\rightarrow -F_S = \frac{1}{2} Mr\alpha$ (3) mit $\sin 90^\circ = 1$

$a = a_t = \alpha r$ (4) a = Tangentialbeschl., Seil rutscht nicht

aus 1) $F_S = ma + mg$

mit 3) 4) $-\frac{1}{2} Mr\alpha = -\frac{1}{2} Ma = ma + mg$

$\rightarrow a = (-2gm)/(M + 2m) = -4,8 \text{ m/s}^2$ unabhängig vom Radius der Scheibe

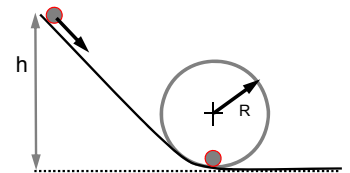
Lsg. b) Seilkraft $F_S = -\frac{1}{2} Ma = 6 \text{ N}$

Lsg. c) Winkelbeschl. $\alpha = a/r = -24 \text{ /s}^2$

Exp. Kugel rollt durch Looping

Frage a) v am tiefsten Punkt des Loopings ?

Frage b) aus welcher Höhe h muß die Kugel starten, damit sie den Looping durchlaufen kann?



Lsg. a) $U_{grav} = E_{kin} + E_{rot} \rightarrow mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$,

mit $\omega = v/r$, Kugelradius r

$\rightarrow 2mgh = \left(m + \frac{I}{r^2}\right)v^2$ mit $I = \frac{2}{5}mr^2$ für Kugel

$\rightarrow v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + I/r^2}} = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{2}{5}m}} = \sqrt{\frac{2gh}{1,4}}$

Lsg. b) $F_z = mv^2/R \geq mg$ am **obersten** Punkt 2R des Loopings !

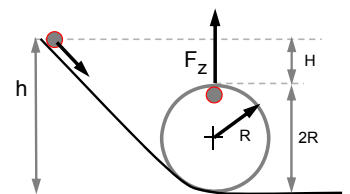
$mgh = mv^2/2 + I\omega^2/2 + mg2R$

$mg \underbrace{(h - 2R)}_H = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{v}{r}\right)^2$ mit $\omega = v/r$, Kugelradius r

$2mgH = \left(m + \frac{I}{r^2}\right)v^2$ mit $I = \frac{2}{5}mr^2$ für die Kugel

$v^2 = \frac{2mgH}{m + I/r^2} = \frac{2gH}{1 + 2/5} = \frac{2gh}{1,4}$

$\Rightarrow F_z = \frac{mv^2}{R} = \frac{m}{R} \frac{2gH}{1,4} = mg$



$H = 0,7R$ über dem obersten Punkt des Loopings

7.10 Arbeit und Leistung

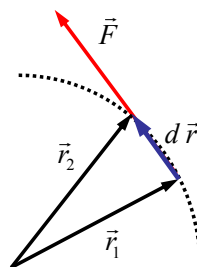
Welche Arbeit dW ist nötig, um eine Masse mit der Kraft F eine kleine Strecke dr auf dem Kreis zu bewegen, bzw. um einen kleinen Winkel $d\theta$ zu drehen?

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad d\vec{r} : \text{als Kreisbogen}$$

$$dW = \vec{F} \cdot (d\vec{\theta} \times \vec{r}) = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot d\vec{\theta}$$

Vertauschung im Spatprodukt

$$dW = \vec{T} \cdot d\vec{\theta} \quad \text{mit} \quad \vec{T} = (\vec{r} \times \vec{F})$$



Die gesamte Arbeit ist dann die Summe der Teilarbeiten.

$$W = \int \vec{T} \cdot d\vec{\theta}$$

Leistung

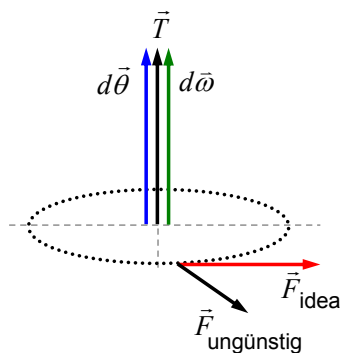
$$P = \frac{dW}{dt}$$

$$\rightarrow P = \frac{d}{dt} \left((\vec{r} \times \vec{F}) \cdot d\vec{\theta} \right)$$

wenn Kreisradius r und F konstant, dann:

$$\rightarrow P = \left((\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \frac{d}{dt} \vec{\theta} \right)$$

$$P = \vec{T} \cdot \vec{\omega}$$



Arbeit, Leistung sind maximal, wenn T parallel zur Drehachse

Übersicht

Translation

feste Richtung

Rotation

feste Achse

	Translation	Rotation
Ort	x	Winkel θ
Geschwindigkeit	$v = dx/dt$	$\omega = d\theta/dt$
Beschleunigung	$a = dv/dt$	$\alpha = d\omega/dt$
Masse	m	Trägheitsmoment I
Kraft	$F = ma$	Drehmoment $T = I \alpha$
Arbeit	$dW = \vec{F} \cdot d\vec{x}$	$dW = \vec{T} \cdot d\vec{\theta}$
Kin. Energie	$E_{kin} = 1/2 mv^2$	$E_{kin} = 1/2 I\omega^2$
Leistung (F konst)	$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	$P = \vec{T} \cdot \vec{\omega} \quad (T \text{ konst.})$

7.11.1 Drehimpuls eines Teilchens

F66

Analog zum Impuls \vec{p} der Translation gibt es den Drehimpuls \vec{L} der Rotation

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$L = r m v \sin\theta \quad [L] = \text{kg m}^2/\text{s}$$

Konstruktion: rechte Hand-Regel, Bezugspunkt notwendig

\vec{L} senkrecht auf der Rotationsebene

2tes Newton'sches Axiom:

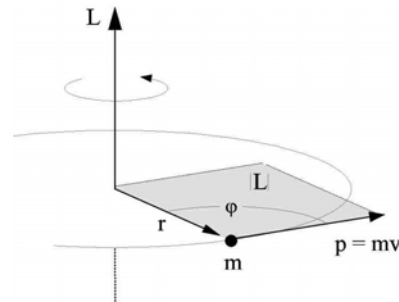
$$\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

(ohne Beweis)

Die Vektorsumme aller Drehmomente, die auf ein Teilchen wirken, ist gleich der zeitlichen Änderungsrate des Drehimpulses.

F66

Drehimpuls der Rotation



7.11.2 Drehimpuls eines starren Körpers

F67

Alle Teilchen des starren Körpers drehen um die selbe Drehachse mit gleicher Winkelgeschwindigkeit, aber unterschiedlichen Geschwindigkeiten v und unterschiedlichem L , je nach Abstand zur Drehachse.

Gesucht ist nun das L des gesamten Körpers bzgl. seiner Drehachse.

Lösung: summiere die Drehimpulse L_i aller Massenelemente m_i

$$L = \sum L_i = \sum (r_i \sin\theta m_i v_i)$$

$$= \sum [(r_i \sin\theta) m_i \omega (r_i \sin\theta)] ,$$

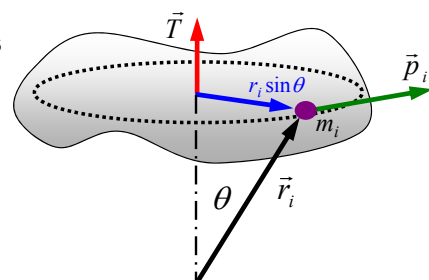
Komponenten senkrecht zur Achse: $r_i \sin\theta$

$$L = \omega I$$

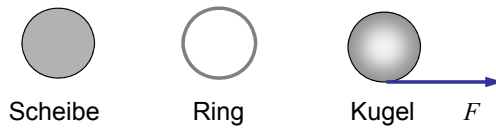
mit $\sum (r_i \sin\theta)^2 m_i$ Trägheitsmoment bzgl. Rotationsachse

F67

Drehimpuls eines starren Körpers



Bsp. Scheibe, Ring, Kugel mit gleicher Masse und Radius werden tangential über gleiche Zeit dt mit gleicher Kraft aus der Ruhe um zentrale Drehachse beschleunigt.



Ordne nach
 a) Drehimpuls L ,
 b) Winkelgeschw. ω

Lsg. a) $T = \text{konst} \rightarrow dL = Tdt = \text{konst.}$ also alle Drehimpulse gleich
 b) $\omega = L/I$, mit: $I_R > I_S > I_K \rightarrow \omega_R < \omega_S < \omega_K$

7.11.3 Drehimpulserhaltung

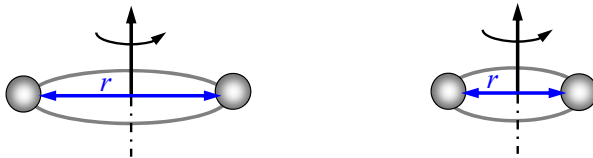
Wirkt auf das System kein äußeres Drehmoment \vec{T} ,
 so ist der Drehimpuls konstant:

$$\vec{L} = \text{konstant} \rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{T} = 0$$

Was bedeutet die Drehimpulserhaltung?

Exp. Person auf Drehstuhl ändert den Abstand der Hanteln vom Körper
 $\rightarrow \omega$ ändert sich.

Es wirkt kein äußeres Drehmoment, also gilt der Drehimpulserhaltungssatz.



$L = \text{konstant}$ r groß $\rightarrow I = \sum m_i r_i^2$ groß r klein $\rightarrow I = \sum m_i r_i^2$ klein
 $\rightarrow \omega = L/I$ klein $\rightarrow \omega = L/I$ groß
 $\rightarrow \omega$ ändert sich mit der Massenverteilung über Trägheitsmoment

Bsp. Pyroette beim Eistanz oder Salto beim Turmsprung

- Beim Absprung erzeugt der Springer einen Drehimpuls.
- Nach Absprung:
 System isoliert
 Es wirken keine Drehmomente
 \rightarrow Drehimpulserhaltung
- Zieht er Beine, Arme an,
 so verkleinert sich I
 \rightarrow dreht sich schneller (Salto)



Exp. Person sitzt auf Drehstuhl (in Ruhe) und hält drehendes Rad in der Hand. Achsen von Stuhl / Rad sind parallel. Dann dreht er das Fahrrad um 180°. Damit beginnt der Stuhl sich zu drehen. Am Trägheitsmoment hat sich nichts geändert, was ist passiert?

Lsg: Drehimpulserhaltungssatz gilt, da kein äußeres Drehmoment wirkt

$$L_{Rad-i} + L_{Pers-i} = L_{Rad-f} + L_{Pers-f} = \text{konstant}$$

$$L_{Rad-i} + 0 = -L_{Rad-i} + L_{Pers-f} \rightarrow 2L_{Rad-i} = L_{Pers-f}$$

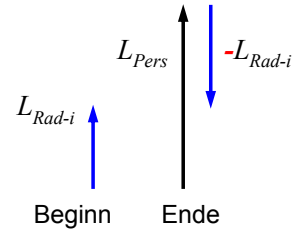
$$2\omega_{Rad-i} I_{Rad} = I_{Pers} \omega_{Pers-f} \text{ Trägheitsmomente konstant}$$

$$\omega_{Pers} = (2 I_{Rad} / I_{Pers}) \omega_{Rad-i}$$

Frage: Wie schnell dreht sich die Person?

Lsg. mit $I_{Rad} = 1,2 \text{ kgm}^2, \omega_{Rad-i} = 3,9 \text{ U/s}, I_{Pers} = 6,8 \text{ kgm}^2$

$$\rightarrow \omega_{Pers} = (2 \cdot 1,2 \text{ kgm}^2 / 6,8 \text{ kgm}^2) \cdot 3,9 \text{ U/s} = 1,4 \text{ U/s}$$



Übersicht	Translation	Rotation	
Kraft	\vec{F}	$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F} = I\vec{\alpha}$	Drehmoment
Impuls	\vec{p} $\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ $\vec{L} = I \times \vec{\omega}$	Drehimpuls für starren Körper
2.newt. Axiom	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	
Erhaltungssatz	$\vec{p} = \text{konstant}$	$\vec{L} = \text{konstant}$ (isoliert, abgeschl.)	

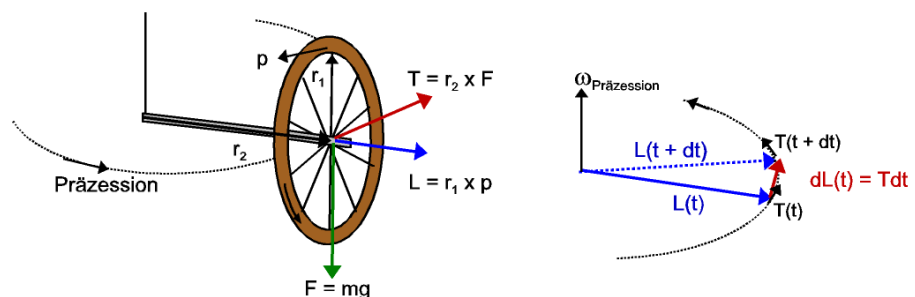
Anwendung:

- a) Stabilisierung freier Bewegung, z.B. Diskuswerfen
- b) künstlicher Horizont im Flugzeug
- c) Schiffsstabilisator: Kreisel mit senkrechter Achse verhindert Schlingern

Exp. Kreisel

F68

F68



Drehmoment $T = r \times F$
bewirkt Drehimpulsänderung: $dL = T dt$

=> Kreisel weicht senkrecht zur Kraft aus

8 Fluid-Dynamik

8.1 Druck und Dichte

Fluide sind Substanzen, die strömen können, wie Flüssigkeiten, Gase. Daher Beschreibung nicht durch Masse / Kraft sondern durch Dichte und Druck.

Dichte $\rho = m/V$ für homogenes Medium
 $[\rho] = \text{kg}/\text{m}^3$ Skalar

Druck Druck des Fluids bewirkt eine Kraft F auf den Kolben der Fläche A

$p = F / A$ Skalar ohne Richtungsabhängigkeit
 $[p] = \text{N}/\text{m}^2 = \text{Pa}$ (Pascal)

F69

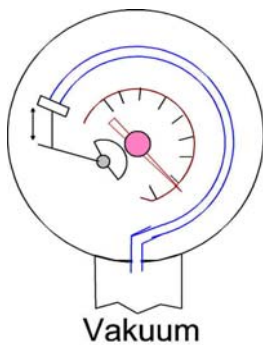
Atmosphärendruck $1 \text{ atm} = 1,013 \text{ bar} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ Torr}$

Merkhilfe: Bleistiftdruck der Spitze größer als der der Rückseite

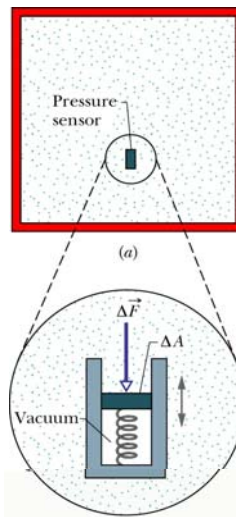
Anwendung: Druckmessung durch Messung der Kraft auf Feder Im Federmanometer

F69

Federmanometer



Kraft $F = (p_0 - p_{\text{Vakuum}}) A$



Bsp. Frage: Welche Masse hat die Luft in einem Zimmer der Größe $3,5\text{m} \times 4,2\text{m} \times 2,4 \text{ m}$ bei Atmosphärendruck $p = 1,013 \text{ bar}$?

Lsg. Masse der Luft $m = \rho V$
 Dichte bei $1,013 \text{ bar}$ $\rho = 1,21 \text{ kg}/\text{m}^3 \rightarrow m = 41,6 \text{ kg}$

Exp. Magdeburger Halbkugel (1654, Otto von Guericke).
 Wenn man der Luft einen Druck zuordnen kann, dann muss sie auch eine Druckkraft bewirken. Kiste Wasser hängt an evakuierte Kugel.

F70

Kräfte auf Kugel: $F = p A$, Radius $r = 5 \text{ cm}$

$F = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 2\pi(0,05\text{m}) = 796 \text{ N}$

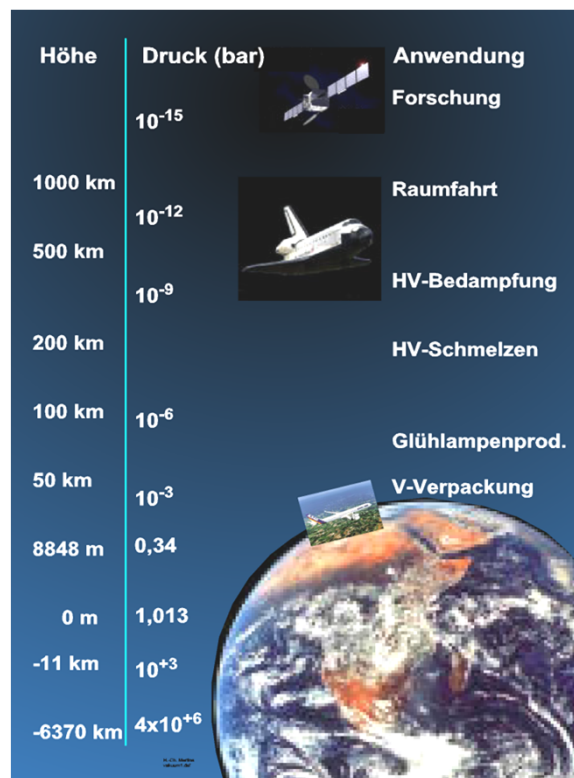
F71

Druck und Dichte

F70



F71



8.2 Hydrostatischer Druck in ruhenden Fluiden

Erfahrung: Taucher: Wasserdruck nimmt mit steigender Wassertiefe zu
 Bergsteiger: Luftdruck nimmt mit steigender Höhe ab

Gesucht: Druck als Funktion der Tiefe in Becken mit ruhendem Wasser, F72
 d.h. Gleichgewicht

Betrachte zylinderförmiges Wasservolumen: $V = A(y_1 - y_2)$

Kräfte auf Testvolumen: $F_1 = p_1 A$ durch Wasser oberhalb des Zylinders

$F_2 = p_2 A$ durch Wasser unterhalb des Zylinders

$mg = \rho A(y_1 - y_2) g$ Gravitation auf Wasser im Zylinder

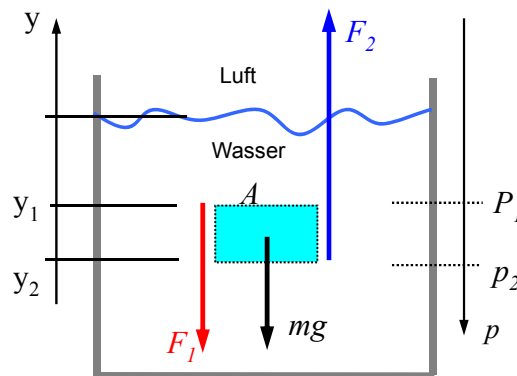
$A(y_1 - y_2) =$ Verdrängung

$F_2 = F_1 + mg$

$p_2 = p_1 + \rho(y_1 - y_2) g$ (A gekürzt)

F72

Hydrostatischer Druck



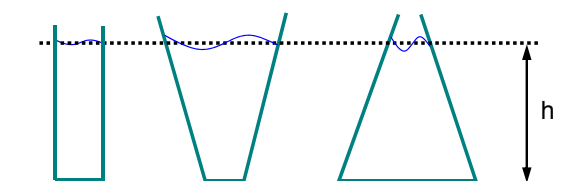
Wasserdruck in Tiefe h

Wasseroberfläche bei $y_1 = 0$, Luftdruck an Wasseroberfläche $p_1 = p_0$

→ $p = p_0 + \rho g h$

→ Der Druck an einem Punkt in einem Fluid im statischen Gleichgewicht hängt nur von der Tiefe des Punktes ab, aber nicht von den Abmessungen des Behälters.

Bsp. Alle Behälter sind mit Öl gefüllt. Ordne nach Größe des Drucks auf der Bodenfläche.



Bsp. Bestimme die maximale Saughöhe für Wasser bei einem Luftdruck von 1000 mbar

$$p = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ pa} = 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$F_g = mg = \rho V g = p A$$

$$\rho A h g = p A$$

$$h = p / (\rho g)$$

$$h_{max} \approx 10 \text{ m}$$

Hinweis:

Genaugenommen ist der Dampfdruck der Flüssigkeit noch abzuziehen:

$$\rightarrow h_{max} \approx 9 \text{ m}$$

Anwendung: Quecksilberbarometer

F73

Glasröhre mit Hg gefüllt, kopfüber in Hg-Bad gestellt, Hg fließt in's Bad, (oberer Raum Vakuum - Hg-Dampf ist vernachlässigbar)

gesucht: Abhängigkeit Hg-Säulenhöhe von Luftdruck p_0

$$\rightarrow p_1 = p_2 + \rho g h \quad (\text{Formel aus 8.2})$$

$$\text{mit } y_1 = 0, \quad p_1 = p_0 \quad (\text{Luftdruck})$$

$$y_2 = h, \quad p_2 = 0$$

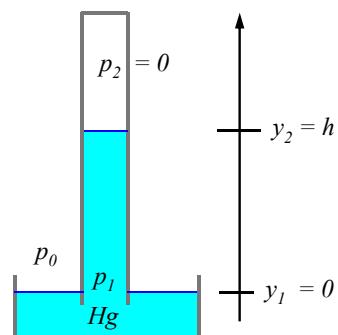
$$\rightarrow p_0 = \rho g h$$

Druck abhängig von Temp über $\rho(T)$ und dem Ort auf der Erde über g

Hg-Höhe in mm entspricht dem Druck in Torr, wenn $T = 0^\circ\text{C}$, $g = 9,80665\text{m/s}^2$

F73

Quecksilberbarometer



8.3 Pascalsches Prinzip

Eine Druckänderung in einem abgeschlossenen inkompressiblen Fluid wird unvermindert auf jeden Teil des Fluids sowie die Wände abgegeben.

$$p = p_{ext} + \rho g h$$

$$\rightarrow \Delta p = p_{ext}$$

Druckänderung für Punkt in konstanter Tiefe h nur möglich, wenn sich der externe Druck ändert

Anwendung: Hydraulik-Pressen

F74

Kräfte: Druck auf beide Flächen ist gleich groß

$$p_{ext} = F_1 / A_1 = F_2 / A_2$$

$$F_2 / F_1 = A_2 / A_1$$

Arbeit: Hebelbewegungen verdrängen das selbe Volumen

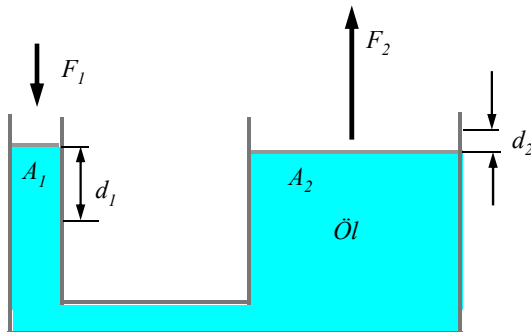
$$V = d_1 A_1 = d_2 A_2$$

$$\rightarrow d_2 = d_1 A_1 / A_2$$

$$\rightarrow W = F_2 d_2 = (F_1 \cdot A_2 / A_1) (d_1 \cdot A_1 / A_2) = F_1 d_1$$

Kleine Kraft, die auf langem Weg wirkt, wird umgewandelt in große Kraft, die auf kleinem Weg wirkt., d.h. Kraft x Weg = konstant.

F74

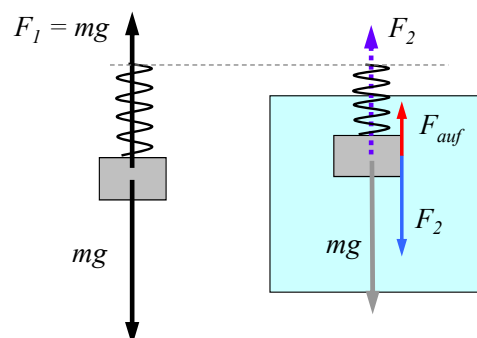


8.4 Archimedisches Prinzip

- Exp.** a) Masse hängt in Luft an Federwaage,
 b) Masse wird in Wasser gehängt $\rightarrow F$ sinkt

Prinzip: „Die Auftriebskraft auf einen schwimmenden Körper entspricht dem Gewicht des verdrängten Fluids.“

Der Auftrieb beruht auf dem mit steigender Wassertiefe ansteigenden Druck.



Auftriebskraft

- A) gewichtslose, mit Wassermasse m_F gefüllte, in Wasser schwebende Tüte, befindet sich im statischen Gleichgewicht

→ Kräftegleichgewicht $m_F \vec{g} = \vec{F}_A$

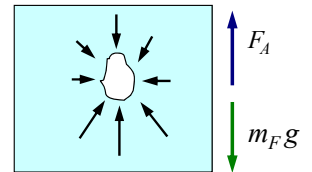
Umgebungswasser übt Druckkräfte auf das Wasser in der Tüte aus
Summe der horizontalen Kräfte = 0

- B) selbe Tüte gefüllt mit Sand:
Tüte verdrängt selbe Menge Wasser → selbe Auftriebskraft
aber größeres Gewicht

→ $m_S g > F_A$ → Sand sinkt

- C) selbe Tüte gefüllt mit Holzsägespänen:

→ $m_H g < F_A$ → Holz steigt auf

**Generell:**

Die Auftriebskraft auf einen Gegenstand in einem Fluid hat den Betrag:

$$m_F \vec{g} = \vec{F}_A$$

Auftrieb, wenn: $m_F g > m_{\text{Körper}} g \rightarrow \frac{m_{\text{Körper}}}{m_{\text{Fluid}}} = \frac{\rho_{\text{Körper}} \cdot V}{\rho_{\text{Fluid}} \cdot V} = \frac{\rho_{\text{Körper}}}{\rho_{\text{Fluid}}} < 1$

Exp. 1 Kartesischer Taucher, p_{ext} wird geändert

Exp. 2 Auftrieb einer luftgefüllten Glaskugel an Waage entfällt im Vakuum,

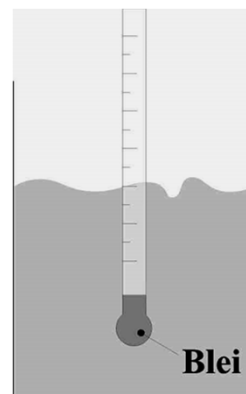
Bsp. Sie wetten einen schweren Stein heben zu können. Zeigen Sie das unter Wasser, dann hilft Ihnen der Auftrieb.

Anwendung: Aräometer zur Dichtebestimmung von Flüssigkeiten.
Gerät sinkt so weit ein, bis Auftriebskraft = Schwerkraft
im Gleichgewicht, also bei: $m \vec{g} = \rho_{\text{Fluid}} \cdot V g$

F75

F75

Aräometer



Schwebt, wenn:

$$mg = \rho_{\text{Fluid}} V g$$

8.5 Strömung idealer Fluide

F76

wir betrachten nur die Strömung vereinfachter, idealer Fluide unter folgenden Annahmen:

- 1) Laminar: gleichmäßige Strömung, in festem Punkt ist die Geschwindigkeit konstant (ruhiger Fluß: laminar, Stromschnellen: turbulent)
- 2) Inkompressibel: Dichte des Fluids überall konstant
- 3) Nichtviskos: ohne Energieverlust,
- 4) Wirbelfrei: kein Energieverlust, rotationsfrei (Teilchen in der Strömung dreht sich nicht um seinen Schwerpunkt)

F76



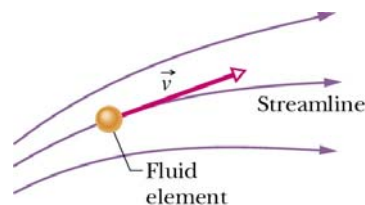
Reale Strömung:

Laminare und nichtlaminare Anteile



Stromlinien

- Stromlinien beschreiben den Weg eines kleinen Fluidelements in der Strömung
- können durch Tracer sichtbar gemacht werden
- Geschwindigkeit tangential zur Bahnkurve
- schneiden sich nie, sonst gäbe es an einem Punkt verschiedene Geschw.



8.6 Kontinuitätsgleichung

Beobachtung: die Geschwindigkeit des aus einem Gartenschlauch austretenden Wasserstrahls kann man erhöhen, wenn man das Schlauchende zudrückt, d.h. den Querschnitt verkleinert.

Fluid strömt in Zeit Δt durch verengtes Rohr

Es gilt: eintretendes = austretendes Volumen (da inkompressibel)

strömendes Volumen: $\Delta V = A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$

F77

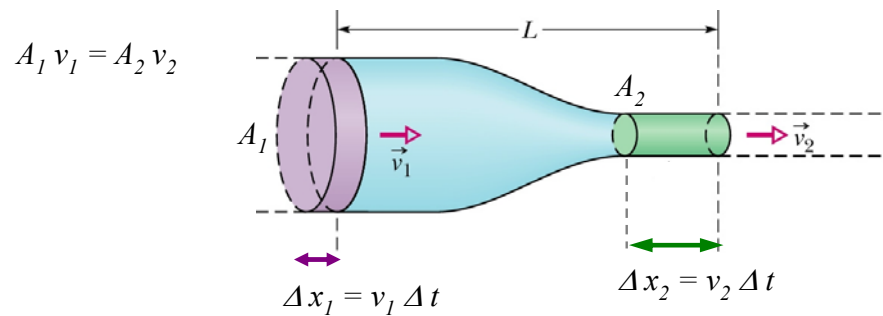
→

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Kontinuitätsgleichung

Kontinuitätsgleichung

F77



Flußröhre

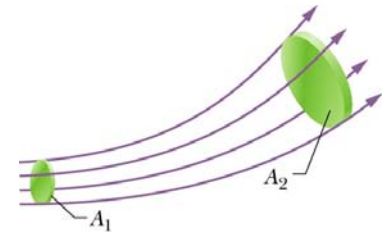
Kontinuitätsgleichung gilt auch für imaginäre Flußröhre, d.h. Rand wird nur durch Stromlinien gebildet. Möglich, da Stromlinien sich nicht kreuzen können.

Volumenflussrate

$$R_V = Av = \text{konstant} \quad [R_V] = \text{m}^3/\text{s}$$

Massenflussrate

$$R_M = \rho R_V = \rho Av = \text{konstant} \quad [R_M] = \text{kg/s}$$



8.7 Bernoulli-Gleichung

(D. Bernoulli, ~ 1700)

Zusammenhang zwischen Druck und Geschwindigkeit.
Bildet Grundlagen der Luftfahrt.

Identisches Volumen strömt durch Röhre mit variablen Querschnitt

F78

$$\text{Dann gilt: } p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2 = p_0 = \text{konstant}$$

$$\rightarrow p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = p_0 = \text{konstant}$$

mit v : Fließgeschwindigkeit

p : statischer Druck in Fluid

$\frac{1}{2} \rho v^2$: Staudruck

$\rho g y$: hydrostatischer Druck (abh. von Fluidtiefe)

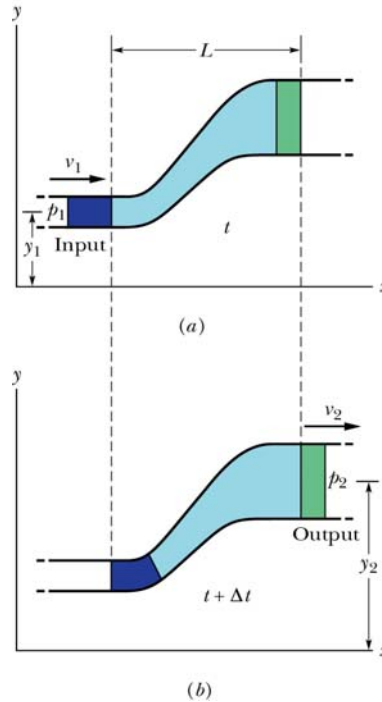
$p_0 = \text{konst.}$: Luftdruck über der Flüssigkeit, d.h. Gesamtdruck, der entsteht, wenn $v = 0$ u. wenn $y = 0$)

Bernoulli-Gleichung

F78

Identisches Volumen strömt durch Röhre mit variablen Querschnitt

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2 = p_0$$



Bernoulli-Gleichung: $p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = p_0 = \text{konstant}$

wenn $y = \text{konst.}$ → $p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = p_0$

d.h. wenn die Geschw. bzw. Staudruck $\frac{1}{2} \rho v^2$ eines Volumenelements in einer horizontalen Stromlinie zunimmt, muss der statische Druck p abnehmen.

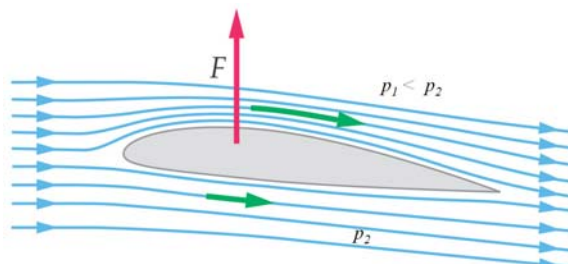
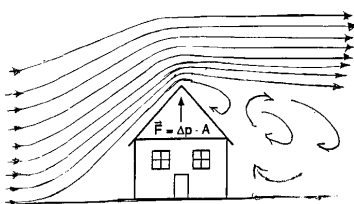
Bsp. konisches Rohr hinter Windmaschine mit Drucksensoren längs der Stömungsachse
 Kleiner Querschnitt → hohe Geschw. → kleiner Druck (Unterdruck)

F79

Bsp. Tragflächenprofil im Windkanal
 Interpretation:
 Stromliniendichte groß: v groß → p klein
 Luft läuft oben schneller als unten wegen

F80

F79



<http://user.physics.unc.edu/~rowan/p24site/p24units/unit15/WCHAP15-8.html>

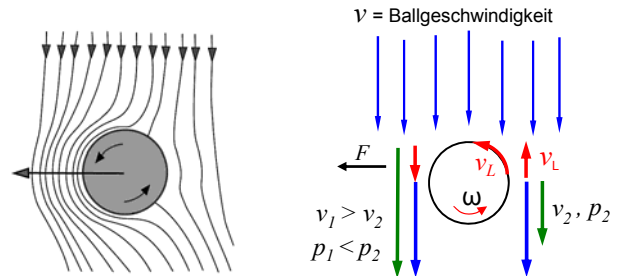
Bernoulli-Gleichung

F80

Exp. Magnuseffekt

Fliegender und rotierender Ball beschreibt eine gekrümmte Bahn
 Ursache: Balloberfläche ist rau und nimmt Luftschicht mit.

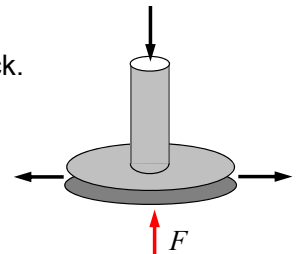
- $v_{\text{Luftschicht}} = \omega r$
- $v_1 = v + v_L, \quad v_2 = v - v_L$
- Unterdruck $\Delta p = p_1 - p_2$
- Kraft $F = \Delta p A$



Hydrodynamisches Paradoxon:

Ausströmendes Fluid mit hoher Geschw. v erzeugt Unterdruck.
 z.B. Durchzug → Tür knallt zu, Staudruck öffnet die Tür

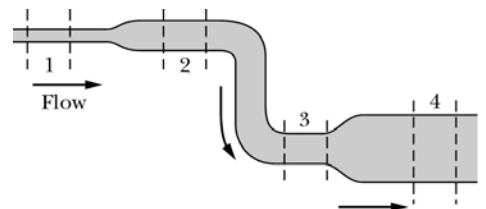
- Exp.** zwischen zwei gewölbten Flächen durchpusten
 → Unterdruck zieht sie zusammen



Bsp. Laminare Strömung fließt nach rechts

Ordne, beginnend mit dem größten:

- a) Volumenrate gleich,
- b) Geschw. v 1, (2 / 3), 4
- c) Wasserdruck 4, 3, 2, 1



$$p = konst - \frac{1}{2} \rho v^2 - \rho g y$$

Anwendung: Venturi-Rohr

Gesucht Strömungsgeschwindigkeit

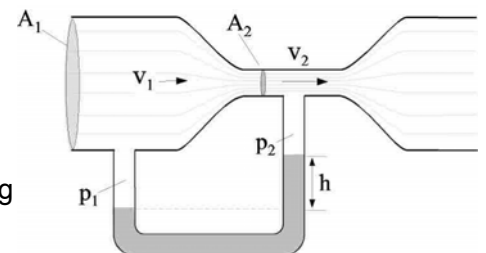
Gemessen:

Druckdifferenz weites / enges Rohr

Formel: aus Bernoulli + Kontinuitätsgleichung

folgt :

$$v_1 = \dots \text{ selber rechnen}$$



Schwingungen & Wellen

1. Schwingungen

Zustand ändert sich periodisch mit der Zeit wie bei Kreisbewegung.
 Bsp. Uhr, Kolben im Automotor, wippende Boote auf dem Wasser

1.1 Harmonische Schwingung

die einfachste Schwingung ist die harmonische Schwingung

F81a/b

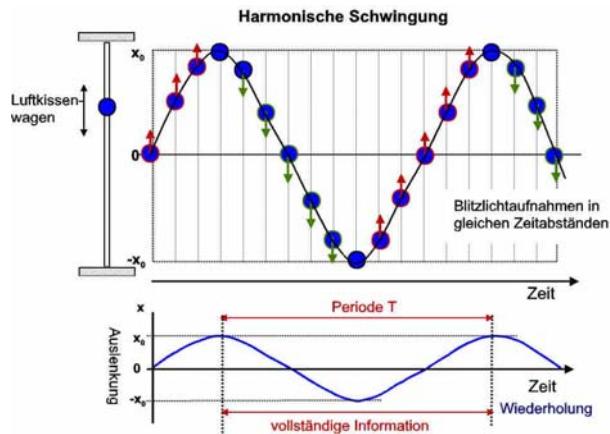
$$T = 1 / f \quad [T] = s$$

Frequenz: $f = \text{Anzahl der Schwingungen pro Sekunde}$

$$[f] = 1 \text{ Hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ Schwingung} / s = 1 \text{ s}^{-1}$$

Periode: Schwingungsdauer für vollständigen Durchlauf

F81b



Harmonische Schwingung:

F82a/b/c

Bewegung:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$x(t)$: Auslenkung, Ort ändert sich mit Zeit t

$\omega t + \varphi$ Phase

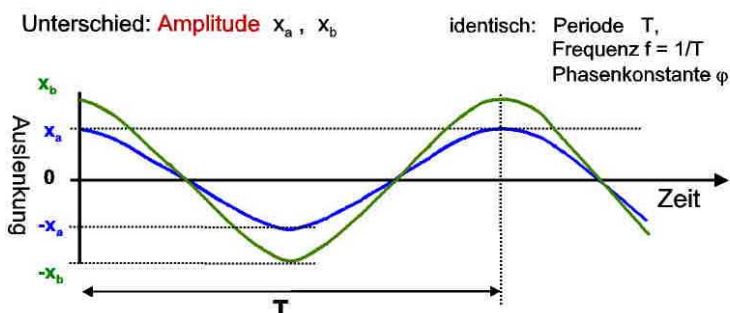
x_0 Amplitude, maximale Auslenkung

$\omega = 2\pi f$ Kreisfrequenz

φ Phasenkonstante / Verschiebung

} Konstant

F82a

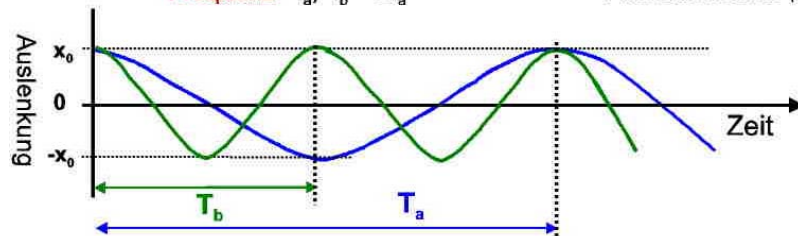


Harmonische Schwingung:

F82b

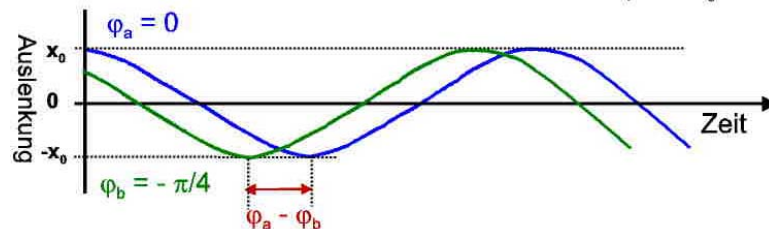
Harmonische Schwingung $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$

Unterschied: **Periode** $T_a, T_b = T_a/2$ identisch: Amplitude x_0
Frequenz $f_a, f_b = 2f_a$ Phasenkonstante φ



F82c

Unterschied: **Phasenkonstante** φ_a, φ_b identisch: Periode $T, f = 1/T$
Amplitude x_0

Kreisfrequenz $\omega \Leftrightarrow$ Frequenz f

Alter Ort muss nach voller Periode T wieder erreicht werden

$$x(t) = x(t + T)$$

$$x_0 \cos \omega t = x_0 \cos \omega (t + T)$$

cos-Funktion wiederholt sich nach voller Umdrehung, wenn

Argument um 2π zunimmt, d.h. Periode T entspricht 2π der Kreisbewegung

$$\rightarrow \omega(t + T) = \omega t + 2\pi$$

$$\rightarrow \omega T = 2\pi$$

$$\rightarrow \omega = 2\pi/T = 2\pi f \quad \text{beachte: } \pi \text{ immer in rad, } \omega \text{ in } 1/\text{s}$$

Bsp. Teilchen führt harmonische Schwingung aus und befindet sich zur Zeit $t = 0$ bei $-x_0$.

Frage Wo befindet es sich zur Zeit $t = 2T$? $t = \frac{1}{2} T$, $t = \frac{3}{4} T$?

Exp. 2 identische Feder-Masse Systeme schwingen phasenverschoben

F83a/b/c

Geschwindigkeit: $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

$$= \frac{d}{dt} [x_0 \cos(\omega t + \varphi)] = -x_0 \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = v_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{mit } v_0 = -x_0 \omega$$

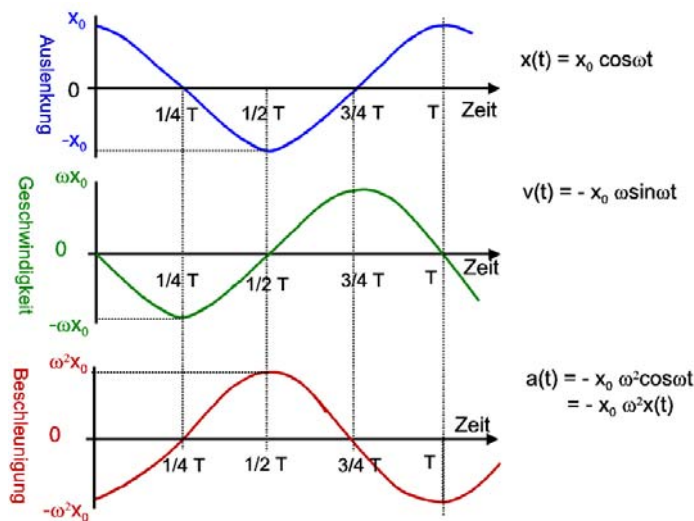
Beschleunigung: $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$

$$= \frac{d}{dt} [-x_0 \omega \sin(\omega t + \varphi)] = -x_0 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = a_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{mit } a_0 = -x_0 \omega^2$$

Harmonische Schwingung heißt: $a(t) = -\omega^2 x(t)$
 also, Beschleunigung ist proportional zur Auslenkung und immer zur Ruhelage gerichtet

F83c



1.2 Harmonischer Oszillator

F84

Federkraft: $F = -kx$

Beschleunigung: $F = ma \rightarrow ma + kx = 0$

Differentialgleichung $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$

Lsg. ist Funktion, die jederzeit die DGL erfüllt

Lösung: $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

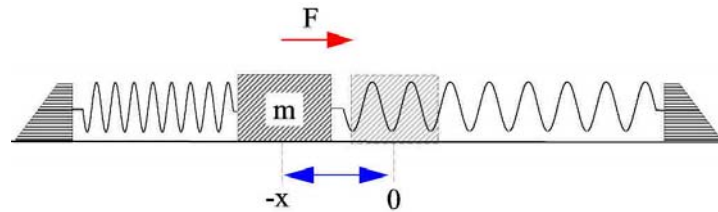
Lsg. in DGL: $-x_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{k}{m} x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) = 0$

$\rightarrow \omega_0 = \sqrt{k/m}$

Charakteristische Eigenfrequenz, unabhängig von Amplitude
 Harmonischer, linearer Oszillator, da $F \sim x$ (nicht $\sim x^2, \sqrt{x}, \dots$)
 Jedes oszillierende System hat etwas „Rücktreibendes“ (k) und etwas „Träges“ (m).

Harmonischer Oszillator

F84



Bsp. Ein Astronaut will im schwerelosen Weltraum seine Masse m_A ermitteln.

Frage: Wie macht er das? Federwaage funktioniert nicht!

Lsg. Er muss sich auf einen gefederten Stuhl schwingen und die Frequenz f messen

Bekannt: Federkonstante $k = 8000 \text{ N/m}$, Stuhlmasse $m_S = 10 \text{ kg}$

Messung: 15 Schwingungen in 10 s $\rightarrow f = 1,5 \text{ Hz}$

$$2\pi f = \omega_0 = \sqrt{k/m} \quad , \quad m = m_A + m_S$$

$$\rightarrow m_A = \frac{k}{4\pi^2 f^2} - m_S = 80 \text{ kg}$$

Frage: Maximalauslenkung sei 8 cm nach 0,2s.

Gebe Schwingungsgleichung an.

Lsg. $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad x_0 = 0,08 \text{ m}$ (Amplitude)

mit $f = 1,5 \text{ Hz}$ (siehe oben) folgt:

$$\omega = 2\pi f = 9,4 \text{ 1/s} \quad \text{Kreisfrequenz}$$

φ bestimmen:

$$x(0,2 \text{ s}) = 0,08 \text{ m} = 0,08 \text{ m} \cos(9,4 \text{ 1/s} \cdot 0,2 \text{ s} + \varphi)$$

$$1 = \cos(9,4 \text{ 1/s} \cdot 0,2 \text{ s} + \varphi), \quad \cos = 1 \text{ wenn Argument} = 0, \pi, \dots$$

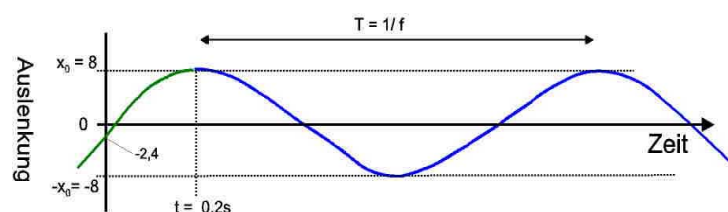
$$0 = 9,4 \text{ 1/s} \cdot 0,2 \text{ s} + \varphi$$

$$\varphi = -9,4 \text{ 1/s} \cdot 0,2 \text{ s} = -1,88 \text{ rad} \cong -108^\circ$$

$$\rightarrow x(t) = 0,08 \cos(9,4 \cdot t - 1,88) \quad \text{Einheiten in: m, 1/s, s}$$

F85

F85



$$x(t) = 0,08 \text{ m} \cos\left(9,4 \frac{1}{\text{s}} \cdot t - 1,88\right) \quad t = 0,2 \text{ s}$$

Frage Maximale Geschwindigkeit des Astronauten und wo tritt sie auf?

Lsg. $v(t) = -x_0 \omega \sin(\omega t + \varphi)$

$v_{max} = x_0 \omega = \text{Geschwindigkeitsamplitude}$

$0,08 \cdot 9,4 = 0,75 \text{ m/s}$

v_{max} tritt auf, wenn: $\sin(\omega t + \varphi) = 1 \rightarrow (9,4 \cdot t - 1,88) = \pi/2$

$\rightarrow t = -0,37 \text{ s} \pm nT, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

$T = 1/f = 0,67 \text{ s}$, bei Nulldurchgängen $x(t) = 0$

Bsp. Sie sollen auf einem Mikrochip 100 ng einer Substanz aufdampfen

Frage wie messen Sie solch eine kleine Masse?

Lsg. Chip in Schwingung versetzen und Eigenfrequenz messen

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

1.3 Energie der Schwingung

Die potenzielle Energie eines linearen Oszillators hängt allein vom Zustand der Feder ab.

$$E_{pot} = \frac{1}{2} kx^2$$

F86a/b

$$= \frac{1}{2} k x_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Beachte: $\cos^2 A = (\cos A)^2$ aber $\cos A^2 = \cos(A^2)$

Die kin. Energie hängt allein vom Zustand der Masse, also von der Geschwindigkeit ab.

F86c/d

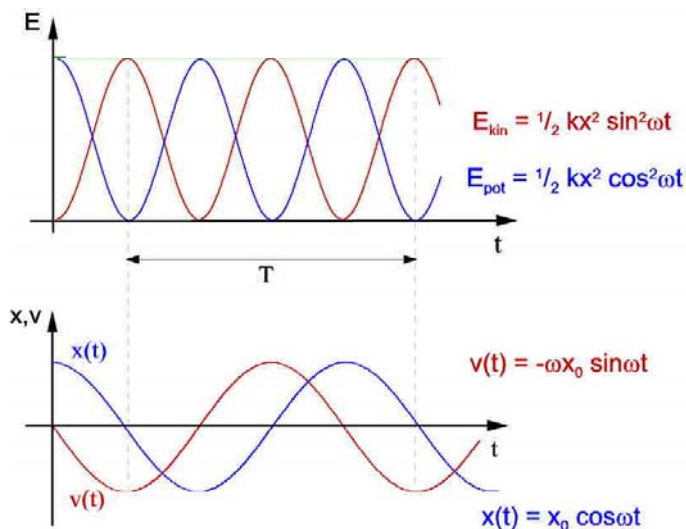
$$E_{kin} = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$= \frac{1}{2} x_0^2 k \sin^2(\omega t + \varphi) \quad \text{mit } \omega = \sqrt{k/m}$$

F86a-d



Energieanteile einer Schwingung



Gesamtenergie:

$$E = E_{kin} + E_{pot}$$

$$= \frac{1}{2} k x_0^2 [\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)]$$

mit $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

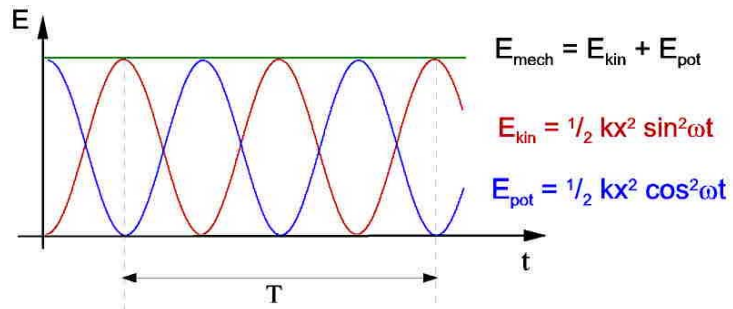
$$\underline{E = \frac{1}{2} k x_0^2}$$

Beachte: Ort: $-x_0 \leq x(t) \leq x_0$
 Energie: $0 \leq E(t) \leq E_0$ (immer positiv)

Linearer Oszillator:

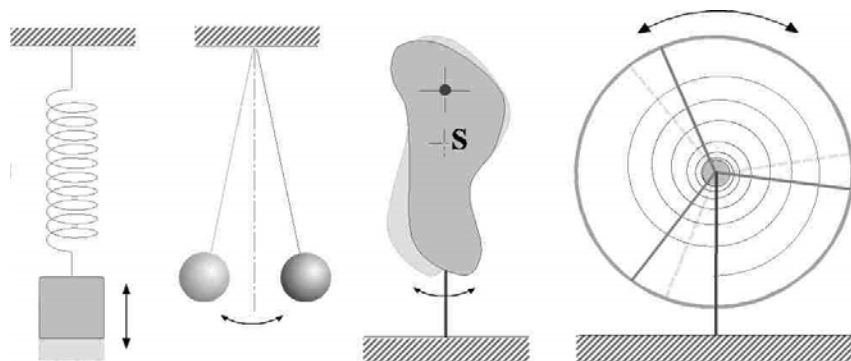
- Rücktreibendes Element (Feder) speichert die potenzielle Energie,
- träges Element (Masse) speichert die kinetische Energie

F86e



F87

Pendel



2. Erzwungene Schwingung

2.1 Dämpfung

Exp. gedämpfte Schwingung

Schwingung : periodische Wandlung von kin. in pot. Energie

Dämpfung: Reibung verbraucht Energie, die der Schwingung entzogen wird

Bild: Masse schwingt nach rechts, wird aber gebremst durch Reibung und Feder F88

Feder: $F = -kx$

Reibungskraft: $F_R = -bv$ (gilt nur für langsame Bewegung)

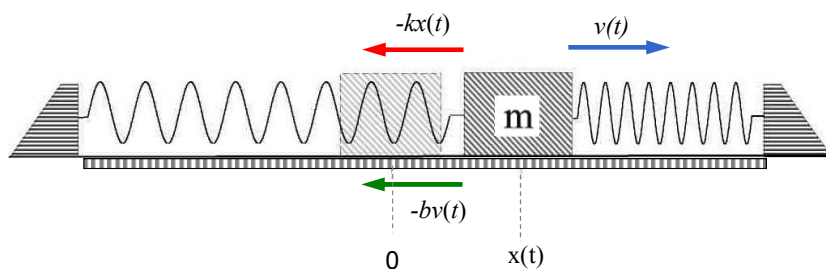
b , $[b] = \text{kg/s}$ Reibungskoeffizient

Kräftegleichung: $ma = -bv - kx$

F88



Harmonischer Oszillator mit Reibung



Kräftegleichung $ma = -bv - kx$

$$\rightarrow DGL \quad m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right) + b \left(\frac{dx}{dt} \right) + kx = 0$$

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} \right) + 2\delta \left(\frac{dx}{dt} \right) + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{mit Dämpfung } \delta = b/2m$$

Lsg: Funktion des Ortes $x(t)$ des Teilchens

$$x(t) = x_0 e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega' t + \varphi)$$

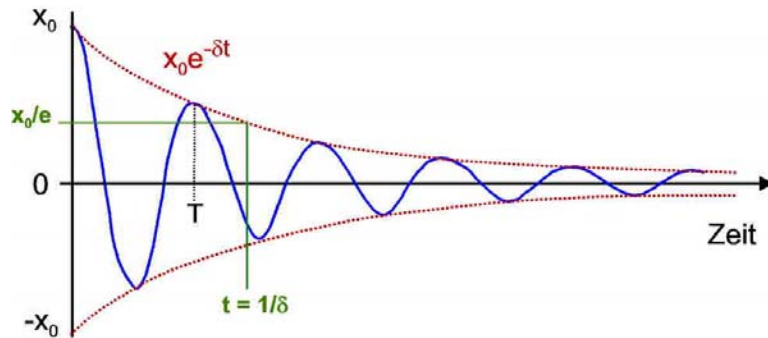
Amplitude · Schwingung

F89a

Eigen-Frequenz bei Dämpfung $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \delta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

gedämpfte Schwingung

F89a



Gedämpfte Schwingung

Funktion des Ortes $x(t)$ des Teilchens $x(t) = x_0 e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega' t + \varphi)$

neu bei Dämpfung:

Amplitude: $x_0 e^{-\delta t}$ fällt exponentiell mit Zeit t

Eigenfrequenz $\omega' < \omega_0$ (kleiner Effekt)

Periode $T' = 2\pi/\omega'$

Abklingzeit: $\tau = 1/\delta \rightarrow x(1/\delta) = x_0/e \approx 0,37x_0$

Verhältnis: $\frac{x(t)}{x(t+T')} = e^{-\delta T'} = \text{konstant}$

typischer Test ob exp-Funktion (siehe Praktikum)

Dämpfungsfälle

F89b

gegeben durch: $\omega' = \sqrt{k/m - \delta^2}$

1. Schwingfall: $\delta^2 < k/m \rightarrow \omega' > 0$

2. aperiodischer Grenzfall: $\delta^2 = k/m \rightarrow \omega = 0$

3. Kriechfall: $\delta^2 > k/m \rightarrow \omega$ imaginär

Gesamtenergie - nimmt mit der Zeit exponentiell ab:

$$E(t) = \frac{1}{2} k x(t)^2 = \frac{1}{2} k x_0^2 e^{-2\delta t}$$

nimmt schneller ab als Amplitude, da $E \sim x^2$

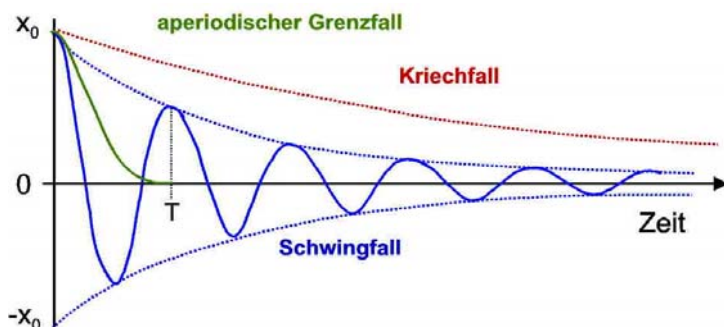
$$\rightarrow P = dE/dt = -2\delta E(t) \quad \text{Verlustleistung}$$

Bsp: Frage Wie sollte das Federsystem eines Motorrades ausgelegt sein?

Aperiodischer Grenzfall realisieren, also k, b, m wählen, so dass: $\delta^2 = k/m$

gedämpfte Schwingung

F89b



2.2 Resonanz

Energieverlust der gedämpften Schwingung kann durch Energiezufuhr von außen kompensiert werden, wenn sie im richtigen Takt erfolgt, also bei erzwungener Schwingung. Eine Schaukel muss im richtigen Takt angestoßen werden.

- Neu: zwei schwingende Systeme
- a) Schaukel mit eigener Kreisfrequenz ω'
- b) äußere anregende Kraft F_a mit Kreisfrequenz ω_a

$$ma + bv + kx = F_a \cos(\omega_a t) \quad \text{Kräftegleichung}$$

$$\rightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_a \cos(\omega_a t)$$

Beschleunigung Reibungskraft Rückstellkraft Externe Kraft

Bewegungsgleichung beschreibt die Schwingung (Differentialgleichung)

Bewegungsgleichung: $m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_a \cos(\omega_a t)$

Darstellung mit δ :
(Dämpfungskonstante) $\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_a}{m} \cos(\omega_a t)$

Lsg: Ort des Teilchens für $t \gg 1/\delta$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_a t - \varphi)$$

Amplitude $x_0 = \frac{F_a}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2 + b^2 \omega_a^2}}$

F90a

Eigenfrequenz ohne Dämpfung $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Resonanzfrequenz mit Dämpfung $\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$

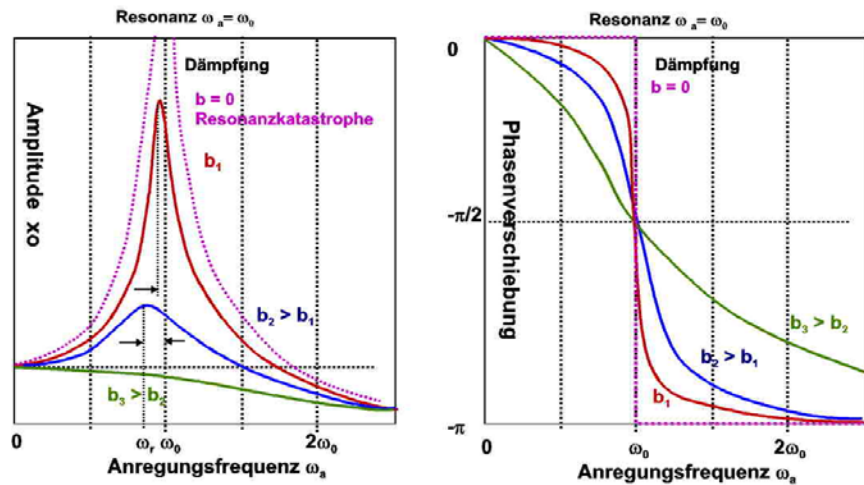
Phasenverschiebung System zu Anregung $\varphi = \arctan\left(\frac{2\delta\omega_a}{\omega_0^2 - \omega_a^2}\right)$

F90b

Resonanz

F90a/b

Erzwungene Schwingung



- Neu:
- System schwingt nicht mit Eigenfrequenz ω_0 sondern mit externer Frequenz ω_a ,
 - System und externe Anregung schwingen phasenverschoben, abh. von $(\omega_0^2 - \omega_a^2)$
 - Amplitude hängt stark von $(\omega_0^2 - \omega_a^2)$ ab, ist maximal bei $\omega_0 \approx \omega_a$ (Resonanz)

Exakte Position des Resonanzmaximums folgt aus:

$$\frac{dx_0}{d\omega_a} = 0 \quad \text{zu} \quad \omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Beachte: $\omega_{res} < \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

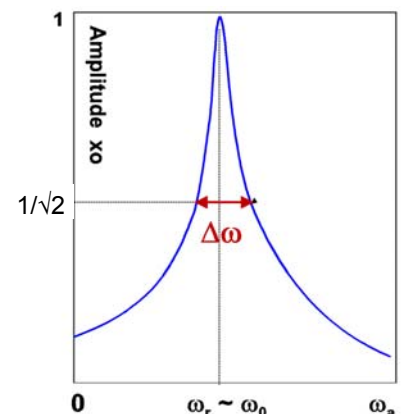
...d.h. etwas kleiner als Eigenfrequenz für gedämpfte Schwingung
Für uns reicht näherungsweise:

$$\omega_{res} \approx \omega_0$$

Halbwertsbreite

Aus der Halbwertsbreite der Amplitudenkurve lässt sich die Dämpfung ermitteln

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{b}{\omega_0 m} \Rightarrow \Delta\omega = 2\delta$$



3. Wellen

F91

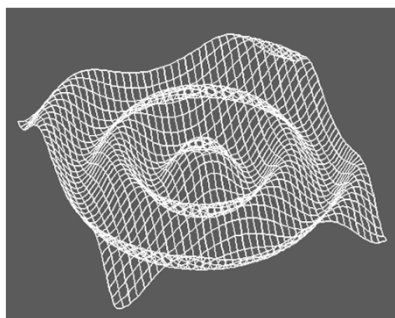
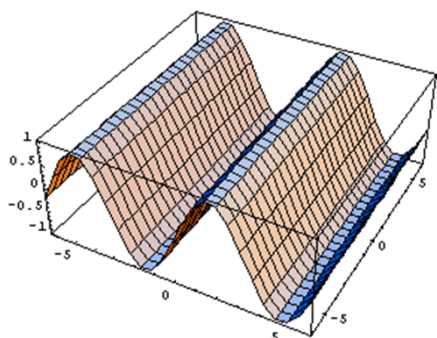
Wellen übertragen Information und Energie auch ohne Massentransport.

- Wellentypen:**
- a) Mechanische Wellen (Seil, Schall, Wasser)
 - b) Elektromagnetische Wellen (Funk, Licht, Röntgen) - kein Medium notwendig
 - c) Wahrscheinlichkeitswellen (Elektronen, Protonen, Photonen)

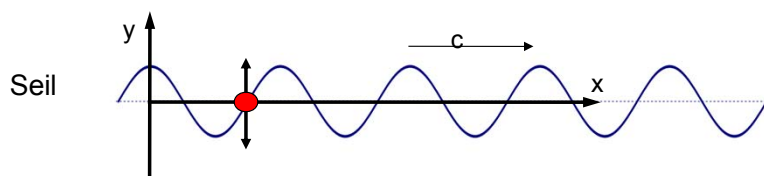
3.1 Wellenprinzip

Die Störung eines deformierbaren Mediums (Seil, Luft) breitet sich im Medium aus. Diesen zeitl. und räuml. veränderlichen Zustand bezeichnet man generell als Welle.

F91



A) Transversale Welle: Auslenkung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung F92a/b



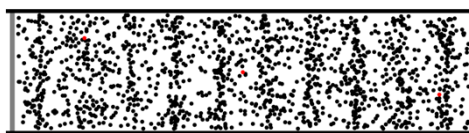
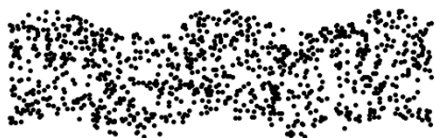
B) Longitudinale Welle: Auslenkung in Ausbreitungsrichtung (Schallwellen, Physik II)



Beachte: nur die Welle (Störung) breitet sich aus, nicht das Material selbst !

- Exp.** Feder in Längsrichtung anregen
- Exp.** Seil / Feder durch Hörsaal spannen und Wellen anregen, Impuls läuft über das Seil
- Exp.** Wellenmaschine

F92a/b



3.2 Wellenlänge & Frequenz

F93a/b/c

Schwingung eines Seilelementes am Ort x zur Zeit t

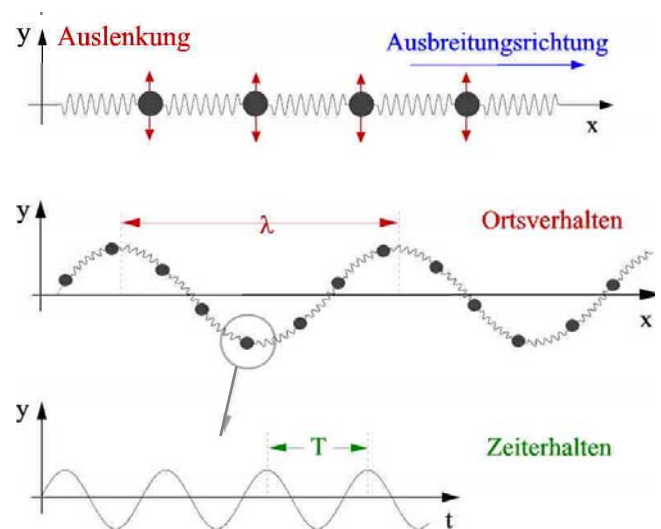
$$y(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$$

Auslenkung = Amplitude \times Schwingungsterm

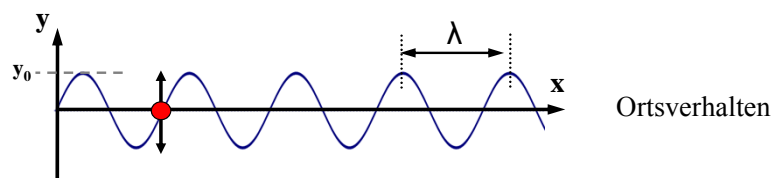
Amplitude	y_0	max. Auslenkung aus Gleichgewicht	F94
Phase	$kx - \omega t$	Argument der Sinusfunktion wächst linear mit t für festen Ort x	
Wellenlänge	λ	räumlicher Abstand zwischen zwei Wiederholungen der Wellenformen Bestimmung: Zeit festhalten und Foto der räumlichen Auslenkung machen	
Wellenzahl	$k = 2\pi/\lambda$	[k] = rad/m	

F93a-c

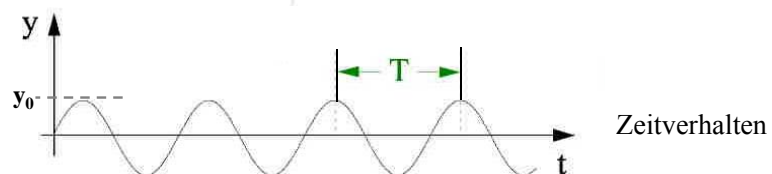
Wellenausbreitung



F94



Wellenlänge λ **Wellenzahl** $k = 2\pi/\lambda$



Periode T
Frequenz $f = 1/T = \omega/2\pi$ **Kreisfrequenz** $\omega = 2\pi f$

Schwingung eines Seilelementes am Ort x zur Zeit t

$$y(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$$

Periode T zeitlicher Abstand zwischen zwei Wiederholungen der Wellenfront

Bestimmung: Film drehen an festem Ort (Stab im Wasser bei $x = 0$)

Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ [ω] = rad/s

Bestimmung: festen Ort, z.B. $x = 0$ wählen und Periodizität ausnutzen

$$y(0, t) = y(0, t + T)$$

$$-y_0 \sin(\omega t) = -y_0 \sin(\omega t + \omega T) \rightarrow \omega T = 2\pi$$

Frequenz $f = 1/T = \omega/2\pi$

Die Frequenz einer Welle ist die Schwingungsfrequenz eines beliebigen Seilelementes, wie beim harmonischen Oszillator. Alle Seilelemente haben die gleiche Frequenz

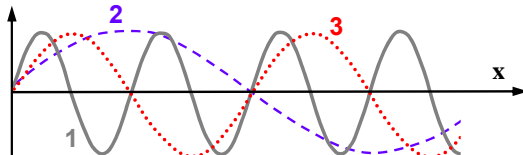
$$f = 1/T = \omega/2\pi$$

Bsp. Momentaufnahmen von Wellen $y = y_0 \sin(kx - \omega t)$ mit Phasen:

a) $2x - 4t$, b) $4x - 8t$, c) $8x - 16t$.

Frage Welche Phase entspricht welcher Welle ? 1-c, 2-a, 3-b

Lsg. $\lambda = 2\pi/k$ für a) $k = 2 \rightarrow \lambda = \pi$, für b) $k = 4 \rightarrow \lambda = \pi/2$ für c) $\lambda = \pi/4$



F95

3.3.1 Phasengeschwindigkeit der Welle

Wellenflächen: Flächen einer Welle, die mit gleicher Phase ($kx - \omega t$) schwingen

Kugelwellen: punktförmige Anregung breitet sich in alle Richtungen gleichartig aus

Ebene Wellen: Anregung der Kugelwelle liegt im Unendlichen

Mit welcher Geschwindigkeit breitet sich die Wellenfläche (Störung) aus?

Wellenfront $y(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t) = \text{konstant}$

$\rightarrow kx - \omega t = \text{konst. Phase}$ x, t ändern sich gleichermaßen

$$\frac{d}{dt}(kx - \omega t) = 0 = k \frac{d}{dt}(x) - \omega \rightarrow \frac{d}{dt}(x) = c = \frac{\omega}{k}$$

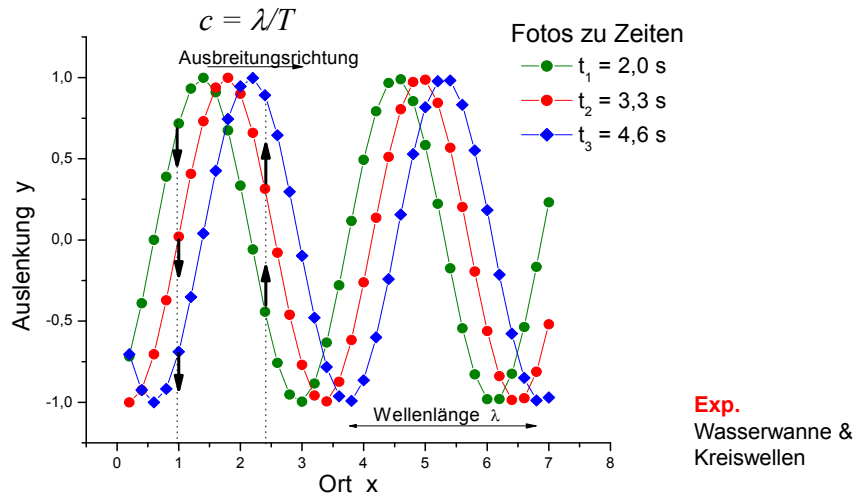
c : Phasengeschwindigkeit der Welle (nicht Teilchengeschwin.)

mit $\omega = 2\pi/T$, $k = 2\pi/\lambda$ $c = \lambda/T$

Welle bewegt sich in einer Schwingungsperiode um ihre Wellenlänge

Phasengeschwindigkeit der Welle

F95



Bsp. Welle läuft ein Seil entlang mit $y(x, t) = 0,0327 \sin(72,1 x - 2,72 t)$

Frage Amplitude der Welle?

Lsg. Wellenfunktion ist $y(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t) \rightarrow y_0 = 0,0327 \text{ m}$

Frage Wellenlänge, Periode, Frequenz der Welle?

Lsg. $k = 2\pi/\lambda = 72,1 \text{ rad/m} \rightarrow \lambda = 8,71 \text{ cm}$
 $\omega = 2\pi/T = 2,72 \text{ rad/s} \rightarrow T = 2,31 \text{ s} \rightarrow f = 1/T = 0,43 \text{ Hz}$

Frage Phasengeschwindigkeit der Welle?

Lsg. $c = \omega/k = (2,72 \text{ rad/s}) / (72,1 \text{ rad/m}) = 3,77 \text{ cm/s}$

Frage Auslenkung der Welle am Ort $x_1 = 22,5 \text{ cm}$ und Zeit $t_1 = 18,9 \text{ s}$?

Lsg. einsetzen in Wellenfunktion

$$y(x=0,225, t=18,9) = 0,0327 \sin(72,1 \cdot 0,225 - 2,72 \cdot 18,9) = 1,92 \text{ mm}$$

4. Interferenz von Wellen

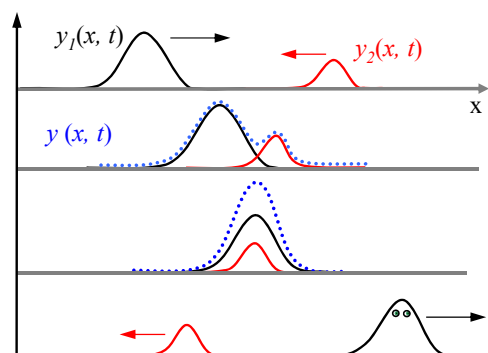
4.1 Superpositionsprinzip

Zwei Wellen $y_1(x, t)$ und $y_2(x, t)$ breiten sich gleichzeitig auf dem selben Seil (Medium) aus:

$$\rightarrow y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \quad (\text{Superpositionsprinzip})$$

Die Überlagerung von Wellen entspricht algebraischen Summe der einzelnen Wellen und ergibt eine resultierende Welle.

→ Überlappende Wellen beeinflussen sich bei ihrer Ausbreitung nicht.



4.2 Einfache Interferenz

zwei identische Wellen $y_1(x, t) = y_2(x, t)$ breiten sich in gleiche Richtung aus:

$$y_1(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t) \quad \text{und} \quad y_2(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

einzigster Unterschied: Phasenkonstante φ

Was passiert bei der Überlagerung (Interferenz) gleicher Wellen?

$$y(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t) + y_0 \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

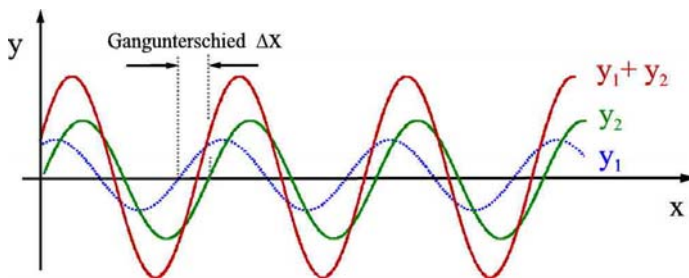
mit: $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos\left(\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right) \sin\left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right)$

$$\rightarrow y(x, t) = 2y_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Auslenkung Amplitude Schwingungsterm

Überlagerung ist eine Sinus-Welle $y(x, t)$ mit: Phasenkonstante $\frac{\varphi}{2}$ und

Amplitude $2y_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ stark abhängig von der Phase φ der beiden Wellen !



$$y(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t) + y_0 \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

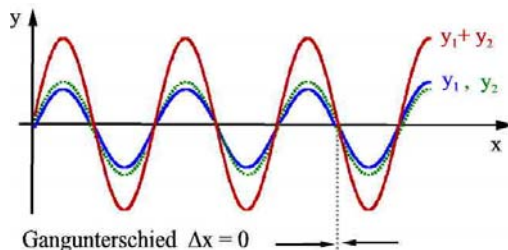
Fall a) $\varphi = 0$ beide Wellen in Phase

$y(x, t) = 2 y_0 \sin(kx - \omega t)$ doppelte Amplitude, **konstruktive Interferenz**

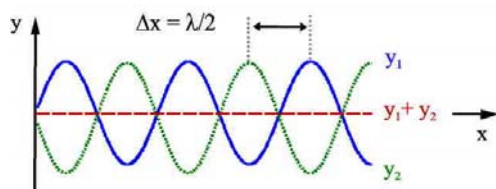
Fall b) $\varphi = 180^\circ$ beide Wellen außer Phase

$y(x, t) = 0$ da $\sin(kx - \omega t + 180^\circ) = -\sin(kx - \omega t)$

immer & überall Null, **destruktive Interferenz**



Konstruktive Interferenz



Destruktive Interferenz

Phasendifferenz und Gangunterschied Δ

Der Gangunterschied ist die Phasendifferenz von zwei gleichen Wellen gemessen in der Wellenlänge λ

Welle wiederholt sich exakt:	$\varphi = 2\pi$	$\Delta = \lambda$	F98
Interferenz konstruktiv:	$\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots n(2\pi)$	$\Delta = 0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots n\lambda$	
Interferenz destruktiv:	$\varphi = \pi, 3\pi, \dots (2n+1)\pi$	$\Delta = \frac{1}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda, \dots (2n+1)/2\lambda$	

F98

Bsp. 2 Wellen mit folgenden Gangunterschieden überlagern sich
 $\Delta = 0,2\lambda, 0,45\lambda, 0,6\lambda, 0,8\lambda$
 Ordne die resultierende Amplitude nach der Größe: 1. 4. 3. 1.

4.3 Stehende Wellen

F99

Was passiert bei einem eingespannten, räumlich begrenztem Seil, wenn sich 2 sinusförmige Wellen in entgegen gesetzte Richtung ausbreiten?
 Es bildet sich eine stehende Welle aus!

F100a-e

bei stehenden Wellen:

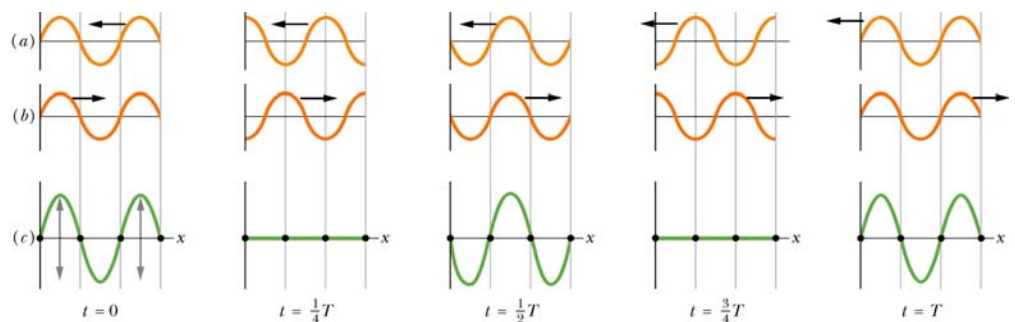
- schwingendes Medium ist räumlich begrenzt
- Schwingungs-Knoten: Ort x, wo Seil immer in Ruhe ist
- Schwingungsbäuche: Ort x, wo Seil mit max. Amplitude schwingt
- Knoten bzw. Bäuche stehen, sie wandern nicht in x-Richtung, nur Bewegung in y-Richtung

Exp. 1) Gitarrensaite, 2) stehende Welle am langen gespannten Seil
 Ton der schwingenden Gitarrensaite = Resonanzfrequenz der stehenden Welle

Exp. Film über stehende Welle

F99/100a-e

Stehende Wellen



Halliday, Resnick, Walker „Physik“, Wiley VCH

Berechnung: Überlagerung entgegengerichteter Wellen:

$$y_1(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2(x, t) = y_0 \sin(kx + \omega t)$$

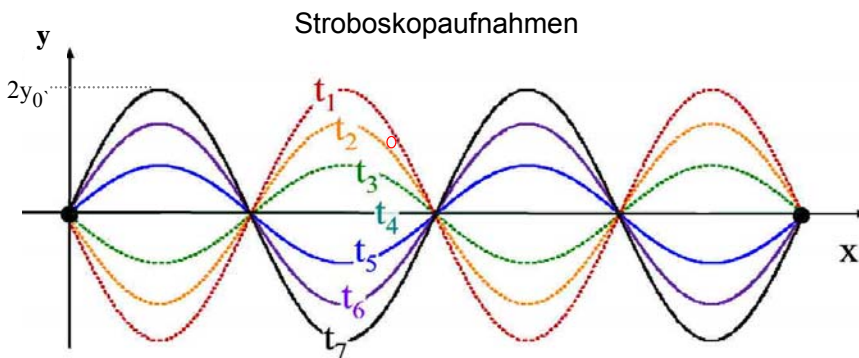
$$y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

(mit $\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cos(\frac{1}{2}(\alpha - \beta)) \sin(\frac{1}{2}(\alpha + \beta))$)

$$\rightarrow y'(x, t) = 2 y_0 \sin(kx) \cdot \cos(\omega t)$$

Auslenkung Amplitude Schwingungsterm

- Neu:**
- Ort x und Zeit t sind entkoppelt
 - Amplitude $2y_0 \sin(kx)$ hängt vom Ort x ab,
(laufende Wellen hat für alle x gleiches y_0)



Knoten: $\sin(kx) = 0 \rightarrow kx = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$
 $\rightarrow x = n\lambda/2, \quad \text{Abstand benachbarter Knoten} = \lambda/2$

Bäuche: $\sin(kx) = 1 \rightarrow kx = (n + \frac{1}{2})\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$
 $\rightarrow x = (n + \frac{1}{2})(\lambda/2) \quad \text{Abstand benachbarter Bäuche} = \lambda/2$

4.4 Resonanz stehender Wellen

Wir haben stehende Wellen betrachtet, aber unter welchen Bedingungen bildet sich überhaupt eine stehende Welle aus?

Betrachte: Zwischen 2 Wänden eingespanntes Seil wird periodisch angeregt
 Anregung der Welle läuft zur Wand, wird reflektiert läuft zurück, reflektiert usw.

Interferenz aller gegenläufigen Wellen ergibt resultierende Welle

\rightarrow nur bei bestimmten Resonanzfrequenzen bildet sich eine stehende Wellen aus!

Bedingung für Resonanz / stehend Welle:

Schwingungsknoten an Befestigungspunkten

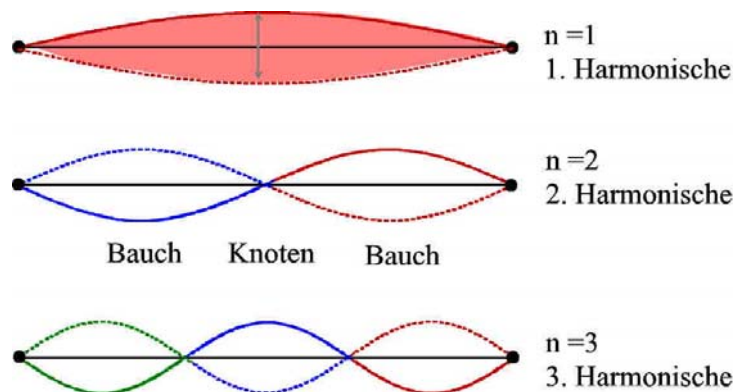
F102a-c

1 Bauch: einfachster Fall $\rightarrow L = \lambda / 2$ 2 Bäuche: zweite Wellenform $\rightarrow L = \lambda$ 3 Bäuche: dritte Form $\rightarrow L = (3/2) \lambda$

stehende Wellen bilden sich aus, wenn:

Wellenlänge: $\lambda = 2L/n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ Frequenz: $f = c/\lambda = nc / (2L)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ Bezeichnung $n = 1$: Grundschiwingung (1. Harmonische)
 $n = 2$: erste Oberschiwingung (2. Harmonische) usw.Beachte: Wellenlänge hängt nur von Seillänge L abFrequenz (Ton) hängt von der Seillänge & Wellengeschwindigkeit c ab

F102a-c

Wellenlänge hängt nur von Seillänge L abFrequenz (Ton) hängt von der Seillänge & Wellengeschwindigkeit c ab**Exp.** Gitarrensaite: Spannung ändern heißt Geschwindigkeit c ändern

$$c = \sqrt{\frac{F_S}{\mu}} \quad F_S: \text{Spannungskraft, } \mu: \text{lineare Dichte der Saite}$$

$$f = \frac{c}{\lambda} = \sqrt{\frac{F_S}{\mu}} \frac{n}{2L}$$

$$\rightarrow f \sim \sqrt{F_S}$$

Exp. Stehende Welle auf Pauke

Elektrostatik & Dynamik

Erste Berichte der Griechen: geriebener Bernstein (gr. Elektron) zieht Strohhalme an. Es gibt Gestein (Magnetit), das Eisen anzieht.

William Gilbert fand heraus, dass andere Stoffe ebenfalls durch Reibung elektrisiert werden können.

Er führte 1600 den Begriff „electrica“ für die Erscheinungen ein.

1820 beobachtet Oerstedt erstmals den Zusammenhang zwischen elektrischen Strömen und Magnetismus. Seitdem arbeitete man an der Vereinheitlichung beider Gebiete, vor allem Michael Faraday und James Clerk Maxwell.

1.1 Elektrische Ladung q

Sie ist eine intrinsische Materialeigenschaft aber keine Substanz, ebenso wenig wie die Masse

- a) Es gibt 2 Ladungen: Positive Ladung ($+q$), Negative Ladung ($-q$) F103

Neutraler Körper: $Q = (+q) + (-q) = 0$ also gleich viel pos. wie neg. Ladung

Geladener Körper: $Q = (+q_1) + (-q_2) \neq 0$ also Ladungsungleichgewicht

- b) Ladung ist quantisiert:

Elementarladung $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ Elektronenladung (Einheit Coulomb)

Ladungsmenge $Q = n e$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ Aber nie $q = 3,8e$!

- c) Ladung ist eine Erhaltungsgröße, wie Energie, Impuls, Drehimpuls

Man kann Ladung nicht einzeln vernichten oder erzeugen - nur trennen:

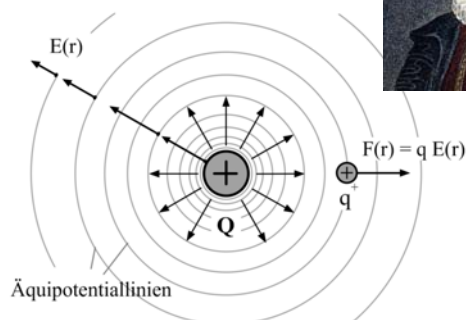
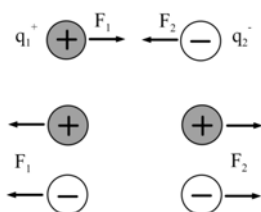
Bsp. Ionisation $\text{H} \rightarrow \text{H}^+ + \text{e}^-$

- d) Kraftwirkung: Ladungen mit gleichem Vorzeichen stoßen sich ab,
Ladungen mit unterschiedlichem Vorzeichen ziehen sich an.

F103

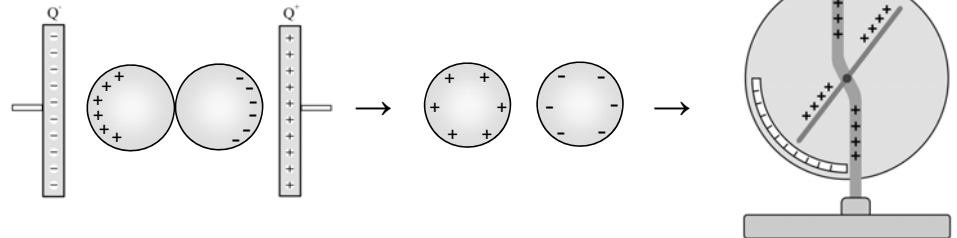


Elektrische Ladung



1.2 Influenz

Exp. Influenz: 2 kontaktierte Kugeln werden in E-Feld gebracht.
 → Ladungsverschiebung
 Kugeln trennen = Ladungstrennung.
 Man kann mit jeder Kugel ein Elektroskop laden



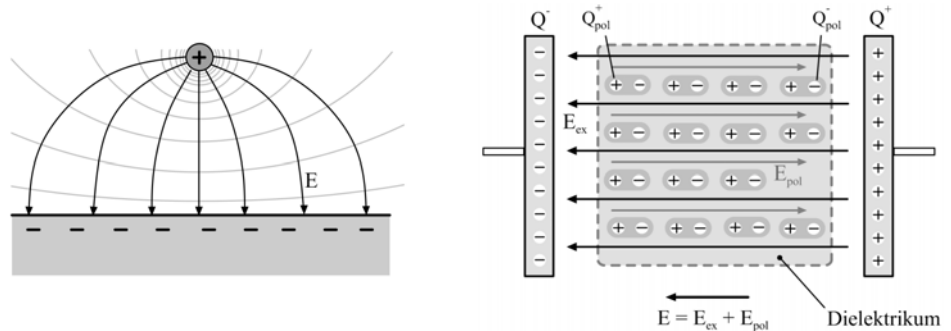
Polarisation: Verzerrung der Ladungsverteilung im neutralen Körper durch externe elektrische Kraft

F104

Exp. Wasserstrahl mit aufgeladenem Glasstab ablenken Polarisation
Exp. Luftballon laden und an Tafel / Wand kleben Influenz und Polarisation hält den Ballon

F104

Polarisation



1.3 Leitung

F105

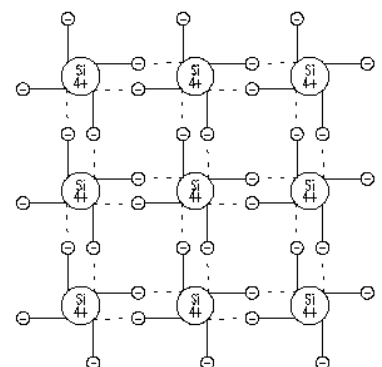
Je nach Material sind Elektronen nur locker an Rumpf gebunden und quasi frei beweglich

- elektrischer Leiter
- pos. Ionen bleiben fest, neg. Elektronen tragen Strom

Isolator: Elektronen sind fest an Atomrumpf gebunden, nicht beweglich

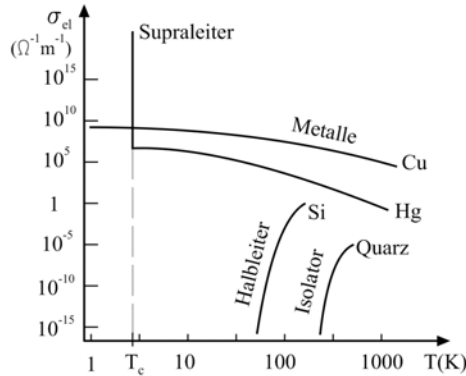
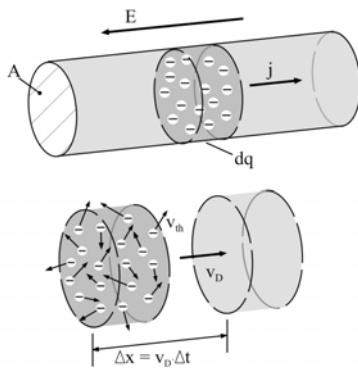
Halbleiter: zwischen Isolator & Leiter, Leitung bei höherer Temperatur

Supraleiter: elektrische Leitung ohne Stromverlust, d.h. Widerstand ist nicht nur klein sondern Null! Leitung durch Cooper-Paare (gekoppelte Elektronen)



Stromleitung

F105



1.4 Coulombsches Gesetz

F106

Zwei kleine Teilchen stehen im Abstand r und tragen die Ladungen q_1 und q_2 . Dann wirkt zwischen ihnen die abstoßende / anziehende elektrostatische Kraft

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad \text{mit: } \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2) \text{ Dielektrizitätskonstante}$$

Das Gesetz gilt makroskopisch & im atomaren Bereich!

Superpositionsprinzip

Für n geladene Teilchen überlagern sich die Kräfte unabhängig voneinander wie Vektoren

$$\vec{F}_{1res} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \dots + \vec{F}_{1n}$$

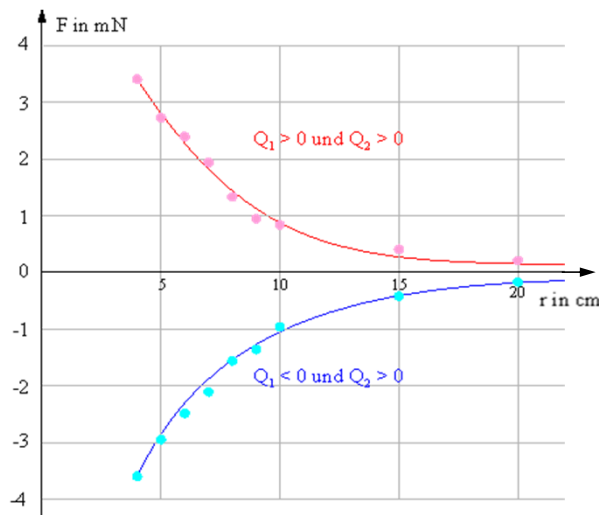
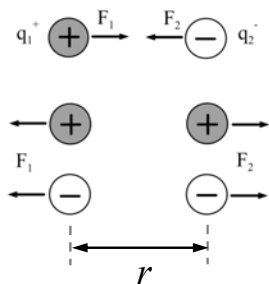
\vec{F}_{14} : Kraft auf Teilchen 1, ausgehend von Teilchen 2

Gleichverteilung:

Bringt man Ladung auf eine elektrisch leitende Fläche, so verteilt sie sich homogen.

F106

Coulombkraft



2. Elektrische Felder

Es wirken Kräfte zwischen zwei elektrischen Ladungen, aber woher weiß Ladung q_1 von Ladung q_2 ? Wie kann die Kraft wirken, obwohl sich die Teilchen nicht berühren? Wer vermittelt die Kraft?

Idee: die elektrische Ladung q_1 baut ein elektrisches Feld auf, das am Punkt P im Raum eine elektrische Kraft auf eine andere Ladung bewirkt.

Beispiele für Felder:

F107a/b

2.1.1 Skalares Feld: z.B. Temperaturfeld im Raum

Jedem Punkt (x, y) des Raumes wird eine Temperatur zugeordnet

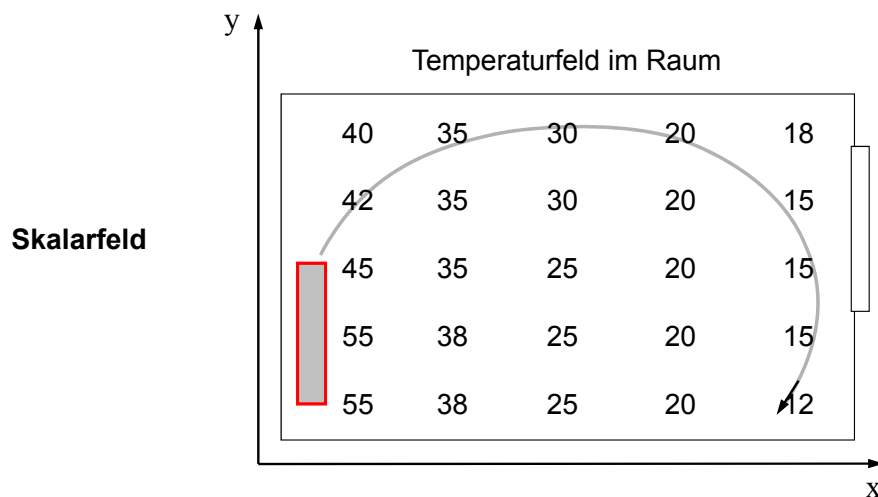
2.1.2 Vektorfeld: z.B. Gravitationsfeld in Erdnähe

Jedem Punkt $P(x, y)$ des Raumes wird ein Vektor $\vec{g}(x, y)$ zugeordnet, Pfeillänge = $|\vec{g}|$

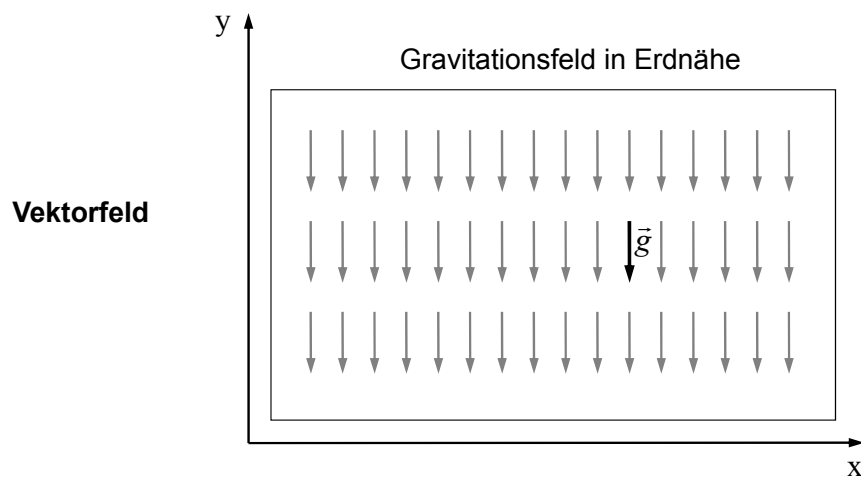
Kraft auf Masse m im Gravitationsfeld:

$$\vec{F}(x, y) = m\vec{g}(x, y) = m\vec{g}, \text{ da } \vec{g} = \text{konstant}$$

F107a



F107b



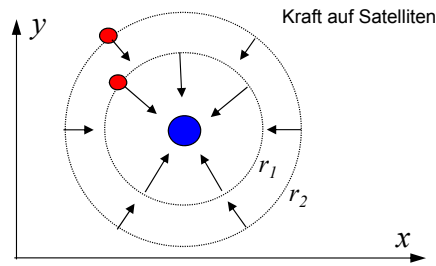
2.1.3 Beispiel: Gravitations-Kraftfeld

wird erzeugt durch Masse

$m_E =$ Erde, $m =$ Satellit im Abstand r

$$|\vec{F}| = G \frac{m m_E}{r^2} = m|\vec{g}|$$

$$|\vec{g}| = \frac{Gm_E}{r^2}$$



Pfeillänge = Kraftbetrag, Kräfte zeigen radial zum Erdmittelpunkt an jedem Punkt (x, y)

2.1.4 Feldmessung

Messung der Kraftwirkung des Feldes auf eine kleine Probemasse

Probemasse $m \ll m_E$ beeinflusst Gravitationsfeld der Erde nicht, kann g -Feld testen

2.1.5 Elektrisches Feld \vec{E}

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}$$

F108

Kraftwirkung auf Probeladung q_0 durch Feld E übermittelt

Vektorfeld E -Feld existiert auch ohne Probeladung q_0

Probeladung q_0 ist so klein, dass sie das E -Feld nicht stört, (Testladung)

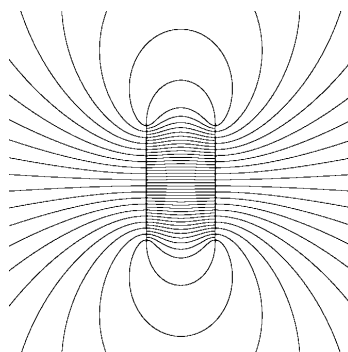
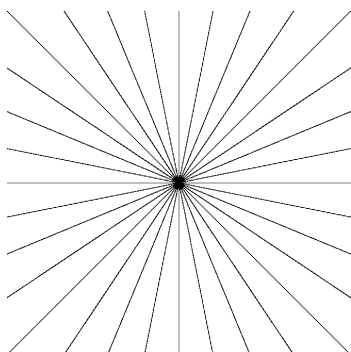
2.2 Elektrische Feldlinien

- Elektrische Felder werden erzeugt durch Ladungen
- Feldlinien beginnen bei positiver Ladung und enden bei negativer Ladung
- beschreiben die elektrische Kraftverteilung im Raum
- sind nur ein Modell, sie existieren nicht wirklich
- Die Tangente an der Feldlinie gibt die Richtung des Feldes
- Dichte der Feldlinien ist proportional zur Feldstärke
- Feldlinien kreuzen sich nie

F108



Feldlinien: Punktladung / Kondensator



2008 / Martin Lieberherr

2.2.1 E-Feld einer Punktladung

F109

E-Feld der Punktladung q wird getestet durch dessen Kraft auf Probeladung q_0 mit $q_0 \ll q$

$$\text{Kraftbetrag: } F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q||q_0|}{r^2} \quad \text{Feld: } E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2}$$

Eigenschaften: \vec{E} maximal im Ladungszentrum bei $r = 0$

\vec{E} zeigt radial nach außen

$|E|$ fällt mit Abstand wie $1/r^2$

Das Feld E , mehrerer Ladungen q_i ist die Summe der Einzelfelder E_i

Kraft: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_i + \dots$ (vektorielle Addition)

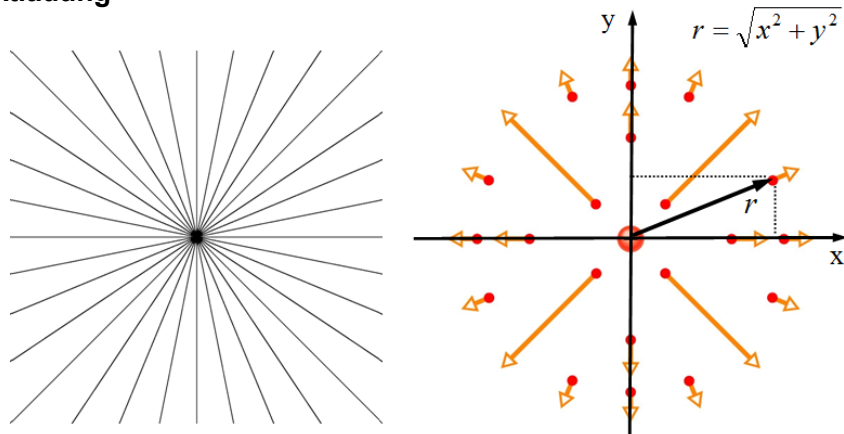
$$\text{Feld: } \vec{E} = \frac{\vec{F}_1}{q_0} + \frac{\vec{F}_2}{q_0} + \dots + \frac{\vec{F}_i}{q_0} + \dots$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_i + \dots$$

F109



Punktladung



2.2.2 Zwei gleiche (pos.) Punktladungen

F110

Feldlinien enden bei neg. Ladungen im Unendlichen
 Rotationssymmetrisch um Achse durch die beiden Ladungen
 (Äquipotenziallinien: siehe Kapitel 4.4)

2.2.3 Geladene, nichtleitende Platte

Feldlinien sind senkrecht auf der Platte

2.2.4 Punktladung im E-Feld

Die elektrostatische Kraft F auf ein geladenes Teilchen im E-Feld ist

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

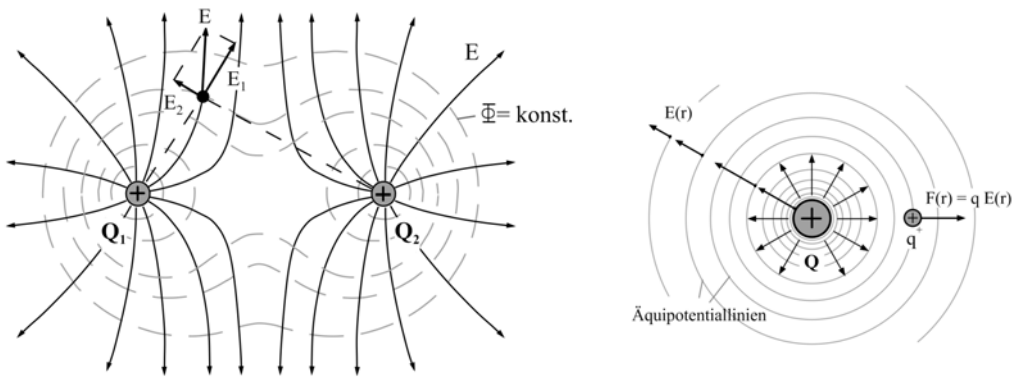
q pos. $\rightarrow F$ parallel E , q neg. $\rightarrow F$ antiparallel E (bei Elektronen)

E-Feld-Rechnungen : <http://www.pk-applets.de/phy/efeld/efeld.html>

Exp. E-Feldlinien sichtbar machen durch Fasern in Öl im E-Feld

Zwei gleiche (pos.) Punktladungen / Punktladung im E-Feld

F110



Bsp. Tintenstrahldrucker

F111

Tintentropfen werden mit Ladung \$q\$ belegt (Druckmuster) fliegen in konstantes E-Feld, werden abgelenkt, je nach \$q\$

Frage: Ablenkung \$y\$ des Tropfens als Funktion der Ladung ?

Lsg. Tropfenmasse \$m = 1,3 \times 10^{-10}\$ kg, \$q = -1,5 \times 10^{-13}\$ C, \$v_x = 18\$ m/s,
 E-Feld \$1,4 \times 10^6\$ N/C, Plattenlänge \$L = 16\$ mm,
 Gravitationskraft klein gegen E-Kraft
 konstantes \$v_x\$, aber in \$y\$-Richtung beschleunigt, da \$F = \text{konst.}\$

$$a_y = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} \quad \text{nach oben } (-q)$$

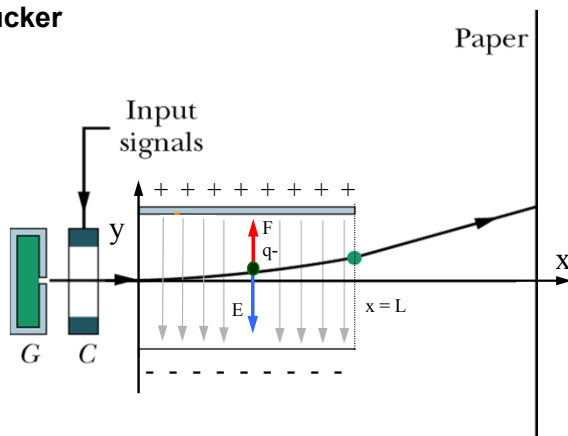
$$t = L/v_x \quad \text{Zeit für Durchquerung der Platten in x-Richtung}$$

$$y = \frac{1}{2} a_y t^2 \quad \text{Ablenkung in y-Richtung}$$

$$\rightarrow y = \frac{qEL^2}{2mv_x^2} = \underline{0,64 \text{ mm}} \quad (\text{am Ende der Platten, nicht am Schirm})$$

F111

Tintenstrahldrucker



- Exp.
- 1) Braunsche Röhre, Ablenkung von Elektronen im E-Feld
 - 2) Oszilloskop
 - 3) Leuchtstoffröhre neben Teslatrafo, Elektronenanregung ohne Kontakt durch E-Feld

3.1 Elektrischer Dipol

wichtig für Atome, Antenne, Abstrahlcharakteristik, Optik

berechne: E -Feld im Punkt P auf der Ladungsachse
im Abstand z von Ladungszentrum

F112

Ladungen $q_{(+)}$, $q_{(-)}$ erzeugen je ein E -Feld

$$E = E_{(+)} - E_{(-)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-^2} = \dots = E = \frac{qd}{2\pi\epsilon_0 z^3} = \frac{\vec{p}}{2\pi\epsilon_0 z^3}$$

für Punkt auf der Dipolachse.

Dipolmoment:

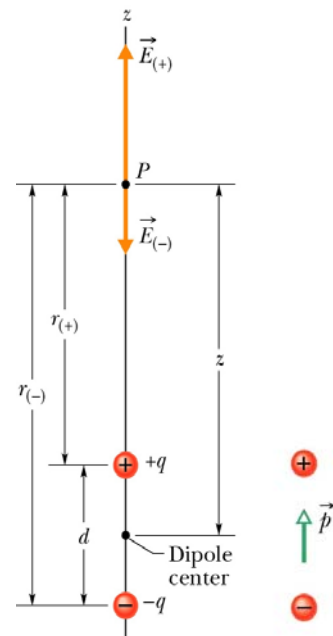
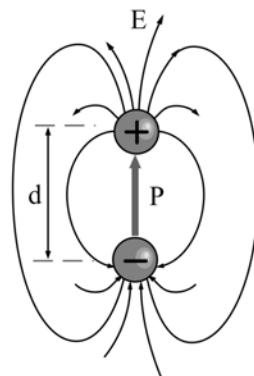
$$\vec{p} = q\vec{d}$$

Gibt Orientierung des Dipols (Achse) an, Richtung von neg. zu pos. Ladung
Feldmessung ergibt nur p , nicht aber q oder d isoliert

Merke: Punktladung: $E \sim 1/z^2$

Dipol $E \sim 1/z^3$, da Dipolladungen sich gegenseitig schwächen

F112



3.2. Dipol im E-Feld

Dipol misst die Orientierung des E-Feldes, stellt sich wie eine Kompassnadel ein. Wichtig z.B. für Bindung von Molekülen an Oberflächen (Katalyse),

Typ. Beispiel ist Wasser im E-Feld

Homogenes Feld nur Drehmoment T um Schwerpunkt

F113

Keine Kraft, da Dipolgesamtladung $q = 0$

$$\text{Drehmoment} \quad T = 2 \cdot F \sin\theta \cdot d/2 = Fd \sin\theta$$

$$\text{Dipolmoment} \quad p = qd$$

$$\rightarrow T = pE \sin\theta \quad (\text{mit } F = qE)$$

$$\rightarrow \vec{T} = \vec{p} \times \vec{E}$$

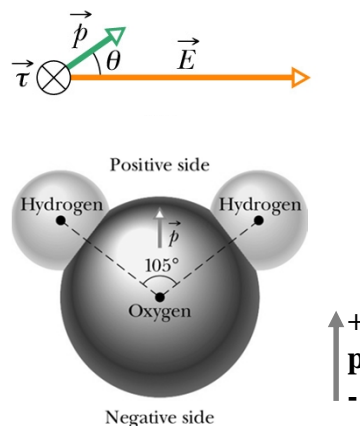
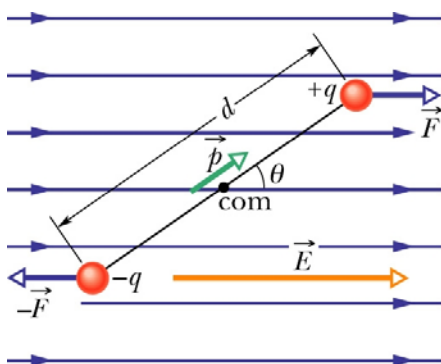
Merke: Punktladung wird im E-Feld verschoben, Dipol wird im homogenen E-Feld gedreht

Anwendung: Dipole von Flüssigkristallen werden im E-Feld ausgerichtet und absorbieren polarisiertes Licht. \rightarrow hell/dunkel

F113



Dipol im E-Feld



4. Elektrische Spannung & Potenzial

Welche Arbeit leistet die elektrische Kraft an einem geladenen Teilchen im elektrischen Feld? Die Betrachtung erfolgt analog zum Verschieben einer Masse im Gravitationsfeld der Erde.

4.1 Rückblick (Mechanik 5.4): Verschiebe-Arbeit

F114

Masse soll auf einen Berg gebracht werden - Bewegung durch Gravitationsfeld

$$\text{Arbeit:} \quad dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad W = \sum dW = mg(y_2 - y_1) = mgh$$

$$h = y_2 - y_1$$

nur Streckenanteil parallel zu g ist relevant Potenzial y (Höhe)

Potenzialdifferenz ist proportional zur Arbeit !

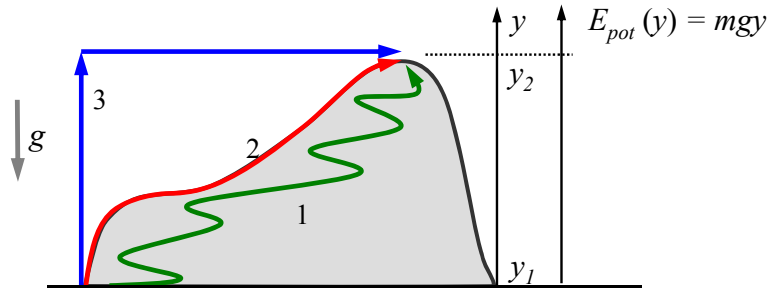
Äquipotenziallinien: Höhenlinien, $y = \text{konstant}$

Arbeit ist unabh. vom Weg, gleiche Arbeit für Wege 1), 2), 3)
abh. nur von Höhendifferenz $(y_2 - y_1)$, $E_{pot} = mgh$

Rückblick (Mechanik 5.4): Verschiebe-Arbeit

F114

Bewegung im Gravitationsfeld vgl. Elektrisches Potential



4.2 Elektrische Verschiebe-Arbeit

Ladung q wird durch ein konstantes elektrisches Feld bewegt, Integraldarstellung umgehen!

Weg: $d\vec{r} = (dx, dy) = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y$

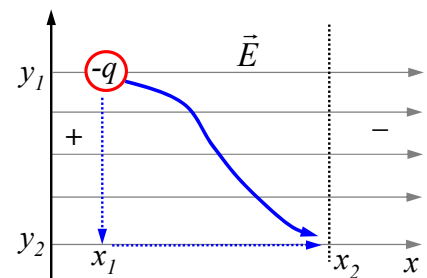
Arbeit: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q\vec{E} \cdot d\vec{r}$

Nur Weg dx parallel zu E ist relevant

$$W = qE(x_2 - x_1)$$

Arbeit ist unabhängig vom Weg,

pot. Energie: $E_{el} = W$, Energie der Ladung, gewonnen durch Verschieben im E-Kraftfeld



4.3 Elektrische Spannung

Ziel: Berechnung der Verschiebe-Arbeit der Ladung q im E-Feld um Weg dr

$$dW = q\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Zweckmäßig: Trennung von Ladung q und Eigenschaft des Feldes $\vec{E} \cdot d\vec{r}$

Definiere Elektrisches Potenzial $\Phi(r) = -E \cdot \vec{r}$
(hier Spezialfall für $E = \text{konstant}$)

Definiere Potenzialdifferenz zwischen den Punkten r_1 und r_2 :
 $\Phi(r_2) - \Phi(r_1) = -E \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$

Definiere Spannung als Potenzialdifferenz zwischen 2 Punkten (\vec{r}_2, \vec{r}_1)
 $U = \Phi(r_2) - \Phi(r_1)$ [U] = Volt = J/C

Dann lässt sich die Arbeit zur Verschiebung der Ladung zwischen den Punkten berechnen, zu:

$$W = qU$$

Elektrische Arbeit: $W = qU$ Einheit der Spannung: J/C

- unabhängig vom Weg, nur abhängig von Spannung U zwischen den Punkten r_1 und r_2
- Spannung U spielt für E -Feld gleiche Rolle wie Höhe h im g -Feld
- es ist meist einfacher mit Spannung U als mit E -Feld (Vektor) zu rechnen

Beachte: nur Spannung zwischen zwei Punkten macht Sinn, so wie Strom durch eine Leitung

Spannung: Arbeit, die nötig ist um eine Ladungsmenge von einem Pol zum anderen Pol zu verschieben.

$$U = \frac{W}{q} \quad 1 \text{ Volt} = 1 \text{ J/C}$$

4.4 Äquipotenzialflächen

F116

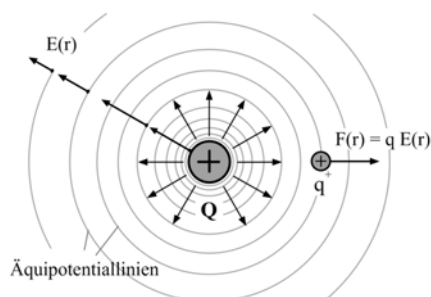
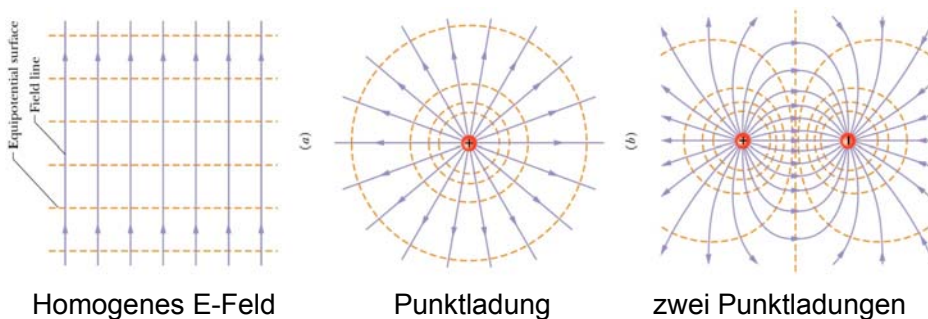
wie kann man eine Ladung q durch ein E -Feld bewegen, ohne dass sie Energie gewinnt oder verliert, bzw. ohne Arbeit an ihr zu verrichten?

Arbeit $0 = dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q\vec{E} \cdot d\vec{r}$
 \rightarrow Weg $d\vec{r}$ muss senkrecht auf \vec{E} sein
 $W = q(\Phi(r_2) - \Phi(r_1)) = 0$
 \rightarrow Potenzial $\Phi(\vec{r}) = \textit{konstant}$

Äquipotenzialflächen sind:

- Flächen im Raum mit konstantem Potenzial $\Phi(r)$
- stehen immer senkrecht auf dem E -Feld
- je dichter sie liegen, desto größer ist das E -Feld

F116



4.5 Berechnung des E-Feldes aus dem Potenzial $\Phi(r)$

F117

wenn 3-dimensionales Potenzial $\Phi(\vec{r})$ mit $\vec{r} = (x, y, z)$

bekannt, dann kann man Äquipotentialflächen zeichnen und senkrecht dazu das E -Feld eintragen. Welchen Betrag hat aber das E -Feld?

Dazu muss man das Potenzial nach dem Ort r , also den Koordinaten (x, y, z) ableiten. Für den einfachen, eindimensionalen Fall erhalten wir aus:

$$\text{Potenzial: } d\Phi(x) = -E \cdot dx \quad E\text{-Feld: } E = -d\Phi / dx$$

E -Feld ist die räumliche Änderungsrate des Potenzials

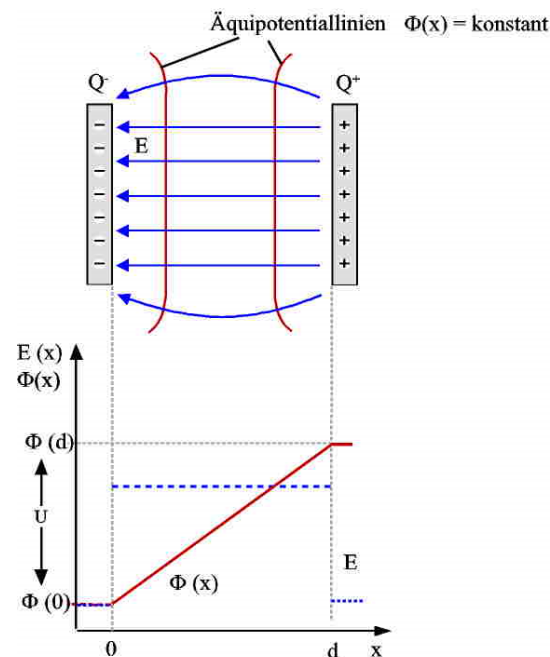
Bsp. Zwei gegenüberliegende Metallplatten (Plattenkondensator) im Abstand d und mit der Spannung U zwischen den Platten

$$E = \frac{d\Phi}{dx} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{x_2 - x_1} = \frac{U}{d}$$

q^+ von $x_1 = 0$ nach $x_2 = d$ zu bringen kostet Arbeit

q^+ bei x_2 los lassen: potentielle Energie wird frei

F117



4.6 Potenzial eines (isolierten) Leiters

F118

- Eine Überschussladung verteilt sich auf einem Leiter gleichmäßig über die Oberfläche.
- Alle Punkte auf dem Körper und auch in seinem Inneren haben gleiches Potenzial.

Beweis: Wenn Ladung gleichmäßig verteilt ist, wirken keine elektrischen Kräfte, also $E = 0$

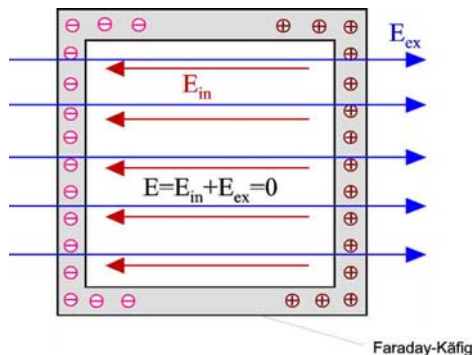
$$\rightarrow \Phi_2 - \Phi_1 = -E(x_2 - x_1) = 0 \quad \text{also } \Phi_1 = \Phi_2 \quad \text{für alle Orte } x$$

Anwendung: Faraday Käfig (Abschirmung)

Prinzip: neutraler geschlossener Leiter (Metallkäfig, Kugel) wird in ein E -Feld gebracht. Das äußere E -Feld verschiebt die Ladung (Influenz) so, dass ein Gegenfeld im Inneren herrscht, das das äußere Feld kompensiert.

Exp. Neonröhre gegen Funksender abschirmen

F118



4.7 E-Felder an Spitzen

F119

An Metall-Spitzen bilden sich sehr hohe elektrische Feldstärken

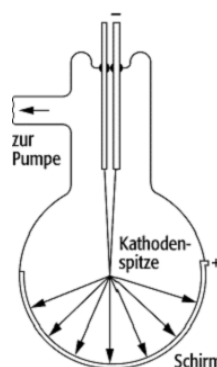
$$E = - \frac{d\Phi}{dx}$$

Radius dx der Spitze klein machen $\rightarrow E$ steigt

\rightarrow Entladungserscheinungen in Luft (Mast eines Segelschiffs, bei Gewitter)

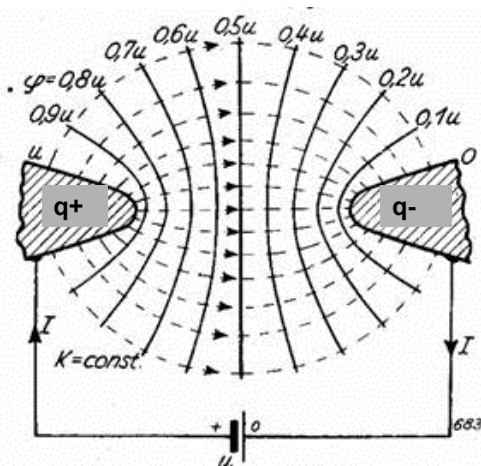
\rightarrow Feldemissionsmikroskop: Elektronen können leichter austreten

Exp. Überschlag an Spitze - Platte, an Kugel - Platte



F119

E-Felder und Potentiallinien an Spitzen



5 Kapazität

Mechanische Energie lässt sich speichern durch Federkompression, Gasdruck, Anheben von Masse im Gravitationsfeld. Elektrische Energie lässt sich durch Laden eines Kondensators speichern. Im Computer speichern Mikrocondensatoren Information in Form von Ladung.

5.1 Kondensator

F120

Definition: Kondensator besitzt zwei voneinander isolierte Leiter beliebiger Form.

Zeichen: —|—|— (Ursprung Plattenkondensator)

Ladung: Q^+ , Q^- betragsmäßig gleich, befindet sich je auf den beiden Platten

Spannung: U zwischen den Platten

Kapazität:

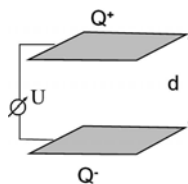
$$C = \frac{Q}{U} \quad [C] = \text{F} = \text{C/V Farad} \quad (\text{Faraday})$$

Maß für Fassungsvermögen der Ladung q bei gegebener Spannung zwischen Platten

Kapazität ist nur abh. von der Bauform des Kondensators

F120

Kondensator



Unterschied: Kondensator / Batterie:

Batterie hält Spannung aufrecht wenn Strom fließt, elektrochemischer Prozess wie Pumpe

Kondensator lässt die gespeicherte Ladung fließen, Spannung fällt dann auf $U = 0$

Kapazität: $C = \frac{q}{U} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$ nur abhängig von Bauart, d.h. Fläche A , Abstand d

Bsp. Plattenkondensator wird mit Batteriespannung U geladen, dann Batterie abgeklemmt und Plattenabstand d verkleinert.

Frage Wie ändert sich die Spannung U zwischen den Platten?

Lsg. $U = Q/C = Qd/(\epsilon_0 A) \rightarrow$ da $Q =$ konstant \rightarrow sinkt U

Exp.

- 1) Plattenkondensator mit variablem Plattenabstand d
- 2) Drehkondensator mit variabler Fläche A
- 3) Zylinderkondensator aus Alu / Kunststoffolie selbst rollen, Prinzip zeigen
- 4) Kapazitive Schalter einer PC-Tastatur

5.2 Energie des Kondensators

F121

Wird ein ungeladener Kondensator aufgeladen, so muss dazu Ladung in kleinen Portionen von einer Platte zur anderen wandern, wobei sich ein E-Feld aufbaut, gegen das der Ladungstransfer statt findet. Mit wachsender Ladung wächst auch die Gegenkraft. Die geleistete Arbeit wird als potenzielle Energie gespeichert und kann in einer Entladung abgerufen werden.

Ladungselement dq Gesamtladung $Q = \sum dq$

Arbeit pro Element $dW = Udq = \frac{q}{C} dq$

Mit jeder neuen Ladung dq steigt aber die Spannung U und damit die zu leistende Gesamtarbeit

$$W = \frac{1}{2}UQ \quad (\text{Dreiecksfläche})$$

mit $C=Q/U$ folgt für die gespeicherte potenzielle elektrische Energie

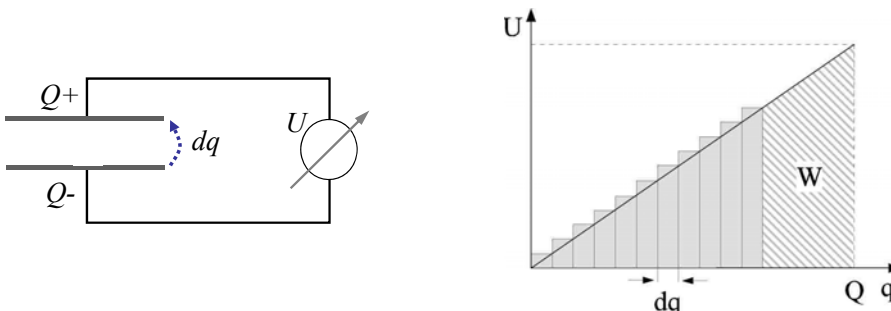
$$\rightarrow E_{el} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad E_{el} = \frac{1}{2} CU^2$$

Exp. Blitzlampe, Kondensator laden und über Lamettafaden entladen

F121



gespeicherte Energie im Kondensator



Bsp. Elektroschocktherapie im Krankenwagen ohne Anschluß an's Stromnetz:

Im Kondensator gespeicherte Energie fließt durch die Brust von Elektrode zu Elektrode.

Frage: Leistung der Kondensatorentladung
(mit: $C = 70 \mu\text{F}$, Aufgeladen mit $U = 5000 \text{ V}$)?

Lösung: $\rightarrow E_{el} = \frac{1}{2} CU^2 = 875 \text{ J}$

Teilentladung von 200 J in 2 ms \rightarrow Leistung $P = E_{el} / t = 100 \text{ kW}$

5.3 Energiedichte

Wo steckt die Energie, d.h. wer hat sie gespeichert?

Betrachte zwei geladene, getrennte Platten der Fläche A und Abstand d mit dem Zwischenraum $V = Ad$

$$\text{Energiedichte: } \rho_{el} = \frac{E_{el}}{V} = \frac{1/2 CU^2}{Ad}$$

$$\rightarrow \rho_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{U}{d} \right)^2 \quad \text{mit } C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$\rightarrow \rho_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad \text{mit } E = U/d$$

„Die elektrische Energie eines Kondensators ist im E -Feld zwischen den Platten gespeichert“ \rightarrow Existenz elektromagnetischer Wellen (Licht), Energie breitet sich im Raum aus, Materie als Energieträger ist nicht nötig, das Feld selbst trägt die Energie.

Dielektrika

F122

Dielektrika sind elektrisch nicht leitende Materialien, wie z.B. Kunststoffe.

Exp. Plattenkondensator mit Q aufladen und Spannung U messen
Spannungsquelle abtrennen, $Q = \text{konstant}$,
Dielektrische Platte einbringen, U fällt

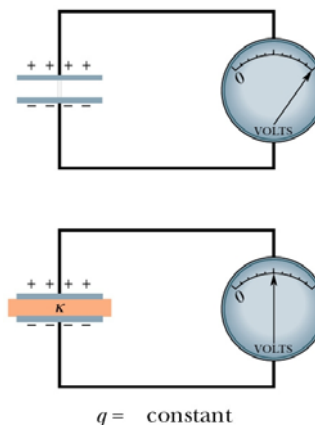
$\rightarrow U = Q/C \rightarrow$ Kapazität muss vergrößert worden sein

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \epsilon$$

$\rightarrow \epsilon = C / C_{vac} \quad \epsilon$: Dielektrizitätskonstante des Materials
 $\epsilon = 1$ für Vakuum, Luft, $\epsilon > 1$ für Dielektrika

\rightarrow Ist der Kondensators vollständig mit dem Dielektrikum gefüllt (isolierendes Material), so muss in allen elektrostatischen Gleichungen ϵ_0 durch $\epsilon_0 \epsilon$ ersetzt werden.

F122



Fall 1: Spannungsquelle abgetrennt, $Q = \text{konstant}$,

F123

Einbringen des Dielektrikums schwächt das E -Feld:

$$E = U/d = Q/(Cd) = Q/(\epsilon_0 \epsilon A)$$

Wo bleibt die Energie?

Dielektrikum wird in den Kondensator gezogen und Ladungen werden im Dielektrikum verschoben bzw. werden die Dipole gedreht.

Fall 2: Spannungsquelle angeschaltet lassen, so dass $U = \text{konstant}$

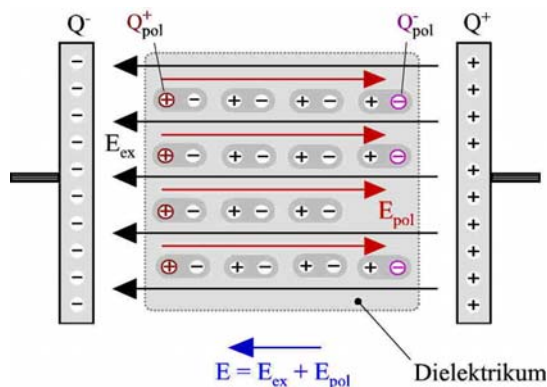
$$E = U/d = \text{konstant} \quad \text{aber } Q \text{ steigt}$$

$E = U/d = Q/(Cd) = Q/(\epsilon_0 \epsilon A)$ und die gespeicherte Energie steigt

$$E_{el} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

- Exp.** Dielektrische Flüssigkeit wird zwischen Kondensatorplatten gezogen
 Deutung: 1) System minimiert Energie $E_{el} = Q^2/2C$,
 also wenn $Q = \text{konst.}$ muss C steigen
 2) Polarisation des Dielektrikums, Ladungen werden vom E -Feld angezogen

F123



5.5 Piezoeffekt

F124

a) Dielektrikum drücken \rightarrow Atome verschieben \rightarrow E-Feld entsteht

b) E-Feld anlegen \rightarrow Ladungs- & Atomeverschiebung im Kristall

Materialien: typischerweise Isolatoren mit einer Kristallachse (siehe Physik II)
 (Quarz, Bariumtitanat, Perowskite, Ferroelektrika)

Funktion: a) Stauchung / Dehnung des Kristalls in Achsrichtung um kleine Länge Δx bezogen auf Kristalllänge x ändert das E-Feld

b) Spannung anlegen und Kristall staucht / dehnt sich

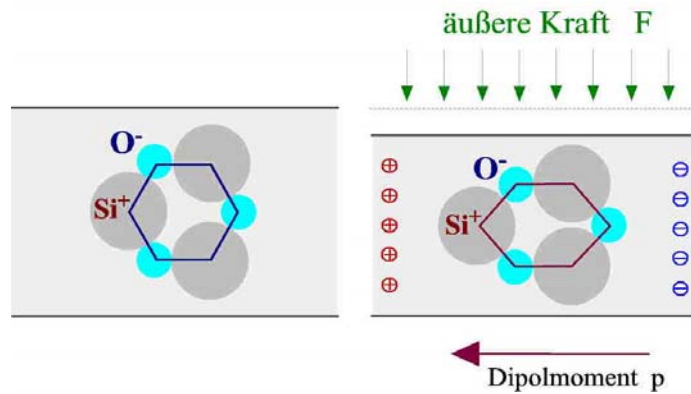
$$E = \delta \frac{\Delta x}{x} \quad \text{oder} \quad U = \delta \Delta x,$$

mit: $\delta \sim 10^{10} \text{ V/m}$ (piezoelektrischer Koeffizient)

Anwendung: Schwingquarz in Resonanz, Quarzuhr, Ultraschallsender, Justage im Nanometerbereich

Piezoeffekt

F124



6 Elektrischer Strom

F125

6.1 Strom

Strom I ist der effektiver Ladungstransport q in einer Zeit t durch eine Fläche A

Strom $I = \frac{dq}{dt}$ $[I] = C/s = A$ (Ampere)

Ladung $Q = I \cdot t$ wenn $I = \text{konstant}$

Technische Stromrichtung: von Plus nach Minus (e^- laufen entgegengesetzt)

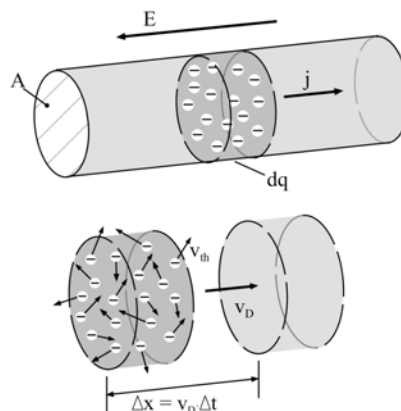
Stromdichte

Strom I pro durchflossene Fläche A

Stromdichte $j = \frac{I}{A}$

Strom $I = j \cdot A$ wenn $j = \text{konstant}$

F125



6.2 Widerstand

F126

Potenzialdifferenz U am Leiter erzeugt E -Feld und damit Strom I , Leiter bildet Widerstand R

$$R = U/I \quad [R] = V/A = \Omega \text{ (Ohm)}$$

$$I = U/R \quad \text{hoher Widerstand vermindert den Strom}$$

ρ : Spezifischer Widerstand als Materialeigenschaft

$$R = \rho \frac{L}{A} \quad [\rho] = \frac{\Omega m^2}{m} = \Omega m$$

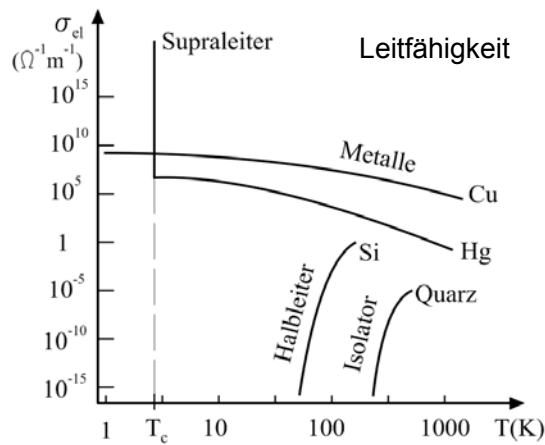
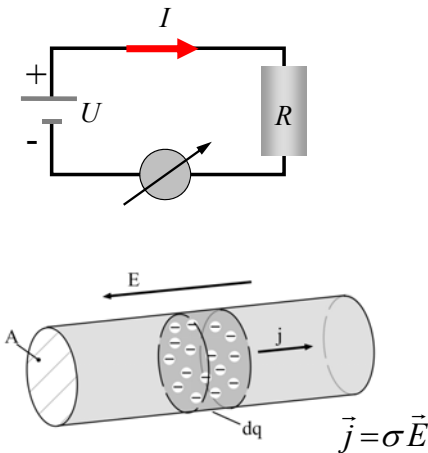
Material	Silber	Kupfer	Eisen	Si-p-dotiert	Si (rein)	Quarz
ρ (Ωm)	$1,62 \cdot 10^{-8}$	$1,69 \cdot 10^{-8}$	$9,68 \cdot 10^{-8}$	$2,8 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^3$	10^{16}
	Leiter			Halbleiter		Isolator

Leitfähigkeit $\sigma = \frac{1}{\rho}$ betrachte $\frac{1}{\sigma} = \rho = R \frac{A}{L} = \frac{U A}{I L} = \frac{U/L}{I/A} = \frac{E}{j}$

$$\rightarrow \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \text{das } E\text{-Feld treibt den Strom an}$$

F126

Elektrischer Widerstand



Ohmscher Widerstand

F127

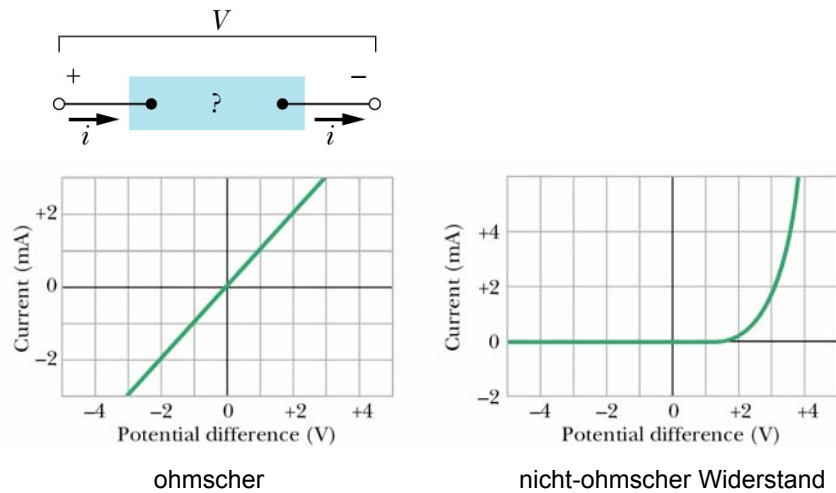
Def. „Ein ohmscher Widerstand ist unabhängig von Betrag und Polarität der angelegten Spannung, d.h. $R = U/I$ gilt unabhängig von Strom & Spannung.“

Test: Strom-Spannungskennlinie $I(U)$ gibt den Typ des Leiters an (T konstant halten)

Beachte: die moderne Mikroelektronik basiert hauptsächlich auf elektronischen Bauelementen, die nicht dem ohmschen Gesetz gehorchen !

Ohmscher Widerstand

F127



6.3 Elektrische Leistung

Verbraucher (Motor, Lampe, Toaster) sitzt in einem Stromkreis

$$dE_{el} = dq U = Idt U \quad \text{transportierte Ladung} \cdot \text{Potentialdifferenz}$$

$$P = \frac{dE_{el}}{dt} = IU \quad \text{umgewandelte Leistung am Verbraucher}$$

$$[P] = AV = \frac{C}{s} \frac{J}{C} = W$$

$$\Delta E_{el} = P \Delta t \quad E_{el} = \text{Leistung} \cdot \text{Zeit}$$

$$1 \text{ Kilowattstunde} = 1 \text{ kW} \times \text{h}$$

$$1000 \text{ W} \times 3600\text{s} = 3,60 \text{ MJ}$$



Exp: Stromkette -Fe-Cu-Fe-Cu-Fe-
mit $R=U/I$ folgt $P=RI^2$ und mit $I = \text{konstant}$ → Draht ist heiß bei großem R

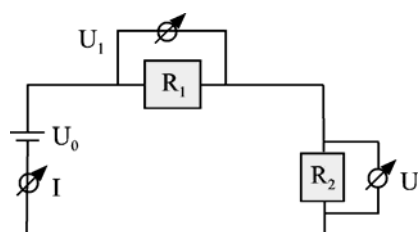
6.4 Stromkreise

Eine Spannungsquelle hält die Potentialdifferenz (Spannung U) aufrecht und liefert somit die Energie, die nötig ist um einen Strom laufen zu lassen.

Maschenregel Die Summe aller Potentialänderungen beim Durchlaufen eines geschlossenen Weges in einem Stromkreis (Masche) ist Null. (Folge der Energieerhaltung)

$$U_0 = U_1 + U_2$$

(I ist identisch für beide Widerstände)



6.4.1 Reihenschaltung von Widerständen

F128

Reihenschaltung heißt: es gibt nur einen Weg für den Stromfluß.

Durch jeden Widerstand fließt der gleiche Strom.

Die Potenzialdifferenzen der Einzelwiderstände summieren sich zu U .

Gesucht: Ersatzwiderstand R

Lsg. Maschenregel anwenden $U = IR_1 + IR_2 + IR_3$

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{U}{R} \rightarrow R = \sum R_i$$

6.4.2 Parallelschaltung

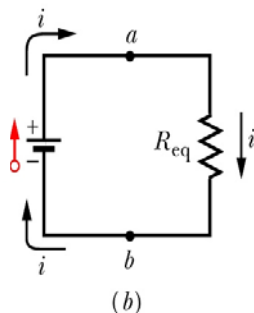
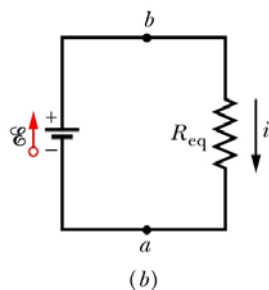
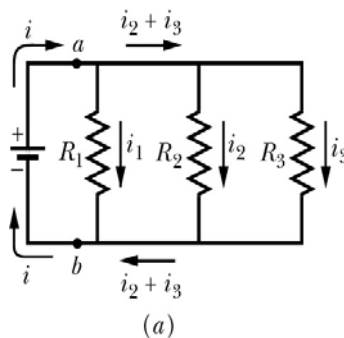
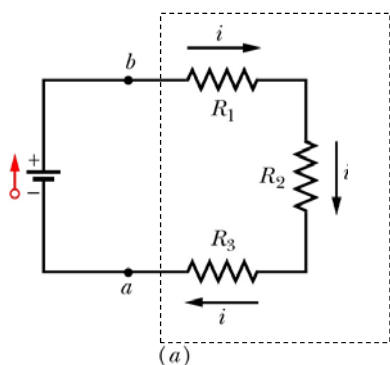
Über allen Widerständen besteht die selbe Potenzialdifferenz.

Der Gesamtstrom ist die Summe der Einzelströme.

$$I_1 = U/R_1, I_2 = U/R_2, I_3 = U/R_3$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = U(1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3) = U/R \rightarrow \frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

F128

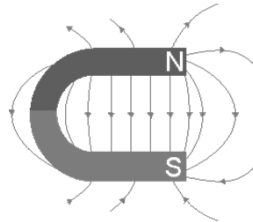


7. Magnetfelder

Permanent- & Elektromagnete, Elektromotoren, magnetische Datenspeicher, Medizin: Kernspintomographen

Alle Materialien reagieren auf magnetische Kräfte, aber nur wenige sind permanent magnetisch (Fe, Co, Ni, seltene Erden Gd,...).

Erklärung des Magnetismus in Permanentmagneten nur durch Quantenmechanik möglich (Physik II)



7.1 Magnetische Flussdichte & Lorentzkraft

F129

„Die magnetische Flussdichte B wird über die Lorentz-Kraft auf bewegte Ladung q mit der Geschwindigkeit v definiert“

Lorentzkraft

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$$

F senkrecht zu B und zu $v \rightarrow$ Rechte-Hand-Regel **UVW**

Flussdichte B $[B] = T$ (Tesla) $T = N/(A \cdot m)$, $1 T = 10^4$ Gauß

B wird oft als Magnetfeldstärke bezeichnet

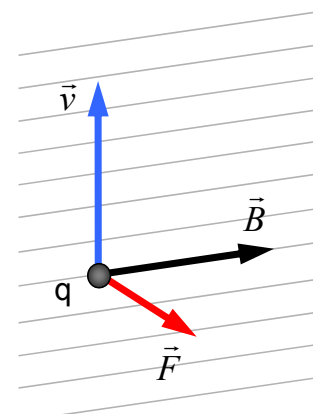
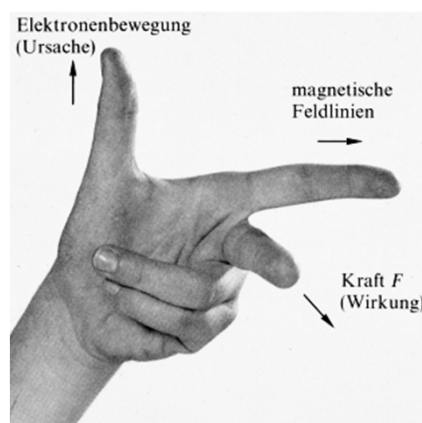
Typ. Werte: Erdfeld $10^{-4}T = 1$ Gauß, Elektromagnet 1T,

Supraleitende Magnete 5-10 T, Neutronenstern 10^8 T

- Exp.** Braunsche Röhre + Magnet
Lorentz-Schaukel, umpolen \rightarrow Richtungswechsel,
Strom parallel zu $B \rightarrow$ kein Effekt

F129

Lorentzkraft I



Magnetische Feldlinien

F130

Da ein Magnet über seine Kraftwirkung definiert wird, macht es Sinn ein B -Feld zu definieren

\vec{B} : Tangente an B -Feldlinie, Feldrichtung: Nord \rightarrow Süd

$|\vec{B}| \sim$ Feldliniendichte

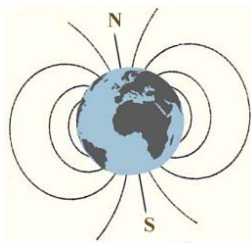
Es gibt nur magn. Dipole, keine Monopole wie in Elektrostatik!

Ungleichnamige Pole ziehen sich an, gleichnamige stoßen sich ab

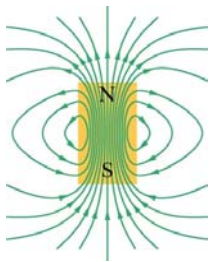
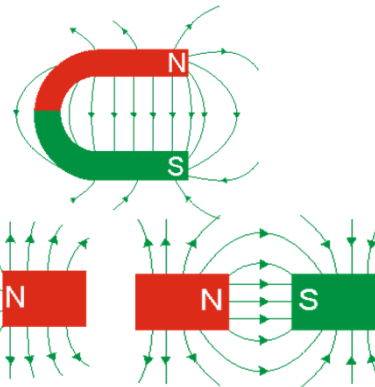
Frage Warum richten sich Eisenspäne im B -Feld aus?

Lsg. Späne werden magnetisiert, bilden Dipole, Nord- und Südpol ziehen sich an

F130



Magnetfeldlinien



http://www.elsenbruch.info/ph12_grundwissen.htm

7.2 Ladungen auf Kreisbahnen & Massenspektrometer

F131

Generell gilt für ein Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn:

- Zentrifugalkraft $\vec{F}_Z = -\vec{F}$ ist im Gleichgewicht mit einer anderen Kraft F

- Betrag $|\vec{F}|$ konstant

- Kraft-Richtung immer zum Kreismittelpunkt

Bsp. Hammerwerfer $\vec{F}_Z = -\vec{F}_S$ Seilspannkraft,

Satellit um Erde $\vec{F}_Z = -\vec{F}_g$ Gravitationskraft

Ladung im B -Feld $\vec{F}_Z = -\vec{F}_L$ Lorentzkraft

Ladung q tritt mit Geschw. v senkrecht in ein homogenes B -Feld

$F_Z = \frac{mv^2}{r}$ Zentripetalkraft, betragsgleich mit Zentrifugalkraft

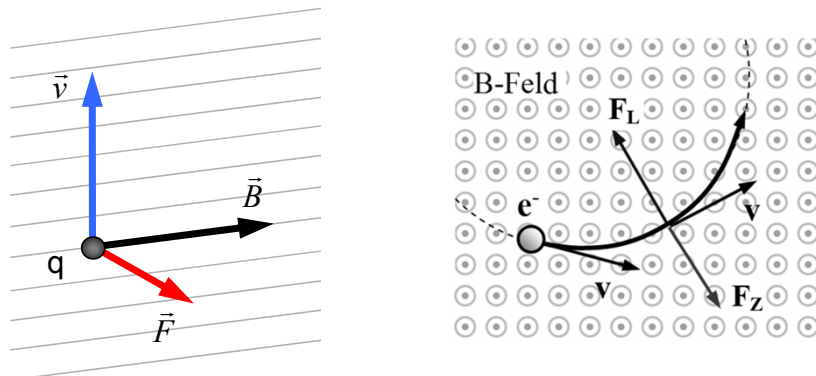
F132

$F_L = qvB$ Lorentzkraft $\rightarrow r = \frac{m}{q} \frac{v}{B}$ Kreisradius

Ladungen auf Kreisbahnen & Massenspektrometer

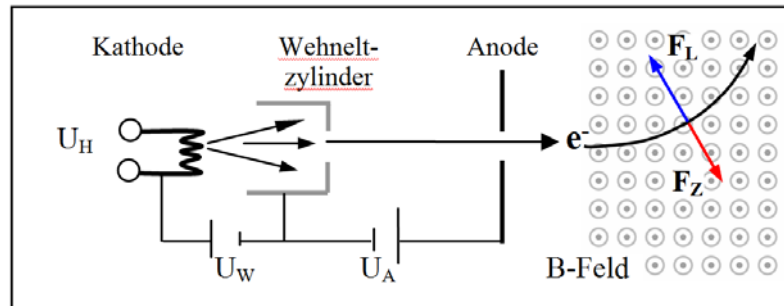
F131

Lorentzkraft II



F132

Elektronenstrahl



Exp. e/m-Versuch aus Praktikum

Massenspektrometer

F133

Werden eingesetzt, um unbekannte Substanzen zu bestimmen, z.B. die Elemente eines unbekanntes Gasmisches. Dazu werden die Atome, bzw. Moleküle ionisiert, in ein homogenes Magnetfeld geschossen und die Ablenkung gemessen

- Bsp.** $q = +1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ einfach ionisierte Atome
 $U = 1000 \text{ V}$ Beschleunigungsspannung
 $B = 80 \text{ mT}$ B -Feld senkrecht zu v
 $r = 0,8127 \text{ m}$ Detektion: Fotoplatte

Frage welche Masse haben die Ionen und welches Material ist es?

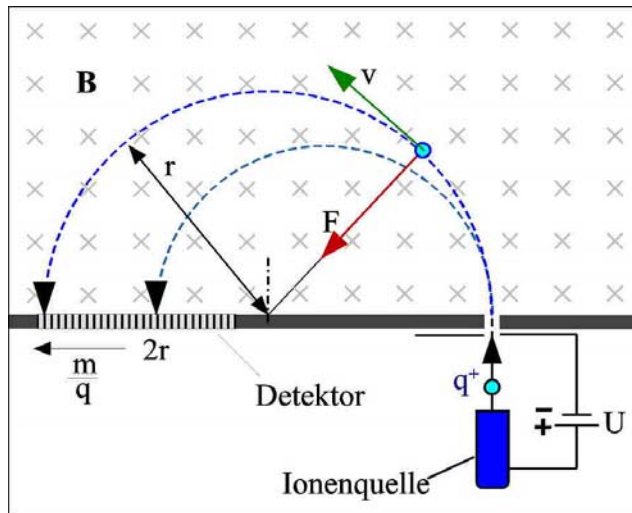
Lsg. Ionengeschwindigkeit $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = qU \rightarrow v^2 = 2qU/m$

Radius des Kreises: $r = \frac{m v}{q B} \rightarrow r^2 = \frac{m^2}{q^2 B^2} \frac{2qU}{m} \rightarrow m = \frac{B^2 q r^2}{2U}$
 (siehe oben)

$m = 3,3863 \times 10^{-25} \text{ kg} = 203,93 \text{ u}$, u atomare Masseneinheit (Thallium)

Massenspektrometer

F133



7.3 Magnetische Kraft auf stromdurchflossenen Leiter

F134

gerader Draht der Länge L senkrecht im homogenen B -Feld

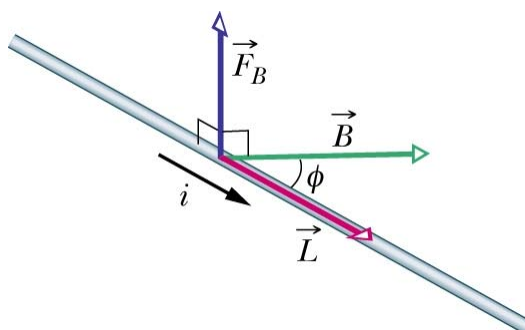
Ladung $q = It = I \frac{L}{v_D}$ mit Geschwindigkeit v_D

Lorentzkraft $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

mit $\alpha =$ Winkel von B zum Draht

→ Kraft auf stromdurchflossenen Draht $F = ILB \sin \alpha$

F134



Anwendung Elektromotor

F135

Drahtschleife im B-Feld eines Permanentmagneten

- Kräfte an kurzer Seite zeigen in Richtung der Drehachse, erzeugen kein Drehmoment
- Kräfte an Längsseite erzeugen Drehmoment

$$F = ILB \quad \text{Hebelarm: } \frac{1}{2}b \sin \theta$$

$$T = ILB \frac{b}{2} \sin \theta \rightarrow \text{ pro Längsseite } (T = F \times r)$$

$$T = ILB b \sin \theta \quad \text{für beide Seiten}$$

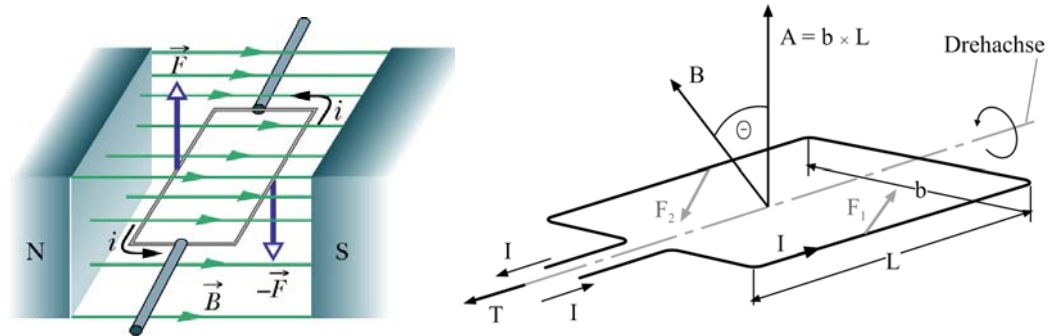
für ebene Spule mit N Windungen und $A = Lb =$ Fläche der Spule

$$T = (NIA) B \sin \theta$$

Gilt für jede ebene Spule im homogenen B-Feld, unabhängig von ihrer Form! Im Elektromotor wird der Strom nach $\frac{1}{2}$ Umdrehung umgepolt damit er in die gleiche Richtung weiterdreht.

Exp. 1) Elektromotor, Batterie mit Drahtschleife + Magnet, 2) Spulenzeigerinstrument

F135



7.4 Hall-Effekt (Hall 1879, Quanten-Hall-Effekt, v. Klitzing 1985 Nobelpreis) F136

v_D Elektronendriftgeschwindigkeit

$F_L = ev_D B$ Ablenkung \rightarrow baut E -Feld auf

$U = Ed$ Hallspannung durch Ladungsverschiebung

$eE = ev_D B$ Gleichgewicht der Kräfte

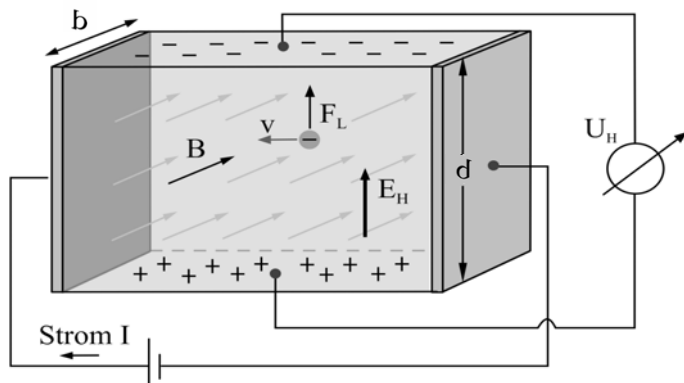
mit $\rightarrow v_D = j / ne = I / (neA)$

$\rightarrow n = \frac{BI}{eU A/d}$ Ladungsträgerdichte

Messgerät für Magnetfelder $B = \frac{ne A/d}{I} U$ (Messung der Hallspannung U)

Hall-Effekt

F136



7.5 Magnetfelder von Strömen

Bisher haben wir gesagt, Kräfte auf Ströme im Magnetfeld sind Lorentzkräfte. Man kann aber auch sagen, dass Ströme Magnetfelder erzeugen, die mit anderen Magnetfeldern in Wechselwirkung treten, so wie zwei Stabmagneten.

7.5.1 Magnetfeld des geraden Leiters

F137

- Kreisförmige Feldlinien um den Draht als Zentrum
- Rechte-Hand-Regel: Zeigt der Daumen in Stromrichtung dann zeigen die Finger in Richtung des erzeugten magnetischen B -Feldes.

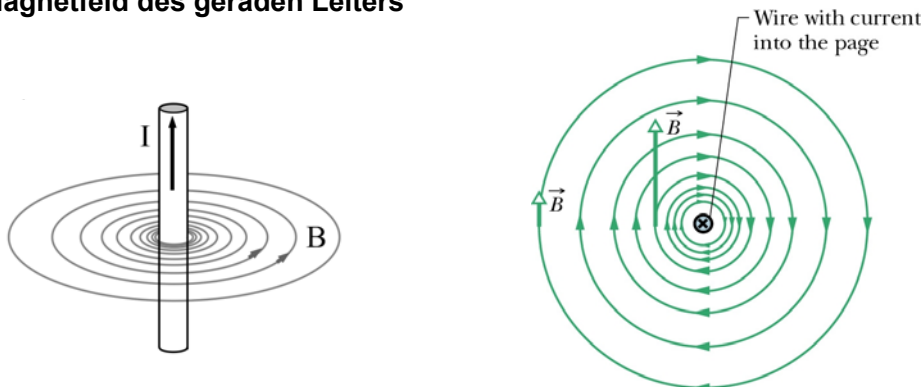
$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad \text{im Abstand } R \text{ senkrecht zum Leiter}$$

$$\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ Tm/A} \quad \text{Permeabilitätskonstante}$$

- Exp.** Stromdurchflossener Leiter über Kompassnadel, Nadel wird ausgelenkt
- Exp.** B-Feldlinien um unendlich langen geraden Leiter, Kompassnadel

F137

Magnetfeld des geraden Leiters



7.5.2 Magnetfeld einer Spule

F138

innen: B -Felder addieren sich, B groß, nahezu homogen

Rechte-Hand-Regel: Finger in Stromrichtung
Daumen in Feldrichtung

außen: B -Felder löschen sich nahezu aus, inhomogen

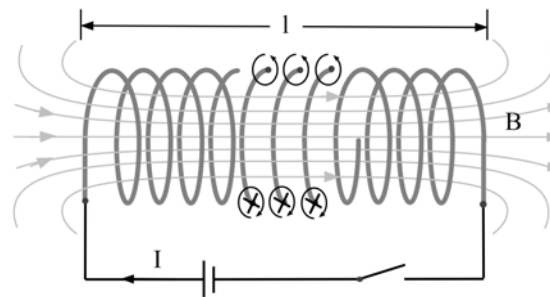
gegeben: Spule mit Länge $l \gg$ Radius r

gesucht: Vektorsumme der Felder aller Windungen $\sum_i \vec{B}_i$

$$\rightarrow B = \mu_0 I \frac{N}{l} \quad (n = N/l = \text{Windungsdichte})$$

Exp. Magnetfeld einer Spule mit Eisenspänen auf Overheadprojektor sichtbar machen
Magnetfeld mit Hallsonde ausmessen

F138



7.6 Magnetfeld in Materie

F139

Materie verändert das Magnetfeld;

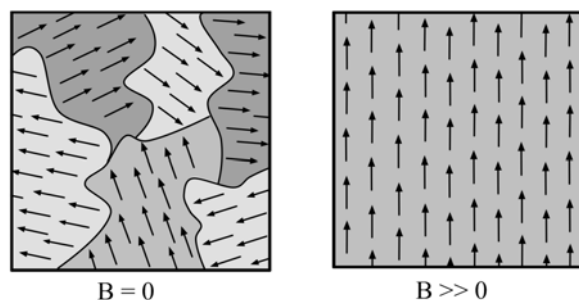
Ursache: Spins der Atome (siehe Quantenphysik nächstes Semester)
Phänomenologische Beschreibung durch:

μ Permeabilitätskonstante (ohne Einheit), Vakuum $\mu = 1$

Praktisch: μ_0 durch $\mu_0 \mu$ ersetzen

- | | | |
|----------------|---------------|--|
| Typische Werte | Ferromagnete: | Eisen, Co, Ni, seltene Erden
$\mu = 10 - 10000$ |
| | Paramagnete: | fast alle anderen Elemente
$\mu = 10^{-6}$ |
| | Diamagnet: | Bismut, Edelgase
$\mu = -10^{-6}$ |

F139



Bspiel: Laborspule 2000 Windungen, 20 cm lang, 5 cm Durchmesser, Kupferdraht $r = 0,3\text{mm}$

Frage: Welcher Strom ist nötig, um $B = 200\text{ mT}$ zu erzeugen?

$$\text{Lsg. } B = \mu_0 I \frac{N}{h} \rightarrow I = \frac{1}{\mu_0} \frac{Bh}{N} = \frac{Am}{1,26 \cdot 10^{-6} Vs} \frac{0,2T \cdot 0,2m}{2000} = 15,87A$$

mit $T = Vs/m^2$

Frage: Welche Wärmeleistung wird in der Spule erzeugt?

$$\text{Lsg. } P = UI = RI^2$$

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{2 \cdot 10^{-8} \Omega m \cdot 2 \pi r_s N}{\pi r_d^2} = \frac{2 \cdot 10^{-8} \Omega m \cdot 2 \pi \cdot 0,025 \cdot 2000}{\pi \cdot 0,003^2} = 0,22 \Omega$$

$$\rightarrow P = 55 W$$

F140

F140



Frage: Welcher Strom ist nötig, wenn Eisenkern mit $\mu = 20$ die Spule ganz ausfüllt?

Lsg. μ_0 durch $\mu_0 \mu$ ersetzen

$$\rightarrow I = \frac{1}{\mu_0 \mu} \frac{Bh}{N} = 0,8A$$

Frage: Wärmeleistung?

$$\text{Lsg. } P = RI^2 = 0,14 W$$

fällt quadratisch mit Strom – Eisenkern bringt also viel

Frage Betriebskosten der Spule für 24 h Einsatz bei 0,35 €/kWh ?

$$\text{Lsg. } E = \int_0^{24} P dt$$

verbrauchte Energie, weil $P = \text{konstant}$, Zeiteinheit in Stunden $t = 24\text{h}$

$$\rightarrow E = 55W \cdot 24h = 1,32 kWh$$

$$E \cdot 0,35\text{€} / kWh = 0,46\text{€} \quad \text{Kosten ohne Eisenkern}$$

8. Induktion

Bisher war das Magnetfeld zeitlich konstant. Was passiert aber, wenn das Magnetfeld sich zeitlich ändert?

Exp. Änderung des Magnetfeldes durch eine Leiterschleife

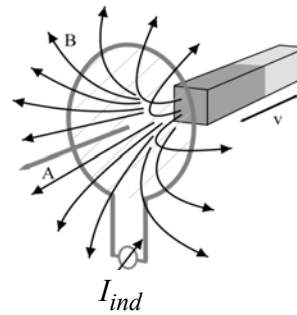
F141

- i) Strom tritt auf bei Relativbewegung Magnet \Leftrightarrow Schleife
- ii) schnelle Bewegung \rightarrow großer Strom
- iii) Magnetfeld umpolen \rightarrow Strom ändert sein Vorzeichen

Prozess: Strom bzw. Spannung wird induziert

Induktion

F141



Exp. zwei gegenüberliegende Spulen berühren sich nicht F142

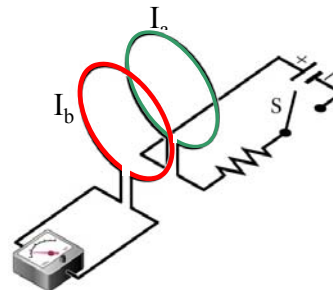
Schleife a) Strom fließt aufgrund U_{Bat} $I_a = U_{Bat} / R \rightarrow B$ -Feld

Schleife b) Strom I_b wird induziert nur wenn I_a sich ändert (an / aus)

Wenn I_a konstant $\rightarrow I_b = 0$

Frage: Strom / Spannungsinduktion tritt auf bei Änderungen
– was ändert sich genau?

F142



8.1 Faradaysches Induktionsgesetz

Strom / Spannung wird induziert, wenn die Zahl der Magnetfeldlinien durch die Schleife sich zeitlich ändert. Wie wird das berechnet?

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad \text{Magnetischer Fluss durch Fläche } A$$

$[\Phi_B] = \text{Tm}^2 = \text{Wb} = \text{Weber}$ (W.E. Weber 1804 – 1891)

Φ_B maximal wenn \vec{B} parallel zu \vec{A} , $\Phi_B = 0$ wenn \vec{B} senkrecht zu \vec{A}

„Die in einer Leiterschleife induzierte Spannung U_i ist gleich der zeitlichen Änderung des Flusses durch die Schleife.“

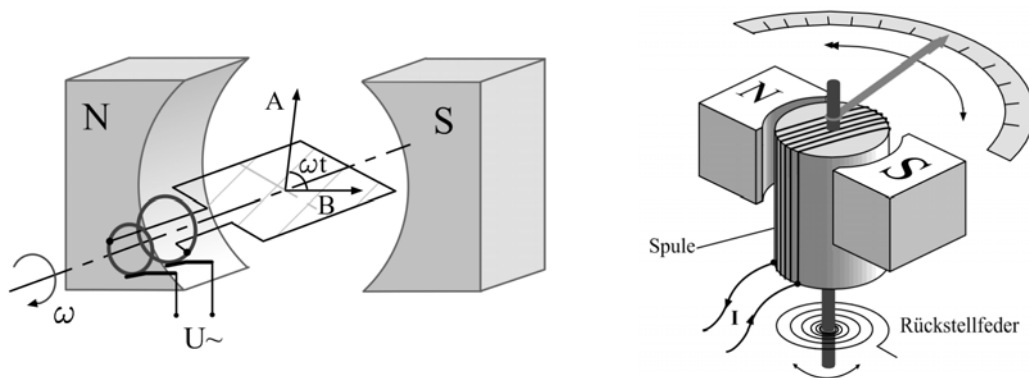
Induzierte Spannung: $U_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ für Spule mit N Windungen: $U_i = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$

Flussänderung $d\Phi_B / dt$ ist möglich durch:

- i) Magnetfeldstärke B ändern F143a/b
- ii) Fläche A ändern
- iii) Winkel zwischen Fläche / Magnetfeld ändern

Faradaysches Induktionsgesetz

F143a/b



Bsp. 1) lange Zylinderspule :

F144

$$n_1 = N/h = 200/\text{cm} = 2 \cdot 10^4 / \text{m}, I_1 = 1,5\text{A}, r_1 = 16 \text{ mm}$$

2) Testspule: $N_2 = 130, r_2 = 10,5 \text{ mm}$ im Zentrum der Spule-1
 I_1 ändert sich mit konstanter Rate in 25 ms auf 0A

Frage welche Spannung U_2 wird in Spule₂ induziert?

Lsg. Spule 1 erzeugt magn. Fluss Φ_B durch Spule 2

I_1 ändert sich $\rightarrow \Phi_B$ ändert sich

\rightarrow Spannung U_2 wird in Spule 2 induziert.

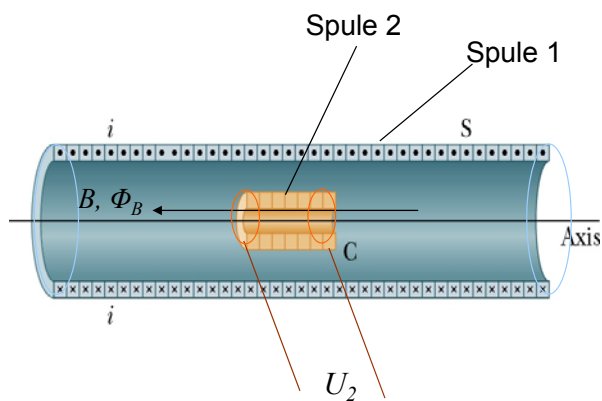
Anfang: $\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A} = BA = (\mu_0 I_1 n_1) \cdot (\pi r_2^2) = 1,31 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$

Ende: $\Phi_B = 0 \quad \mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ Tm} / \text{A}$

$$\rightarrow U_2 = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -130 \frac{0 - 1,31 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}}{0,025 \text{ s}} = 0,068 \text{ V}$$

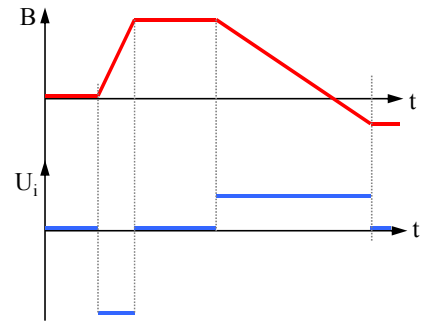
F144

Induktion



Bsp. Magnetfeld durch Leiterschleife, $B(t)$ ändert sich

Verlauf der induzierten Spannung $U_i(t)$



8.2 Lenzsche Regel

(H.F.E. Lenz 1804 – 1865)

„Ein induzierter Strom ist so gerichtet, dass das von ihm erzeugte B -Feld der Änderung des magnetischen Flusses entgegenwirkt.“
(Trägheitsprinzip, Energieerhaltung)

F145

Exp. Abstoßung eines Alu-Ringes durch Stromanschaltung

Beobachtung: Spulenstrom I_{Sp} anschalten \rightarrow Ring wird abgestoßen

Ursache: I_{Sp} steigt $\rightarrow B_{Sp}$ in Spule steigt $\rightarrow d\Phi_B/dt > 0 \rightarrow U_i = -d\Phi_B/dt$
 \rightarrow induzierter Strom $-I_i \rightarrow -B_i$ im Ring,

Richtung entgegen dem B -Feld der Spule denn nach Lenzscher Regel soll ansteigendes Feld kompensiert werden

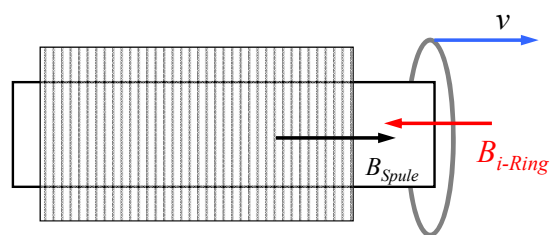
\rightarrow entgegen gerichtete B -Felder stoßen sich ab \rightarrow Ring wird abgestoßen

- Spulenstrom abschalten \rightarrow Ring wird angezogen
- Strom fließt konstant in der Spule, keine Induktion, Ring bleibt auf Stab

$$d\Phi_B/dt = 0 \rightarrow U_i = 0 \rightarrow I_i = 0 \rightarrow B_i = 0 \text{ im Ring}$$

F145

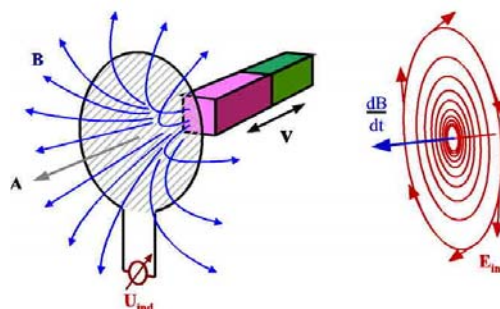
Induktions-Schleuder



Beachte: Ein veränderliches Magnetfeld induziert immer ringförmige E -Felder - auch wenn keine Materie existiert.

Die Leiterschleife erlaubt nur die Spannungsmessung.

Induktion der E -Felder ist Grundlage für elektromagnetische Wellen.



E-Gitarre

Akustik-Gitarre: Ton durch akustische Resonanz des Klangkörpers mit schwingender Saite

E-Gitarre: kein Resonanzkörper, Frequenz der schwingenden Saite wird direkt erfasst und an Verstärker weitergegeben F146

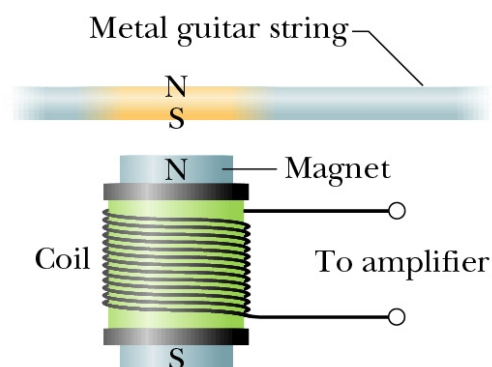
Prinzip: Permanentmagnet in Spule erzeugt B-Feld in Stahl-Saite
Saite schwingt mit Frequenz f als eigener Magnet

- Fluss durch Spule: $\Phi_{B-Permanent} + \Phi_{B-Saite}$
- Flußänderung in der Spule mit Frequenz f
- Induktion $U_i = -d\Phi_B/dt$ in Spule mit Saiten-Frequenz f

Frage: Die Saite der E-Gitarre reißt und wird durch die Nylonsaite einer akustischen Gitarre ersetzt. Wie ändert sich der Ton dadurch?
Kein Ton, da Saite magn. sein muss!

Exp. Gitarre an Oszilloskop

F146

E-Gitarre**8.3 Wirbelströme & Energietransfer**

Exp. Wirbelstrombremse mit Metallplatte

- a) geschlossener Platte: Warum bremst die Platte im B-Feld, obwohl unmagnetisch?
- b) geschlitzte Platte: warum ist die Bremswirkung reduziert?

Deutungsmodell: Leiterschleife wird durch ein B-Feld gezogen, so dass F147

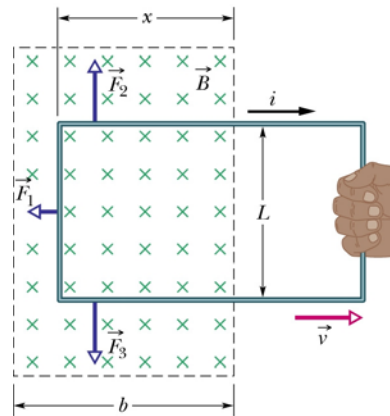
$$U_i = \frac{d\Phi_B}{dt} \neq 0$$

- I_i Strom fließt durch Schleife (im B-Feld)
- Lorentz-Kraft überwinden, um Schleife mit Geschw. v zu ziehen
- Arbeit & Energieverbrauch

Wo steckt die Energie? I_i wird am Widerstand der Leiterschleife R in Wärme gewandelt.

Wirbelströme & Energietransfer

F147



Beweis $P = Fv$ Leistung um Schleife zu ziehen, hier F und v parallel

$$\Phi_B = BA = BLx \quad Lx: \text{ von } B \text{ durchsetzte Fläche}$$

$$U_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}BLx = -BLv = dx/dt : \text{ Geschw. der Schleife}$$

$$I_i = \frac{U_i}{R} = \frac{BLv}{R} \quad R: \text{ Widerstand der Leitung}$$

$$\vec{F} = I_i \vec{L} \times \vec{B}$$

Kraft auf Leiter: $F_2 + F_3 = 0$, bleibt nur: $F = F_1 = I_i LB \sin 90^\circ$

$$F = \frac{B^2 L^2 v}{R} \rightarrow P = Fv = \frac{B^2 L^2 v^2}{R} = \underbrace{\left(\frac{BLv}{R}\right)^2}_{\text{mechan. Leistung}} R = \underbrace{I_i^2 R}_{\text{elektr. Leistung}}$$

Anwendung:

- Wirbelstrombremse in Eisenbahn, Induktionskochfelder
- Wirbelstromtachometer: rotierender Permanentmagnet in Metallzylinder
- Zerstörungsfreie Prüfung von Metallen auf feine Risse, Wirbelströme erzeugen B -Felder, abh. vom Widerstand R im Material = Maß für Risse

Exp. Magnete fallen durch Metallrohr, geschlitztes Metallrohr, Kunststoffrohr.

Unterschiedliche Fallzeiten, Vergleiche auch Fallzeiten: Magnet, Metallstück

Deutung: Wirbelströme im Rohr bremsen indem sie Magnetfeld erzeugen, das dem des fallenden Magneten entgegengesetzt ist

8.7 Transformator

F148

Windungen Primärspule: N_P , Sekundärspule N_S

Eisenkern führt den Fluss durch beide Spulen mit $\Phi_P = \Phi_S$

Prinzip: Primärspule P läuft mit Wechselstrom \rightarrow erzeugt Wechsel B -Feld

Fluss ändert sich zeitlich, also gibt es Induktion in beiden Spulen

$$\rightarrow \frac{d\Phi_S}{dt} = \frac{d\Phi_P}{dt} \rightarrow U_S = -N_S \frac{d\Phi}{dt}, \quad U_P = -N_P \frac{d\Phi}{dt} \rightarrow \frac{U_S}{U_P} = \frac{N_S}{N_P}$$

Spannungs-Verstärkung: Sekundärspule mit $N_S \gg N_P$

Idealer Transformator: kein Energieverlust, d.h. auch idealer Leistungstransfer

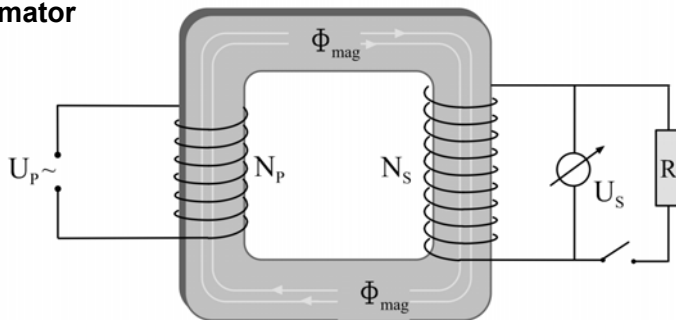
mit $P_P = U_P I_P = U_S I_S = P_S \rightarrow$ $\frac{I_S}{I_P} = \frac{U_P}{U_S} = \frac{N_P}{N_S}$

\rightarrow Stromverstärkung: Primärspule große Wicklungszahl $N_P \gg N_S$

Bsp.: kontaktloser Leistungstransfer zur Aufladung von Akkus, Rasierer

F148

Transformator



8.6 Induktivität L und Selbstinduktion

- Kondensator wird durch Kapazität C charakterisiert, beschreibt E-Feld
- Spule durch Induktivität L charakterisiert, erfasst Magnetfeld in der Spule

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} [L] = \text{Tm}^2/\text{A} = \text{H} = \text{Henry} \quad (\text{J.Henry, 1797 - 1878, USA})$$

N : Spulenwindungen, I : Spulenstrom, Φ_B : Fluss durch Spule

Zylinderspule: $N\Phi_B = (nl)(BA)$

$n = N/l$ Windungen / Länge, Länge $l \gg$ Durchmesser

$B = \mu_0 In$ B Feldstärke im Inneren der Spule

$$\rightarrow L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{(nl)(\mu_0 In)A}{I}$$

$L = \mu_0 n^2 l A$ nur bauart-abhängig (wie Kondensator)

$L = \mu \mu_0 n^2 l A$ Spule mit Kern

Exp. Glühbirne im RL -Kreis: Verzögertes Aufleuchten bei An- / Nachleuchten bei Abschalten

Deutung: Eine induzierte Spannung entsteht in jeder Spule, in der sich der Strom ändert.

F149

mit $N\Phi_B = LI$

$$\rightarrow U_i = -\frac{dN\Phi_B}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

also: nicht Strom, sondern Stromänderung ist wichtig

Richtung der Induktionsspannung folgt aus Lenz'scher Regel: Induktion wirkt der Ursache entgegen, U_i erzeugt I_i , der versucht der Strom-Änderung dI/dt entgegen zu wirken

F149

Induktivität L

