

# Physik I

## Bachelorstudiengang Physikalische Technik – Biomedizintechnik & Lasertechnik

**Prof. Dr. Hans-Christoph Mertins**



Die Veranstaltung Physik I besteht aus dem Zusammenspiel der folgenden Komponenten:

**Vorlesung:** hier hören Sie die Grundlagen der Physik und lernen an Schauexperimenten die wichtigsten Effekte kennen. Dieses Script stellt den Stoff der Vorlesung dar, wobei die Beispielaufgaben in der Vorlesung vorgerechnet und von Ihnen nachgetragen werden müssen. Das Script ersetzt nicht den Besuch der Vorlesung, sondern soll Ihnen die Mitschrift ersparen. Die Vorlesung orientiert sich an den Büchern „Physik“ von Haliday, Resnick, Walker, VCH-Viley und „Prüfungstrainer Experimentalphysik“ von Mertins, Gilbert, Spektrum Akademischer Verlag Elsevier. Jeder Abschnitt der Vorlesung wird durch das entsprechende Kapitel des Buches „Prüfungstrainer Experimentalphysik“ noch einmal in Volltext zusammengefasst und anhand der Prüfungsfragen können Sie Ihr aktuelles Wissen schon während des Semesters und nicht erst vor der Prüfung testen.

**Übung & Hausaufgaben:** in den Übungen, den Tutorien und den wöchentlichen Hausaufgaben lernen Sie die Theorie in die Praxis umzusetzen und berechnen konkrete Anwendungen .

**Praktikum:** hier lernen Sie, wie das theoretische Wissen an Messgeräten und Maschinen im späteren Berufsalltag zum tragen kommt.

**[www.fh-muenster.de/physiklabor](http://www.fh-muenster.de/physiklabor)** hier finden Sie alle wichtigen Informationen wie die Lösungen der Hausaufgaben, Praktikumsanleitungen, Formelsammlungen die Bilder in höherer Auflösung und andere Hinweise.

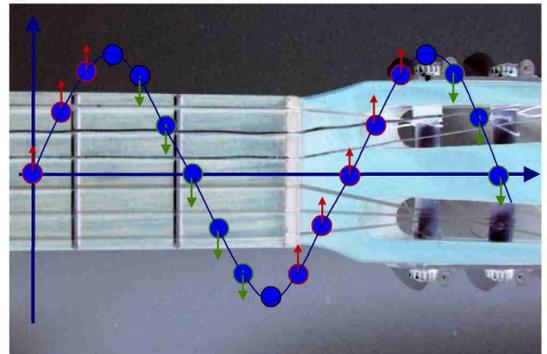
## A. Mechanik

- 1) Messung & Maßeinheiten
- 2) Kinematik
- 3) Vektoren
- 4) Bewegung im 3-dimensionalen Raum
- 5) Kraft und Bewegung
- 6) Arbeit, Energie & Leistung
- 7) Energieerhaltung und Potenzielle Energie
- 8) Teilchensysteme & Impuls
- 9) Stoßprozesse
- 10) Rotationsbewegungen
- 11) Drehmoment und Drehimpuls
- 12) Fluid-Dynamik



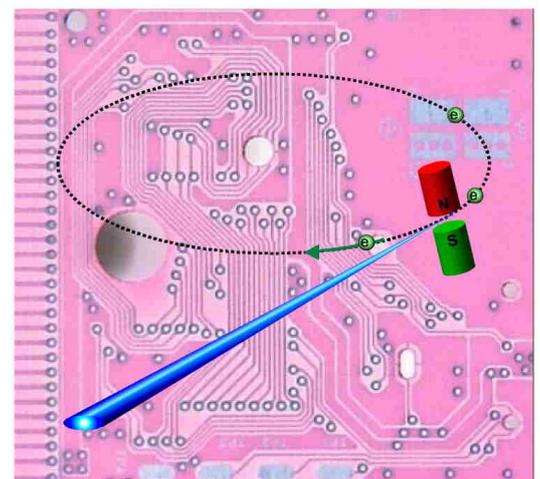
## B. Schwingungen & Wellen

- 1) Harmonische Schwingung
- 2) Pendel
- 3) Erzwungene Schwingung, Dämpfung, Resonanz
- 3) Wellen
- 4) Interferenz
- 5) Stehende Wellen
- 6) Schallwellen
- 7) Schwebung
- 8) Doppler-Effekt



## C. Elektrostatik & Dynamik

- 1) Elektrische Ladung
- 2) Elektrische Felder
- 3) Gaußscher Satz
- 4) Elektrisches Potenzial



## A. Mechanik

### 1. Maßeinheiten

Um einen Vorgang zu verstehen, muss man ihn beschreiben, also ein Bild entwerfen i.d.R. vergleichen mit etwas allgemein Bekanntem. Man muß *eine* gemeinsame Sprache sprechen. In der Physik gehören zur gemeinsamen Sprache u.a. die Maße und Messvorschriften.

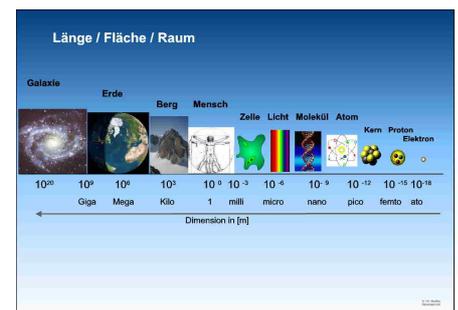
Maßeinheiten:

- 1) Vergleich einer Größe mit einem „Normal“ z.B. Länge des Ur-meters
- 2) Normal hat eine Einheit, z.B. meter [m]
- 3) weltweit gültig, für alle zugänglich
- 4) unabhängig vom Beobachter u. äußeren Umständen, unveränderlich
- 5) Verfahren entwickeln, um *alle* entsprechenden Größen mit dem Normal zu vergleichen

### 1.1 Internationales Einheitensystem System (SI)

Größe	Einheit	Zeichen
Länge	Meter	m
Zeit	Sekunde	s
Masse	Kilogramm	kg

Bilden Basis für weitere Einheiten, Geschw. [v] = m/s  
 1971 festgelegt, entsprechen menschlichem Maßstab,  
 weitere Einheiten später: Temp [K], elektr. Ladung [C]



### 1.2 Länge

Definition des Meters [m]

1792:  $1 \text{ m} = (\text{Entfernung Nordpol} - \text{Äquator}) / (10.000.000)$

$1 \text{ m} = \text{Urmeter, eingraviert in Platin-Iridium Stab (Paris)}$

1960  $1 \text{ m} = 1.650.763,73 \text{ fache der Wellenlänge orangen Lichtes von } ^{86}\text{Kr}$

1983  $1 \text{ m} = \text{Strecke von Licht im Vakuum in } 1/299.792.458 \text{ s}$

Präzision

?

$10^{-4} \text{ m}$

$\sim 10^{-9} \text{ m}$

$< 10^{-9} \text{ m}$

### 1.3 Zeit

jedes Zeitnormal muß definieren können:

- wann ist ein Ereignis passiert ?
- Rückdatierung möglich ?
- über welche Dauer fand ein Ereignis statt?



### 1.4 Masse

Urkilogramm Platin-Iridium Zylinder (Paris),

Kopie weltweit verschickt,

Masse des Kohlenstoff  $^{12}\text{C}$ -Atoms:  $m = 12u$

Basis-Unit  $u = 1.6605402 \times 10^{-27} \text{ kg} = \text{Masse eines Protons}$

### 1.5 Einheiten umwandeln

multipliziere geschickt mit Umrechnungsfaktor 1

**Bsp.**  $(1 \text{ min})/(60 \text{ s}) = (60 \text{ s})/(1 \text{ min}) = 1$

$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$ , aber  $1 \neq 60$  !

Zahl und Einheit gleichzeitig umformen und Einheiten wie Zahlen behandeln.

z.B.  $2 \text{ min} = (2 \text{ min}) * 1 = (2 \text{ min}) * ((60 \text{ s})/(1 \text{ min})) = 120 \text{ s}$

**Bsp.** Pheidippides läuft 490 v.Ch. von Marathon nach Athen und überbringt den Sieg der Griechen über die Perser. Er läuft mit Geschwindigkeit 23 Riden/h. 1 Ride = 4 Stadien, 1 Stadion = 6 Plethren, 1 Plethron = 30.8 m.

Frage Wie schnell lief er in m/s?

Lsg.

Ergebnis runden auf signifikante Stellen: hier 2 Stellen, da 23 Riden / h

## 2. Kinematik

Alles auf der Welt bewegt sich, Grunderfahrung des Menschen, Fortbewegung, Hektik ...

Betrachte nur einfache Bewegung:

- geradlinig
- zeitliche Abhängigkeit der Bewegung wichtig
- bewegtes Objekt: punktförmiges Teilchen, oder Schwerpunkt

### 2.1 Ort & Verschiebung

Referenzpunkt: Nullpunkt auf x-Achse

Verschiebung:  $\Delta x = x_2 - x_1$

Wechsel von Ort  $x_1$  nach  $x_2$

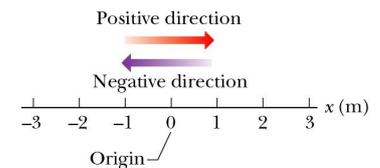
Richtung:  $\Delta x$  positiv:  $x_2 > x_1$  , neg.  $x_2 < x_1$

Bewegung von  $x_1 \Rightarrow x_2 \Rightarrow x_1$  dann  $\Delta x = 0$

Mißt nur Anfang- Endpunkt, nicht die gelaufene Strecke

Betrag: Abstand zwischen  $x_2$  und  $x_1$

Vektor: Betrag, Richtung



Frage: welche Paare ergeben neg. Verschiebung ( $x_1, x_2$ ):

$(-2\text{m}, 1\text{m}), (2\text{m}, 0\text{m})$

Lsg.

## 2.2 Geschwindigkeit

### 2.2.1 Mittlere Geschwindigkeit

Beschreibe Position des Teilchens durch  $x(t)$ , Ort als Funktion der Zeit  $t$

Geschwindigkeit  $v_{gem} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$  Startzeit  $t_1 = 0$ , Mittelwert

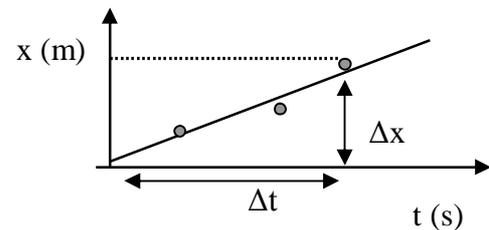
Einheit  $[v] = \text{m/s}$  Strecke / Zeit

**Exp.** Laufband, 5 Studenten stoppen Zeit  $\Delta t$  von Punkt  $x_1$  nach  $x_2$ .

5 verschiedene Längen ausmessen;  $x(t)$  auftragen und  $v$  berechnen

Messung

Start $x_1$ (m)	Ziel $x_2$ (m)	$\Delta x = x_2 - x_1$ (m)	$\Delta t$ (s)	$v$ (m/s)
0,5	1,0	0,5	0,1	5,0
0,5	1,5	1,0	0,2	5,0
0,5	2,0	1,5	0,3	5,0



Darstellung Daten in  $x(t)$ -Diagramm eintragen

Deutung  $v =$  Steigung der Geraden  $x(t)$

Anschauung: Steigung der Geraden  $x(t)$  zwischen  $(x_1, t_1)$  u.  $(x_2, t_2)$

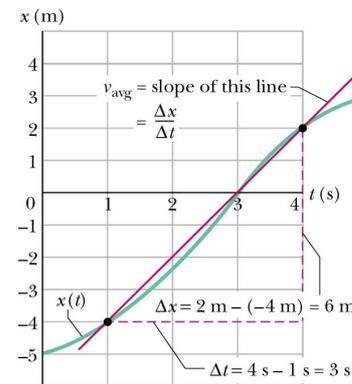
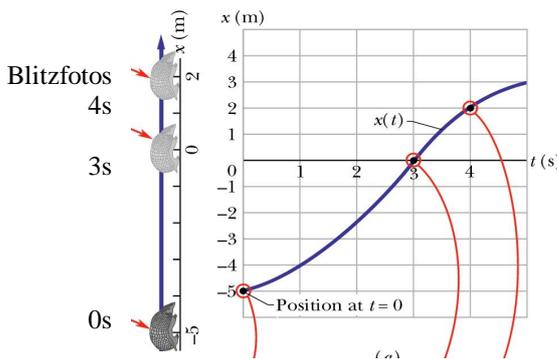
$v_{\text{gem pos.}}$ : Gerade steigt nach rechts

$v_{\text{gem neg.}}$ : Gerade fällt nach rechts

Praktisch Startwert  $x_1, t_1$  auf 0 setzen  $\Rightarrow v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - 0}{t_2 - 0} = \frac{x}{t}$

**Bsp.** Igel bewegt sich auf geradlinigem Weg von  $x_1 \Rightarrow x_2$  in der Zeit  $\Delta t$

②



In ein Bild zeichnen

Bsp. mittlere Geschwindigkeit des Igels zwischen Koordinaten

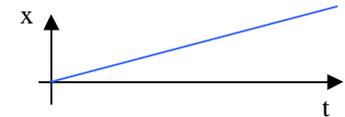
$(x_1, = -4\text{m}, t_1 = 1\text{s})$  u.  $(x_2, = 2\text{m}, t_2 = 4\text{s})$

Typische Funktionen

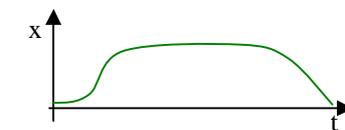
a)  $x(t) = \text{konst}$  Teilchen bewegt sich nicht  $\Delta x = 0$



b)  $x(t) = v t$  Teilchen hat konstante Geschwindigkeit



c)  $x(t)$  beschleunigt, konstante Geschwindigkeit, stoppt, kehrt um, stoppte



Vektor Betrag und Richtung, z.B. Tachometer mißt nur Betrag

**2.2.2 Momentangeschwindigkeit**

Sie fahren mit dem Auto von Münster nach Steinfurt und benötigen für 30 km 1/2 Stunde, dann

$$\Rightarrow v_{gem} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{30 \text{ km}}{0,5 \text{ h}} = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 60 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 16,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2 Wochen später erhalten Sie Post vom Polizeipräsidenten mit Blitzfoto und Strafgeld

$$\Rightarrow v = 135 \text{ km/h} \quad \text{wie kann das sein?}$$

Frage Geschwindigkeit zur Zeit des Blitzfotos ?

Lsg. Momentangeschwindigkeit

Mittelwert:  $v_{gem}$  für längeren Zeitraum  $\Delta t$

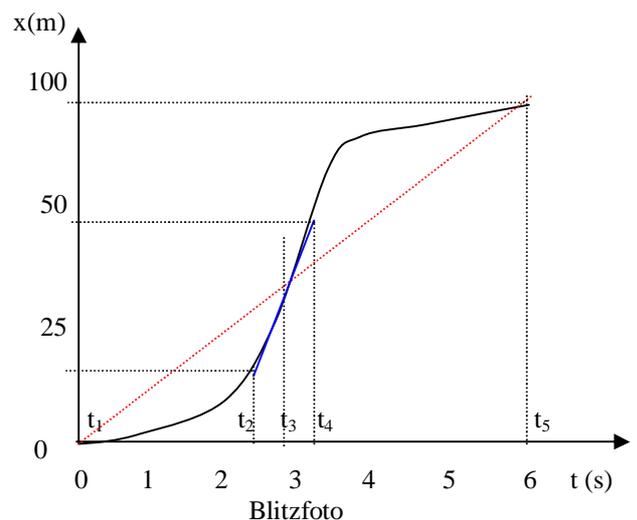
1) Mittlere Geschwindigkeit

für Zeitraum  $\Delta t = t_5 - t_1$

$$v_{gem} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{100 - 0 \text{ m}}{6 - 0 \text{ s}} = 16,7 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

für Zeitraum  $\Delta t = t_4 - t_2$

$$v_{gem} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{45 - 18 \text{ m}}{3,3 - 2,5 \text{ s}} = 33,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 121 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$



=> Geschwindigkeit hängt selbst vom Zeitpunkt ab

2) Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t_3$  des Blitzfotos

=>  $v$  bei  $t_3$ : Zeitraum muss zum Zeitpunkt schrumpfen:  $\Delta t \Rightarrow 0$

Momentang. 
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

- Ableitung von  $x(t)$  nach  $t$
- Steigung der Kurve  $x(t)$
- Änderung des Ortes mit der Zeit

### 2.3 Differenzieren Regeln zum Differenzieren einfacher Funktionen

1)  $x(t) = a$ , mit  $a = \text{konstant} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 0$  denn  $a$  hängt nicht von  $t$  ab

2)  $x(t) = a \cdot t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = a$

3)  $x(t) = t^m \Rightarrow \frac{dx}{dt} = m \cdot t^{m-1}$ , mit  $m = \text{konstant}$

4)  $x(t) = e^t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = e^t$

5)  $x(t) = \ln t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$

6)  $x(t) = \sin t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \cos t$ ,  $x(t) = \cos t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\sin t$

Summenregel: 
$$\frac{d}{dt}(u(t) + v(t)) = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt}$$

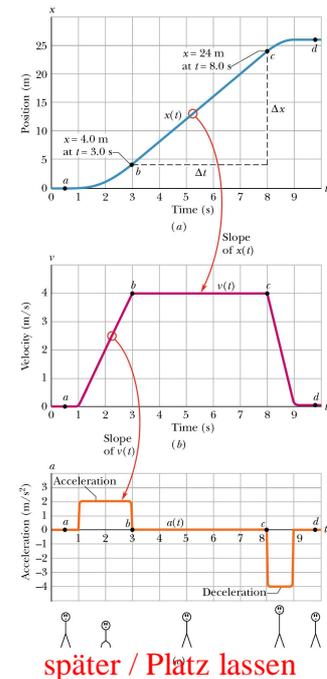
Produktregel: 
$$\frac{d}{dt}(u(t) \cdot v(t)) = u \frac{dv}{dt} + v \frac{du}{dt}$$

Kettenregel: 
$$\frac{d}{dt}(f(g(t))) = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dt}$$

**Bsp**  $x(t) = 24 + 6t^3 \Rightarrow$

**Bsp:** Ort  $x(t) \Leftrightarrow$  Geschwindigkeit  $v(t)$

- a) Aufzug steht,
- a) -b) fährt los mit wachsender Geschw. bis zur Maximalgeschw.
- c) bremsst am Ziel ab
- d) steht



**Frage** Geschwindigkeit  $v(t) = ?$

Lsg. a) steht für  $t = 0$ s bis  $1$ s,  $t > 9$ s:  $x(t) = \text{konst}$

$$\Rightarrow v = dx/dt = 0$$

b)  $t = 3$ s bis  $8$ s: linearer Weggewinn  $x(t) = v_0 \cdot t$

$$\Rightarrow v_0 = dx/dt = (24\text{m} - 4\text{m}) / (8\text{s} - 3\text{s}) = 4 \text{ m/s}$$

$v_0$  ist pos, Gerade  $x(t)$  steigt an

### 2.4.1 Beschleunigung

Rate der Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit

Mittelwert  $a_{\text{gem}} = \Delta v / \Delta t = (v_1 - v_2) / (t_2 - t_1)$  für geradlinige Bewegung

Momentan.  $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta v / \Delta t) = dv/dt$  Ableitung  $v(t)$  nach  $t$

Steigung der Kurve  $v(t)$

$$a = dv/dt = d/dt(dx/dt) = d^2x/dt^2$$

Einheit  $[a] = \text{m/s}^2$ , Länge/(Zeit\*Zeit)

Vektor Betrag, Richtung

Vorzeichen Vorzeichen von  $a$  und  $v$  gleich  $\Rightarrow$  Betrag von  $v$  nimmt zu, Teil wird schneller

Vorzeichen von  $a$ ,  $v$  verschieden  $\Rightarrow$  Betrag  $v$  nimmt ab, Teil wird langsamer

**Bsp.** Trage Beschleunigung in Bild oben ein

$$v(t) = \text{konst} \Rightarrow a = dv/dt = 0$$

Beschleunigung  $dv/dt > 0$ , Bremsen  $dv/dt < 0$

$$\text{Beschleunigungsdauer} = \text{doppelte Abbremsdauer} \Rightarrow |a_{\text{Beschl}}| = \frac{1}{2} |a_{\text{Brems}}|$$

Beschleunigungsgefühl

Figuren in Abb oben eintragen:

Lift fährt nach oben => Beschleunigung = Person nach unten gedrückt,  $a > 0$

Abbremsen => Person hoch gezogen,  $a < 0$

Körper funktioniert wie ein Beschleunigungsmesser, aber nicht als Geschwindigkeitsmesser

Auto  $v = 50 \text{ km/h}$  oder Flugzeug  $v = 900 \text{ km/h}$  nicht unterscheidbar, nur Geschwindigkeitswechsel => Reiz der Achterbahn

**2.4.2 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung**

Sonderfall: konstante Beschleunigung (Auto Start / Bremsen vor Ampel)

Start: Zeit  $t_0 = 0$

Ort  $x(t_0) = x_0$

Geschw.  $v(t_0) = v_0$

Beschl.  $a = \text{konstant}$  ( $a(t)$  unten zuerst zeichnen)

$$a = (v - v_0)/(t - 0)$$

=>  $v(t) = v_0 + a t$  (als 2. zeichnen)

$$v = (x - x_0)/(t - 0)$$

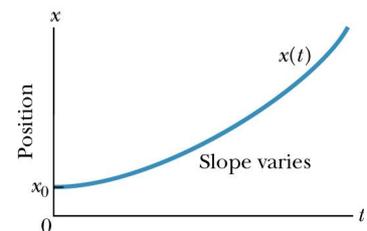
=>  $x(t) = x_0 + v(t) t$

Durchschnitt  $v_{\text{gem}} = 1/2(v_0 + v)$  zwischen  $t$  und  $t=0$

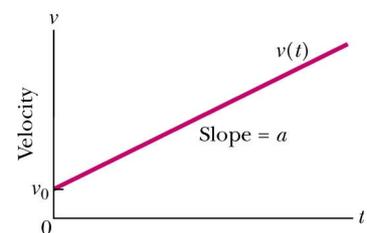
$$\Rightarrow v_{\text{gem}} = \frac{1}{2}(v_0 + v_0 + at) = v_0 + \frac{1}{2}at$$

$$x(t) = x_0 + v(t)t = x_0 + (v_0 + \frac{1}{2}at)t$$

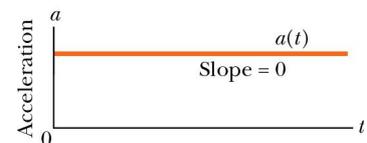
$$\Rightarrow \underline{\underline{= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2}}$$



(a)



(b)



(c)

### Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

	Gleichung	Fehlende Größe u. Bedeutung	
1.	$v(t) = v_0 + at$	$x - x_0$	aktuelle Geschwindigkeit
2.	$x - x_0 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} at^2$	$v$	Verschiebung zum Anfangspunkt
aus Gl.1. & Gl. 2. folgt:			
3.	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$t$	Zeitpunkt, Dauer
4.	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	$a$	Beschleunigung
5.	$x - x_0 = vt - \frac{1}{2} at^2$	$v_0$	Anfangsgeschwindigkeit (1 in 2)

Frage Beweise Gl. 3.

Lsg aus 1. =>  $t = (v - v_0)/a$  in 2. =>  $x - x_0 = v_0[(v - v_0)/a] + \frac{1}{2} a[(v - v_0)/a]^2$

$$= v_0 v/a - v_0^2/a + \frac{1}{2} v^2/a - v v_0/a + \frac{1}{2} v_0^2/a$$

$$\Rightarrow 2a(x - x_0) = -2v_0^2 + v^2 + v_0^2$$

$$\Rightarrow \underline{v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)}$$

### 2.4.3 Freier Fall

eine typische konstant beschleunigte Bewegung ist der freie Fall

**Exp.** Wassertropfen fallen im Takt von ca. 3Hz aus einem Tropf. Stroboskop erzeugt ein stehendes Bild der Wassertropfen.

Beobachtung: Abstand der Wassertropfen  $\Delta x$  wird größer.

Tab. Schrittweise ausfüllen  
Tropfen, Zeit, Ort

Deutung: zurückgelegter Weg der Tropfen bei Blitzfolge  $\Delta t$  berechnen,  $\Delta t = 0.33$  s Exp.

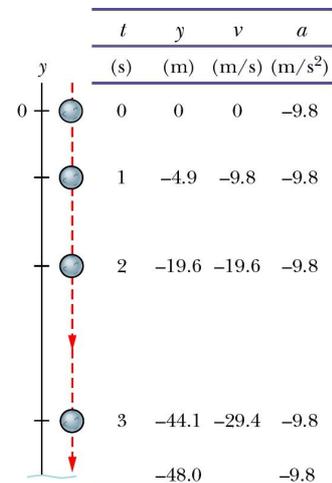
Blitzfolge 1. Blitz  $t_1 = 1\Delta t$ ,  
2. Blitz  $t_2 = 2\Delta t$   
n-ter Blitz  $t_n = n\Delta t$

Weg  $\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ ,  $v_0 = 0$  in unserem Exp.

nach n-tem Blitz  $\Delta x = \frac{1}{2} a(n\Delta t)^2$ ,  
 $\Rightarrow \Delta x \sim n^2$  wächst quadratisch mit der Zeit

Vergleich unbeschleunigt  $a = 0 \Rightarrow \Delta x = v_0(n\Delta t)$

$\Delta x \sim n$  wächst linear in der Zeit



Geschwindigkeit  $v(t) = v_0 + at = at$  wächst linear mit der Zeit (in Tab eintragen)

Gravitationsbeschleunigung

$$a = -g = -9.81 \text{ m/s}^2$$

- konstante Beschleunigung in Erdnähe Richtung Erdmittelpunkt
- Gravitation wird negativ gerechnet (zeigt nach unten)

- Exp.** a) Fallrohr mit Luft: Papier, Kugel fallen lassen, Kugel fällt schneller – warum?  
b) Fallrohr evakuiert: Papier und Kugel fallen gleich schnell

Gilt in Erdnähe:  $g$  ist unabhängig von den Eigenschaften des Gegenstandes, sofern kein Luftwiderstand herrscht.

**Bsp.** Ein Ball wird (entlang einer  $y$ -Achse) mit Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 12 \text{ m/s}$  senkrecht in die Luft geworfen. Der Luftwiderstand sei 0.

- a) Wie lange braucht der Ball bis zur maximalen Höhe?

- b) Wie lange braucht der Ball um 5 m hoch zu fliegen?

### 3.1 Vektoren

Hilfsmittel zur Darstellung von gerichteten Größen im Ortsraum

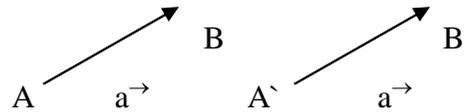
Skalar: Betrag ohne Richtung      Bsp. Masse, Temperatur, Druck, Energie etc.

Vektor: Betrag mit Richtung      Bsp. Verschieb.  $\Delta x^{\rightarrow}$ , Geschw.  $v^{\rightarrow}$ , Beschl  $a^{\rightarrow}$ , Kräfte

z.B. Verschiebung  $a^{\rightarrow}$  von Ort A nach Ort B

Darstellung: Pfeil  $a^{\rightarrow}$

Betrag:  $|a^{\rightarrow}| = a = \text{Länge}$



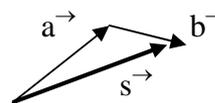
Vektoren können parallel verschoben werden, ohne dass sie sich ändern, denn Betrag und Richtung bleiben erhalten

### 3.2 Vektoraddition

Summe der einzelnen Verschiebungen  $a^{\rightarrow}$  und  $b^{\rightarrow}$

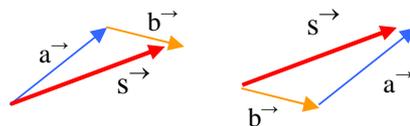
Vektorsumme  $s^{\rightarrow} = a^{\rightarrow} + b^{\rightarrow}$

ist keine algebraische Summe!

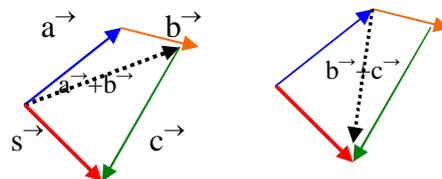


Methode: Pfeile parallel verschieben, so dass Spitze an Anfang passt

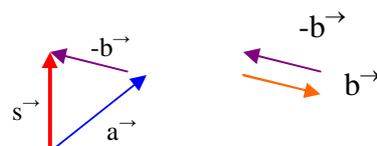
Kommutativgesetz:  $s^{\rightarrow} = a^{\rightarrow} + b^{\rightarrow} = b^{\rightarrow} + a^{\rightarrow}$



Assoziativgesetz:  $s^{\rightarrow} = (a^{\rightarrow} + b^{\rightarrow}) + c^{\rightarrow} = a^{\rightarrow} + (b^{\rightarrow} + c^{\rightarrow})$



Subtraktion:  $s^{\rightarrow} = a^{\rightarrow} - b^{\rightarrow} = a^{\rightarrow} + (-b^{\rightarrow})$



Richtungsumkehr von  $b^{\rightarrow}$

### 3.3 Vektorkomponenten

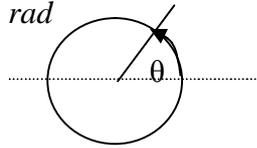
#### 3.3.1 Trigonometrische Funktionen

nötig, um Vektorkomponenten zu bestimmen

a) Winkelmaße      voller Kreis =  $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$

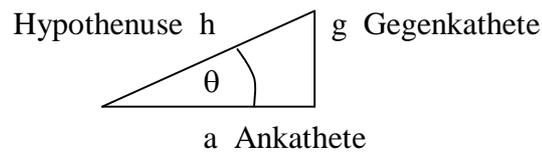
$$\Rightarrow 1 \text{ rad} = 360^\circ / 2\pi = 57,296^\circ$$

$$\Rightarrow 1^\circ = 0,01745 \text{ rad}$$



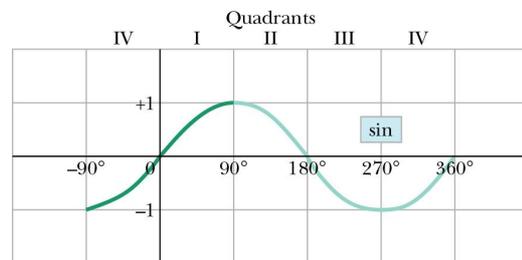
b) Vorzeichen Winkel pos. wenn gegen Uhrzeigersinn

c) Winkelseiten



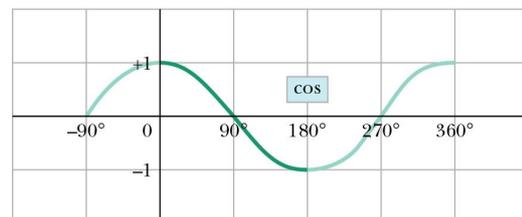
d) Winkelfunktion

$$\sin \theta = g/h$$



(a)

$$\cos \theta = a/h$$



(b)

$$\tan \theta = g/a = \sin\theta/\cos\theta$$

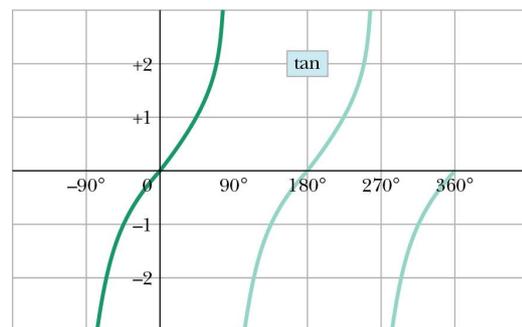
e) Inverse trigonom. Funktion

Funktion:       $\sin \theta = g/h$

Umkehrfunktion       $\arcsin(g/h) = \theta$

$$\arccos(a/h) = \theta$$

$$\arctan(g/a) = \theta$$



(c)

prüfe Ergebnisse, meist gibt der Taschenrechner nur den Wert aus <sup>(c)</sup>erstem Quadranten

**Bsp.**  $\sin \theta = 0.5$  Frage       $\theta = ?$

Lsg       $\theta = \arcsin(0.5) = 30^\circ \pm n 360^\circ$  ,  $n \in \mathbb{N}$

aber auch       $\arcsin(0.5) = 150^\circ \pm n 360^\circ$  ,  $n \in \mathbb{N}$

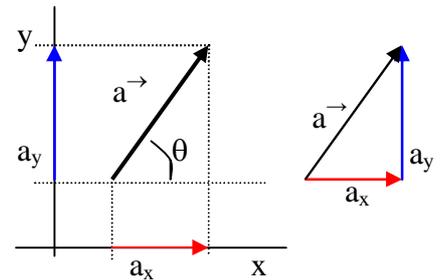
### 3.3.2 Vektorkomponenten

bisher geometrische Addition von Vektoren, besser ist die analytische Addition der Komponenten im rechtwinkligen x-y-Koordinatensystem

Projektion des Vektors auf Koordinatenachse

$$x\text{-Komponente: } a_x = a \cos(\theta)$$

$$y\text{-Komponente: } a_y = a \sin(\theta)$$



Mit den Vektorkomponenten besitzt man die vollständige Information über den Vektor.

Darstellung von  $\vec{a}$  für definiertes Koordinatensystem:

- |    |                 |                                     |           |
|----|-----------------|-------------------------------------|-----------|
| 1) | x-y-Komponenten | $\vec{a} = (a_x, a_y)$              | 2 Angaben |
| 2) | Betrag          | $ \vec{a}  = (a_x^2 + a_y^2)^{1/2}$ |           |
|    | & Winkel        | $\tan(\theta) = a_y/a_x$            | 2 Angaben |

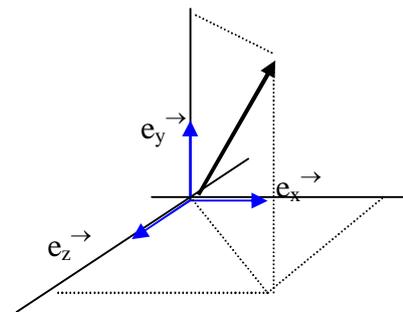
Wie baut man nun aber den Vektor korrekt aus den x-y-Komponenten auf?

### 3.4 Einheitsvektoren

- $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$
- spannen ein Koordinatensystem im 3-dimensionalen Raum auf
  - geben Richtung vor
  - stellen eine *Basis* dar.

$$\text{Betrag} = 1 = |\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z|$$

ohne Einheit, Anordnung: rechtshändig



Darstellung beliebiger Vektoren durch Einheitsvektoren und Vektorkomponenten möglich:

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

Vektorkomponenten hängen von Einheitsvektoren ab; können sich ändern wenn z.B. wenn Basissystem gedreht wird; der Vektor bleibt aber unverändert im Raum

### 3.5 Vektoren komponentenweise addieren

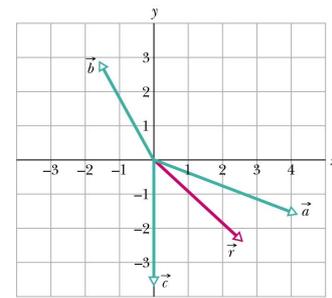
Wenn Vektorkomponenten bzgl. der Einheitsvektoren bekannt sind, dann kann man die Vektoren "Achse für Achse" addieren bzw subtrahieren.

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

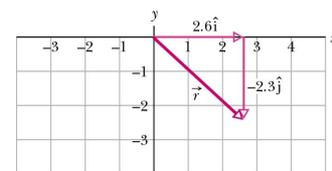
also: Vektoren sind gleich, wenn ihre Komponenten gleich sind.

**Bsp** gegeben  $\vec{a} = (4,2 \text{ m}) \vec{e}_x - (1,5 \text{ m}) \vec{e}_y$   
 $\vec{b} = (-1,6 \text{ m}) \vec{e}_x + (2,9 \text{ m}) \vec{e}_y$   
 Frage gesucht  $\vec{c} = (-3,7 \text{ m}) \vec{e}_y$   
 $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Lsg:



(a)



(b)

### 3.6 Vektormultiplikation

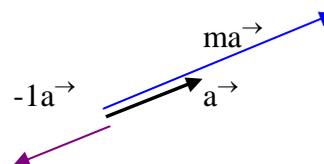
Vektormultiplikationen entsprechen nicht den herkömmlichen Zahlenmultiplikationen.

#### 3.6.1 Multiplikation mit Skalar

Produkt zwischen Vektor und einer Zahl m (Skalar). Es wird komponentenweise multipliziert:

$$m\vec{a} = m a_x \vec{e}_x + m a_y \vec{e}_y + m a_z \vec{e}_z$$

$$m\vec{a} = (m a_x, m a_y, m a_z)$$



Vektor wird länger ( $m > 0$ ) oder ändert Richtung ( $m = -1$ ), Orientierung (Winkel) bleibt aber!

#### 3.6.2 Skalarprodukt

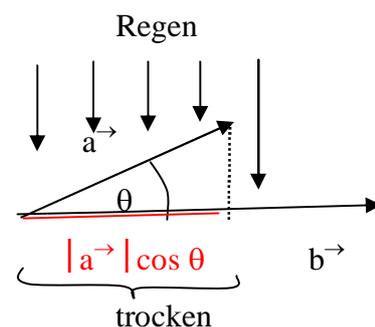
Das Skalarprodukt von zwei Vektoren ergibt eine Zahl (Skalar).

Berechnung:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta$$

$$= a b \cos \theta$$

Projektion von  $\vec{a}$  auf  $\vec{b}$



Es gilt

a)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  Kommutativgesetz

b)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \text{maximal}$ , wenn  $\theta = 0^\circ$ , bzw.  $\theta = n180^\circ$

c)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , wenn  $\theta = 90^\circ$ , bzw.  $\theta = 90^\circ \pm n180^\circ$

 $\Rightarrow$  Test ob 2 Vektoren senkrecht zueinander stehen.**Bsp.** Bestimme den Winkel  $\theta$  zwischen zwei Vektoren

Lsg.

**3.6.3 Kreuzprodukt (Vektorprodukt)**Das Kreuzprodukt von zwei Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  ergibt einen neuen Vektor  $\vec{c}$ .

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

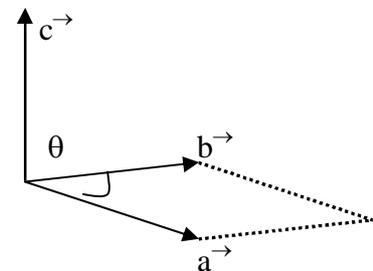
Berechnung  $\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z) \vec{e}_x + (a_z b_x - b_z a_x) \vec{e}_y + (a_x b_y - b_x a_y) \vec{e}_z$

Es gilt 1)  $c = ab \sin \theta$ ,  $\theta$  kleinerer Winkel2)  $\vec{c}$  senkrecht auf  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ 

3) rechte Hand Regel:

Daumen  $\vec{a}$ , Zeigefinger  $\vec{b}$ , Mittelfinger  $\vec{c}$ 

Die Anfangspunkte der Vektoren berühren sich

Kreuzprodukt ist a) maximal, wenn  $\vec{a}$  senkrecht auf  $\vec{b}$ b) 0, wenn  $\vec{a}$  parallel (antiparallel) zu  $\vec{b}$ 

Deutung:

 $c = |\vec{c}|$  Flächeninhalt der von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Fläche und  $\vec{c}$  definiert Lage der Fläche im Raum, da  $\vec{c}$  senkrecht auf der Fläche

Beachte

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \text{ wegen rechter-Hand-Regel}$$

### 4. Bewegung im 3-dimensionalen Raum

neu: Darstellung beliebiger Bewegungen im Raum möglich.

#### 4.1 Ort & Verschiebung

Methode: Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  im rechts-händigen Koordinatensystem

Referenzpunkt: Ursprung des Koordinatensystems (0, 0, 0)

Einheitsvektoren  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  spannen Koordinatensystem auf

Ortsvektor:  $\vec{r}(t) = r_x(t) \vec{e}_x + r_y(t) \vec{e}_y + r_z(t) \vec{e}_z$

Bewegung: Zeitabhängigkeit von  $\vec{r}(t)$  steckt in den Komponenten  $r_x(t), r_y(t), r_z(t)$

Die Einheitsvektoren sind zeitlich konstant

Teilchenbewegung zeigt vom Ursprung (0, 0, 0) zum aktuellen Ort

Verschiebung:  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  in der Zeit  $t_1$  bis  $t_2$

$$\begin{aligned} \Delta\vec{r} &= (r_{x2} \vec{e}_x + r_{y2} \vec{e}_y + r_{z2} \vec{e}_z) - (r_{x1} \vec{e}_x + r_{y1} \vec{e}_y + r_{z1} \vec{e}_z) \\ &= (r_{x2} - r_{x1})\vec{e}_x + (r_{y2} - r_{y1}) \vec{e}_y + (r_{z2} - r_{z1}) \vec{e}_z \\ &= \Delta r_x \vec{e}_x + \Delta r_y \vec{e}_y + \Delta r_z \vec{e}_z \end{aligned}$$

**Bsp.** Der Ortsvektor eines Teilchens wird gegeben:

Zu Zeit  $t_1$ :  $\vec{r}_1 = (-3\text{m}) \vec{e}_x + (2\text{m}) \vec{e}_y + (5\text{m}) \vec{e}_z$

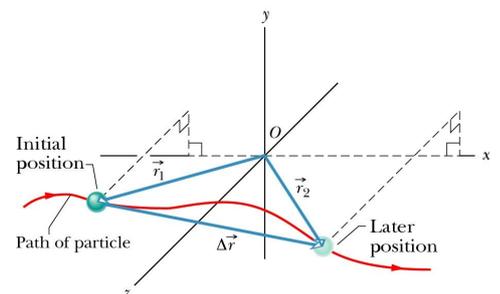
Zu Zeit  $t_2$ :  $\vec{r}_2 = (9\text{m}) \vec{e}_x + (2\text{m}) \vec{e}_y + (8\text{m}) \vec{e}_z$

Frage: Verschiebung  $\Delta\vec{r}$  in der Zeit von  $t_1$  bis  $t_2$  ?

Lsg.:  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  komponentenweise

$$\begin{aligned} &= (9 - (-3)\text{m}) \vec{e}_x + (2 - 2 \text{m}) \vec{e}_y + (8 - 5\text{m}) \vec{e}_z \\ &= (12\text{m}) \vec{e}_x + 0 \vec{e}_y + (3\text{m}) \vec{e}_z \end{aligned}$$

Bewegung parallel zur x-z-Ebene, da keine y-Komponente



**Bsp.:** Ein Hund läuft auf einem Parkplatz, auf dem ein Koordinatensystem aufgemalt ist. Die Zeitabhängigkeit der 2-dim. Bewegung ist gegeben durch:

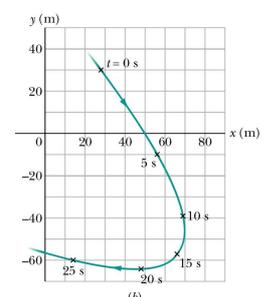
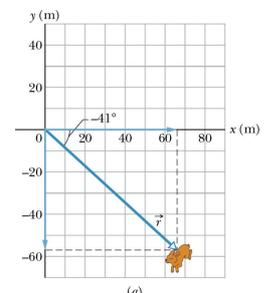
$$\vec{r}(t) = r_x(t) \vec{e}_x + r_y(t) \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z$$

mit:  $r_x(t) = -0,31 t^2 + 7,2 t + 28$

$$r_y(t) = 0,22 t^2 - 9,1 t + 30$$

$$[r_x] = [r_y] = \text{m}, [t] = \text{s}$$

Frage: Wie lautet der Ortsvektor zur Zeit  $t = 15\text{s}$  ?



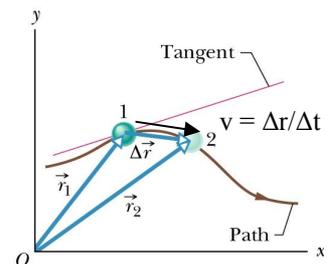
Lsg:

Frage: Zeichne die Bahnkurve des Hundes von  $t = 0\text{s}$  bis  $t = 25\text{s}$ .

## 4.2 Geschwindigkeit

### 4.2.1 Durchschnittsgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \Delta\vec{r} / \Delta t \\ &= [\Delta r_x \vec{e}_x + \Delta r_y \vec{e}_y + \Delta r_z \vec{e}_z] / \Delta t \\ &= [\Delta r_x / \Delta t] \vec{e}_x + [\Delta r_y / \Delta t] \vec{e}_y + [\Delta r_z / \Delta t] \vec{e}_z\end{aligned}$$



Merke: a) Zeitabhängigkeit von  $\vec{r}(t)$  steckt in den Komponenten  $r_x(t)$ ,  $r_y(t)$ ,  $r_z(t)$ ,

Einheitsvektoren ( $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$ ,  $\vec{e}_z$ ) sind zeitlich konstant.

b) Eine 3-dim. Bewegung läßt sich nicht mehr im Ort-Zeit Koordinatensystem darstellen, da wir keine 4-te Dimension zum Zeichnen besitzen.

### 4.2.2 Momentangeschwindigkeit:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

in Abb. oben eintragen

Ableitung bedeutet:  $\lim \Delta t \rightarrow 0$  zur Zeit  $t_1$ , damit folgt:

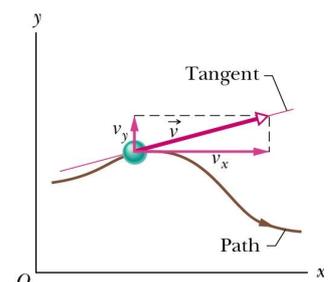
- 1)  $\Delta\vec{r}$  läuft gegen 0 also läuft  $\vec{r}_2$  auf  $\vec{r}_1$  zu
- 2) die Richtung von  $\vec{v} = \Delta\vec{r} / \Delta t$  nähert sich der Tangente im Punkt  $\vec{r}_1$
- 3) Durchschnittsgeschwindigkeit nähert sich der Momentangeschwindigkeit

**Gilt:** Richtung der Momentangeschwindigkeit eines Teilchens verläuft immer tangential zur Bahnkurve des Teilchens am momentanen Ort des Teilchens.

$$\begin{aligned}\vec{v} &= d\vec{r}/dt \\ &= d/dt [r_x \vec{e}_x + r_y \vec{e}_y + r_z \vec{e}_z] \\ &= [dr_x/dt] \vec{e}_x + [dr_y/dt] \vec{e}_y + [dr_z/dt] \vec{e}_z \\ &= v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z\end{aligned}$$

mit den Geschwindigkeitskomponenten:

$$v_x = dr_x/dt, \quad v_y = dr_y/dt, \quad v_z = dr_z/dt$$



**Vorsicht:** Ortsvektor zeigt vom Koordinatenursprung zum Ortspunkt  $r$  (Verschiebung  $\vec{r}$ )  
Geschwindigkeitsvektor zeigt die momentane Richtung an

**Bsp.** Bestimme Geschwindigkeit des Hasen zur Zeit  $t = 15$  s.

Lsg.

### 4.3 Beschleunigung

tritt auf bei Änderung der Geschwindigkeit eines Teilchens in der Zeitspanne  $\Delta t$ :

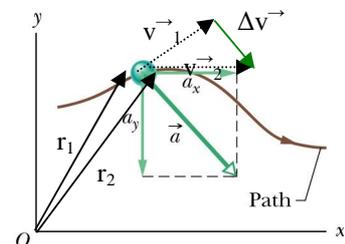
- im Betrag und / oder
- in der Richtung von  $v_1 \rightarrow$  auf  $v_2 \rightarrow$

Durchschnitt  $\vec{a} = \Delta \vec{v} / \Delta t$  (zwischen Orten  $r_1, r_2$ )

Momentan  $\vec{a} = d\vec{v}/dt$

$$\begin{aligned} &= d/dt [v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z] \\ &= [dv_x/dt] \vec{e}_x + [dv_y/dt] \vec{e}_y + [dv_z/dt] \vec{e}_z \\ &= a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$a_x = dv_x/dt, \quad a_y = dv_y/dt, \quad a_z = dv_z/dt \quad (\text{Beschleunigungskomponenten})$$

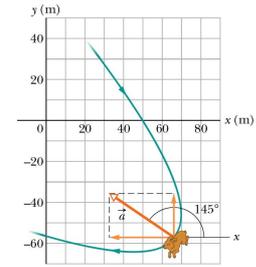


Beschleunigungsvektor  $\vec{a}$ :

- kein Verschiebungsvektor
- zeigt die Richtung der Beschleunigung an, d.h. Richtung der Geschwindigkeitsänderung
- der Betrag von  $\vec{a}$  gibt die Größe der Beschleunigung an
- wenn nur Betragsänderung von  $\vec{v}$ : dann ist  $\vec{a}$  tangential zur Bahn
- wenn nur Richtungsänderung von  $\vec{v}$ : dann steht  $\vec{a}$  senkrecht auf der Bahntangente

**Bsp.** Bestimme die Beschleunigung des Hasen zur Zeit  $t = 15$  s.

Lsg.



#### 4.4 Wurfbewegung

Teilchen (Projektil) bewegt sich in senkrechter Ebene:

- 1) Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$
- 2) nur Gravitationsbeschleunigung nach unten, keine horizontale Beschleunigung
- 3) Luftwiderstand = 0

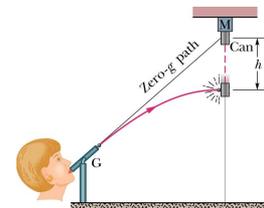
kein Projektil: Flugzeug, fliegende Ente, da eigener Antrieb

**Es gilt:** bei der Wurfbewegung sind horizontale und vertikale Bewegung voneinander unabhängig, sie beeinflussen sich nicht!

FOLIE Skater

**Exp.** Modellbahn fährt, schießt Kugel senkrecht nach oben, fängt sie wieder auf

**Exp.** Blasrohr und Büchse



Aufbau skizzieren,

- Deutung
- a) Gravitation  $g = 0 \Rightarrow$  Magnet aus, Dose fällt nicht, Ball trifft Dose oben
  - b)  $g = 9.8 \text{ m/s}^2 \Rightarrow$  Dose und Kugel werden gleichermaßen nach unten beschleunigt  $\Rightarrow$  treffen sich immer, unabh. von  $v_0$

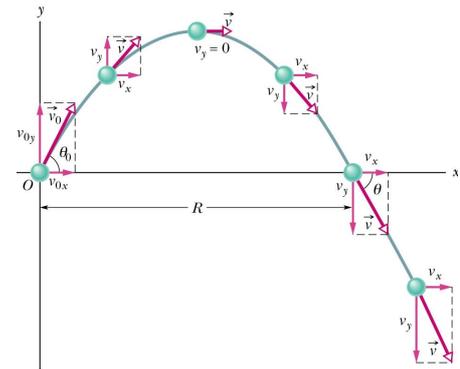
**Wurfbahn / Trajektorie**

Komponentenweise bestimmen

Anfangsgeschw.  $\vec{v} \rightarrow_0 = v_{0x} \vec{e}_x + v_{0y} \vec{e}_y$ 

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0$$

konstant  $\vec{a}_y(t) = -\vec{g} = -9,81 \text{ m/s}^2$  daraus folgtzeitabhängig  $\vec{x}(t), \vec{v}(t)$ Horizontale Bewegung:Da keine horizontale Beschleunigung  $\Rightarrow v_x = v_{0x} = \text{konstant}$ (1) Ort  $x(t) - x_0 = v_{0x}t = v_0 \cos \theta_0 t$ Vertikale Bewegung:

Entspricht der Bewegung eines Teilchens im freien Fall

(2) Ort:  $y(t) - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$   
 $= v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ (3) Geschw.  $v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt$  Fkt. der Zeit, wie senkrecht nach oben geworfener Ball  
 $\Rightarrow t = (v_0 \sin \theta_0 - v_y)/g$ , in (2)  $\Rightarrow$ (4)  $v_y^2 = (v_0 \sin \theta_0)^2 - 2g(y - y_0)$  Fkt. des Ortes  $y(t)$ , brauchen wir späterBahngleichungGesucht: Bahn  $y(x)$  als Funktion des horizontalen Ortes  $x$ .aus (1)  $\Rightarrow t = x/(v_0 \cos \theta_0)$ , mit  $x_0 = 0$ in (2)  $\Rightarrow y = (v_0 \sin \theta_0 x)/(v_0 \cos \theta_0) - (g x^2)/(2 v_0^2 \cos^2 \theta_0)$  mit  $y_0 = 0$ (5)  $\Rightarrow \underline{y = x \tan \theta_0 - (g x^2)/(2(v_0 \cos \theta_0)^2)}$  TrajektorieTrajektorie ist Wurfparabel der Form  $y = ax + bx^2$ 

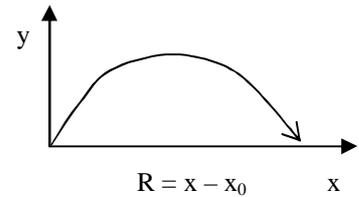
wenn Luftwiderstand vernachlässigt wird.

**Bsp.** Frage: Komponenten am Anfang, Ende, höchstem Punkt der Wurfparabel

a) Geschw., b) Beschleunigung

Horizontale Reichweite R

Ist die Entfernung des Projektils in x-Richtung, wenn es seine vertikale Ursprungshöhe (y) wieder erreicht hat, also:



$$\text{aus (1)} \quad R = v_0 \cos \theta_0 t \quad \text{mit } R = x - x_0$$

$$\text{aus (2)} \quad 0 = v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{mit } y - y_0 = 0$$

$$\Rightarrow t = (2v_0/g) \sin \theta_0$$

$$\Rightarrow R = (2v_0^2/g) \sin \theta_0 \cos \theta_0$$

$$(6) \quad \Rightarrow \quad \underline{R = (v_0^2/g) \sin 2\theta_0} \quad \text{mit } \sin 2\theta_0 = 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0$$

R wird maximal, wenn  $\sin 2\theta_0 = 1$ , d.h. bei Abschusswinkel  $\theta_0 = 45^\circ$ .

**Bsp. Zacchini**

1939 läßt sich Emmanuel Zacchini als menschliche Kanonenkugel über 3 Riesenräder schießen und landet nach einer Reichweite von 69 m sicher im Netz. Wie hat er die Position des Netzes berechnet?

FOLIE Zacchini

Riesenräder: 18 m hoch über Erdboden, je 23 m entfernt voneinander

Zacchini:  $v_0 = 26,5 \text{ m/s}$ ,  $y_0 = 3 \text{ m}$ ,  $\theta_0 = 53^\circ$

Netz: gesucht R,

Netzhöhe über Boden = 3 m, Kanonenausgang 3 m über Erdboden

Frage Schafft es Zacchini über das Riesenrad?

Lsg. Zacchini als Projektil, kein Luftwiderstand,

Koordinatenursprung am Kanonenausgang  $\Rightarrow x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0 \text{ m} = \text{Netzhöhe}$

$$y = x \tan \theta_0 - (g x^2) / (2(v_0 \cos \theta_0)^2), \quad \text{Trajektorien-gleichung (5)}$$

$$= 23 \text{ m} \tan 53^\circ - [(9,8 \text{ m/s}^2)(23 \text{ m})^2] / [2 (26,5 \text{ m/s} \cos 53^\circ)^2]$$

$$= 20,3 \text{ m}, \quad \text{also } 5,2 \text{ m über dem Riesenrad } 5,2 \text{ m} = 2,3 \text{ m} + 3 \text{ m Kanonenhöhe}$$

Frage Wie hoch ist seine maximale Flughöhe  $y_{\max}$  über dem mittleren Riesenrad?

Lsg. Bei  $y_{\max}$  gilt  $v_y = 0$  nutze Gl. (4)

$$v_y^2 = (v_0 \sin \theta_0)^2 - 2gy = 0$$

$$\Rightarrow y = (v_0 \sin \theta_0)^2 / 2g = (26,5 \text{ m/s} \sin 53^\circ)^2 / 2 \times 9,8 \text{ m/s}^2 = 22,9 \text{ m}$$

Zacchini überfliegt das Rad mit  $4,9 \text{ m} + 3 \text{ m} = 7,9 \text{ m}$

Frage Wie weit sollte das Netz von der Kanone entfernt sein?

Lsg. Zacchini's Reichweite = Netzabstand, denn Kanone und Netz sind gleich hoch

$$R = (v_0^2/g) \sin 2\theta_0 = [(26,5 \text{ m/s})^2 / 9,8 \text{ m/s}^2] \sin(2 \times 53^\circ) = 69 \text{ m}$$

Luftwiderstand: Netz zur Kanone hingezogen

Hauptgefahr: Ohnmacht zu Beginn des Fluges, da hohe Beschleunigung im Kanonenrohr

Frage Beschleunigung von Zachini ?

Lsg. Beschleunigungsstrecke ist die Kanonenrohrlänge L

$$L = 3\text{m} / \sin 53 = 3,8 \text{ m}$$

$$L = \frac{1}{2} at^2, \quad v = at \Rightarrow t = v/a$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} a(v/a)^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} v^2/L$$

$$= 92 \text{ m/s}^2 = 9 \text{ g} \quad \text{also 9-fache Erdbeschleunigung (Achterbahn macht ca. 3 g)}$$

### 4.5 Relativbewegung

**Bezugssystem:** Ort und Geschwindigkeit eines Teilchens hängen vom Bezugssystem (Koordinatensystem) des Beobachters ab.

Hier: nur Bezugssysteme mit konst. Geschwindigkeit, nicht beschleunigte Bezugssysteme.

**Bsp.** Geschwindigkeitsmessung:

a) Bezugssystem Strasse: Radarmessung der Autogeschwindigkeit relativ zur Straße

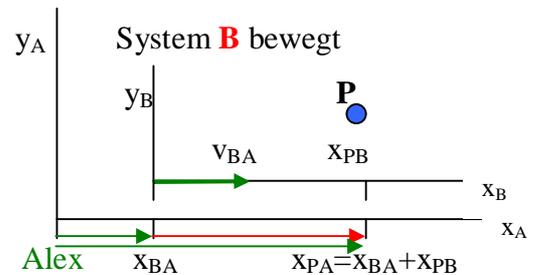
b) Bezugssystem Polizeiauto: Geschwindigkeit relativ zum Polizeiauto ist 0

Objekt: P: LKW auf Autobahn

Bezugssystem A: Alex steht am Straßenrand

Bezugssystem B: Berti fährt im Auto mit  $v_{BA} = \text{konst.}$

System A fest



	Berti misst	Alex mißt
Ort von Berti :	0	$x_{BA}$
Ort des LKW P:	$x_{PB}$	$x_{PA} = x_{BA} + x_{PB}$
Geschwindigkeit	$v_{PB}$	$v_{PA} = d/dt(x_{PA}) = d/dt(x_{BA}) + d/dt(x_{PB})$ $= v_{BA} + v_{PB}$

Geschwindigkeit Bezugssystem B relativ zu Bezugssystem A:  $v_{BA}$

Beschleunigung  $a_{PA} = d/dt(v_{PA}) = d/dt(v_{BA}) + d/dt(v_{PB})$

$$\Rightarrow a_{PB} = a_{PA} \quad \text{denn } v_{BA} = \text{konstant}$$

⇒ Die Beschleunigung eines Körpers ist in allen Bezugssystemen gleich, wenn die Bezugssysteme sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen.

**Bsp.** Berti bewegt sich mit  $v = 52 \text{ km/h}$  relativ zu Alex. Geschwindigkeit des LKW P wird von Alex zu  $-78 \text{ km/h}$  gemessen (LKW kommt auf Alex zu).

Frage Welche Geschw. mißt Berti?

Lsg

Frage Alex mißt, wie der LKW P innerhalb von 10s mit konst. Beschleunigung bremst. Wie groß ist die Beschleunigung  $a_{PA}$  relativ zu Alex?

Lsg.

Frage Beschleunigung des LKW P relativ zu Berti?

Lsg.

## 5. Kraft

Wenn ein Teilchen seine Geschwindigkeit ändert (Betrag oder Richtung) dann wissen wir, daß irgendetwas dies bewirkt haben muß. Erste wissenschaftl. Beobachtung der Verbindung zwischen Kraft und Beschleunigung durch Newton. (1642 – 1727))

Newtonsche Mechanik gilt nicht wenn:

- a) Geschwindigkeiten nahe Lichtgeschwindigkeit => Relativitätstheorie
- b) Mikrokosmos der Atome betrachtet wird => Quantenmechanik

### 5.1. Erstes newtonsches Gesetz (Trägheitsgesetz)

„Ein sich selbst überlassener Körper, auf den keine äußeren Kräfte wirken, bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit. Ändert er seinen Bewegungszustand, so wird er beschleunigt und es muss eine Kraft auf ihn wirken.“

### 5.2. Zweites newtonsches Gesetz

Unsere Erfahrung ist, dass eine gegebene Kraft bei verschiedenen Körpern verschiedene Beträge der Beschleunigung bewirken. Worin unterscheiden sich die Körper?

**Exp.** 2 Bälle werden mit einem Tritt (gleiche Kraft) zur Wand geschossen, Poloschläger

Experiment	Beobachtung	Deutung	Trägheit
a) Ball mit Luft gefüllt	große Beschleunigung	Masse klein	klein
b) Ball mit Wasser	kleine Beschleunigung	Masse groß	groß

=>  $a \sim 1/m$  Beschleunigung ist invers proportional zur Masse  $m$   
 FOLIE (1974, John Massis, Belgien zieht 2 Eisenbahnwaggons)

**Exp** Bleistift steht auf Papierstreifen (am Ende), schnell wegziehen, Stift bleibt stehen

Beobachtung:

- 1) große (träge) Masse des Zuges erfordert große Kraft zur Beschleunigung, aber  $a \rightarrow$  klein
- 2) Trägheit der kleinen Masse des Bleistiftes reicht aus, um nicht beschleunigt zu werden

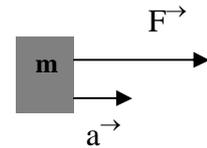
## Zweites newtonsches Gesetz

Die auf einen Körper wirkende Gesamtkraft ist gleich dem Produkt aus Masse und Beschleunigung des Körpers.

$$\underline{\underline{\vec{F} = m \vec{a}}},$$

$$[F] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = \text{N} = \text{Newton}$$

Definition der Kraft durch Beschleunigung eines Referenzkörpers der Masse  $m = 1 \text{ kg}$ : Wird der Körper auf reibungsfreier Unterlage mit  $\vec{a} = 1 \text{ m/s}^2$  beschleunigt, dann wirkt die Kraft  $\vec{F} = 1 \text{ N}$ ).



### Masse [m] = kg

- Intrinsische Eigenschaft des Körpers, erfaßt seine Trägheit
- Skalare Größe (kein Vektor)
- Verbindet Beschleunigung und Kraft, die der Körper erfährt
- Wir spüren Masse eines Körpers nur, wenn wir versuchen ihn zu beschleunigen

### Superpositionsprinzip

Kräfte sind Vektorgrößen; wirken mehrere Kräfte, so können diese vektoriell addiert werden zur resultierenden Kraft:

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

$$F_x = ma_x, \quad F_y = ma_y, \quad F_z = ma_z$$

Einzelkomponenten sind unabhängig voneinander

### Kontrollfrage:

Körper auf reibungsfreier Unterlage. Zwei Kräfte ziehen horizontal.



Welche dritte Kraft wirkt, wenn a) Körper in Ruhe, b)  $v = \text{konstant}$  nach links?

Lsg. a) 2 N nach links, b) 2 N nach links, denn je  $a = 0$

## 5.3 Inertialsystem

„Ein Inertialsystem ist ein System, in dem die newtonschen Gesetze gelten. Es gibt keine Scheinkräfte.“

Kennzeichen: Inertialsysteme ruhen oder bewegen sich mit  $v = \text{konstant}$ .

Inertialsysteme sind nicht beschleunigt und sie rotieren nicht!

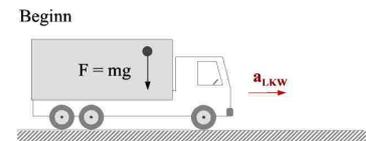
**Bsp.** Ball wird im LKW fallen gelassen und LKW beginnt zu beschleunigen mit  $\vec{a}_{LKW}$

1) Bezugssystem Straße,  $v = 0$  (Inertialsystem)

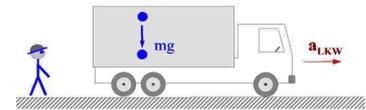
Beobachter sieht Ball senkrecht nach unten fallen

LKW fährt unter dem Ball weg mit Beschl.  $\vec{a}_{LKW}$

Kraft:  $\vec{F} = m\vec{g}$



später: Bezugssystem fest



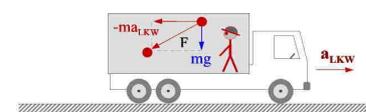
2) Bezugssystem beschleunigter LKW (Nicht-Inertialsystem)

Beobachter sieht Ball nach links unten fallen

Kraft:  $\vec{F} = -m\vec{a}_{LKW} + m\vec{g}$

Scheinkraft:  $-m\vec{a}_{LKW}$  (Trägheitskraft)

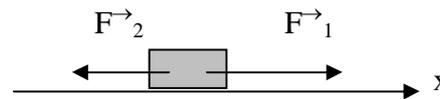
später: Bezugssystem beschleunigt



**Bsp.** Puck auf Eisfläche

Puck hat Masse vom  $m = 0,20 \text{ kg}$

$F^{\rightarrow}_2 = 2\text{N}$ ,  $F^{\rightarrow}_1 = 5\text{N}$ , je parallel zur x-Richtung



Frage Beschleunigung in x-Richtung?

Lsg.  $F^{\rightarrow} = m a^{\rightarrow}$   $F^{\rightarrow} = F^{\rightarrow}_1 + F^{\rightarrow}_2 = 3\text{N}$

$a^{\rightarrow} = F^{\rightarrow} / m = 3\text{N} / 0,20\text{kg} = 15 \text{ m/s}^2$  Einheiten:  $\text{N} = \text{kg m/s}^2$

=> nur solange die Kraft wirkt, beschleunigt der Puck,

hört die Kraft auf zu wirken, bewegt er sich mit der konst. Endgeschw. weiter.

### 5.4 Gravitationskraft

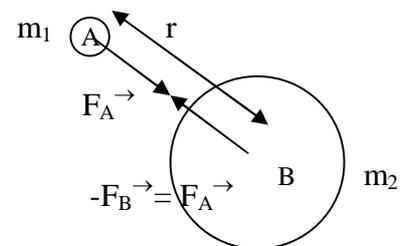
Die Gravitationskraft auf den Körper A wird durch die Masse eines zweiten Körpers B (Erde) erzeugt, der den ersten zu sich hin zieht. Massen ziehen sich an.

Gravitationsgesetz  $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$

$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 / (\text{kg s}^2)$

in Erdnähe:  $g = G \frac{m_{Erde}}{r_{Erde}^2} = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$\underline{\underline{F^{\rightarrow} = m g^{\rightarrow}}}$  (Vorzeichen je nach Koordinatensystem)

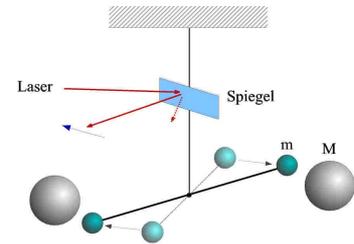


Abstandsmessungen: Die Körper wirken, als wären die Massen im Zentrum konzentriert

=> Abstandsmessungen  $r$  zwischen den Zentren

Gravitationskraft wirkt immer, auch wenn Körper in Ruhe ist

**Exp.** Gravitationswaage



## Gewicht $W$

Gewicht eines Körpers entspricht der Kraft, die ich aufwenden muß, um den Körper am freien Fall zu hindern.

Bsp. Ball übt Kraft von 2 N nach unten aus

Ich übe Kraft von 2 N nach oben aus => Ball ruht

=> Ball wiegt 2N, ist 2N schwer

ein anderer Ball übt 3N aus, => dieser Ball ist schwerer

Gewicht  $W$  eines Körpers ist der Betrag der Gravitationskraft, die auf den Körper wirkt:

$$\underline{W = mg}$$

Beachte: i) Gewicht ist nicht gleich Masse, ist keine intrinsische Eigenschaft

Bsp. auf Erde:  $m = 1\text{kg}$ , => Gewicht  $W_E = 1\text{kg} \cdot 9,81\text{m/s}^2 = 9,81\text{ N}$

auf Mond:  $m = 1\text{kg}$ , =>  $W_M = 1\text{kg} \cdot 1,7\text{m/s}^2 = 1,7\text{ N}$

ii) Gewicht darf man nur messen, wenn keine zusätzliche Beschleunigung auf den Körper senkrecht zum Erdboden wirkt, z.B. Personenwaage benutzen im Zimmer, Zug, aber nicht im Fahrstuhl.

**Exp:** Körper (Masse  $m$ ) hängt am Faden, gleicher Faden hängt am Körper nach unten

i) langsam ziehen am unteren Faden mit  $F_z$

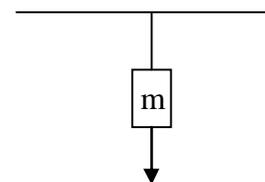
=> reißt oberhalb des Körpers  $F = mg + F_z$

ii) schnell ziehen am unteren Faden

=> reißt unterhalb des Körpers

Trägheit des Körpers trennt oben / unten oben wirkt  $mg$

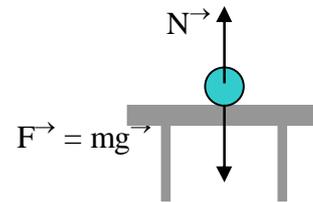
Unten wirkt  $F_z > mg$



### 5.5.1 Normalkraft N

Wenn ein Körper nach unten gegen eine Oberfläche drückt, so verformt sich diese und wirkt auf den Körper mit der Normalkraft N entgegen.

$$N = mg$$



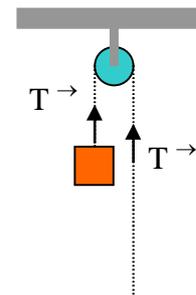
### 5.5.2 Zugspannung T

Wenn eine Kraft  $F \rightarrow$  über eine Schnur auf einen Körper übertragen wird, dann wirkt eine Zugspannung  $T \rightarrow$  auf die Schnur

Ideale Schur: masselos

dehnt sich nicht

ist nur eine Verbindung zum Körper



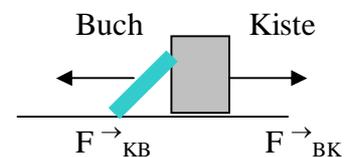
### 5.6 Drittes newtonsches Gesetz (actio = reactio)

Wenn zwei Körper miteinander wechselwirken, dann besitzen die Kräfte, welche die Körper aufeinander ausüben, denselben Betrag aber entgegengesetzte Richtung.

Kraft Buch => Kiste  $F \rightarrow_{BK}$

Kraft Kiste => Buch  $F \rightarrow_{KB}$

Gilt:  $F \rightarrow_{BK} = - F \rightarrow_{KB}$



Kräfte bilden ein Kraft – Gegenkraft – Paar

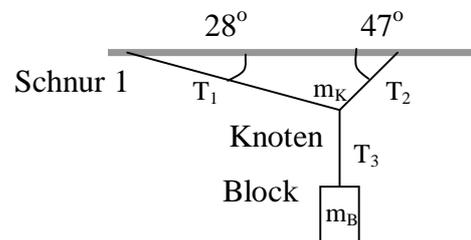
### Exp. Kräfte auf hängenden Block Mit Federn aufbauen

Block  $m_B = 15 \text{ kg}$

Knoten  $m_K = 0 \text{ kg}$

Frage: Zugspannung T in den Seilen ?

Lsg: i)



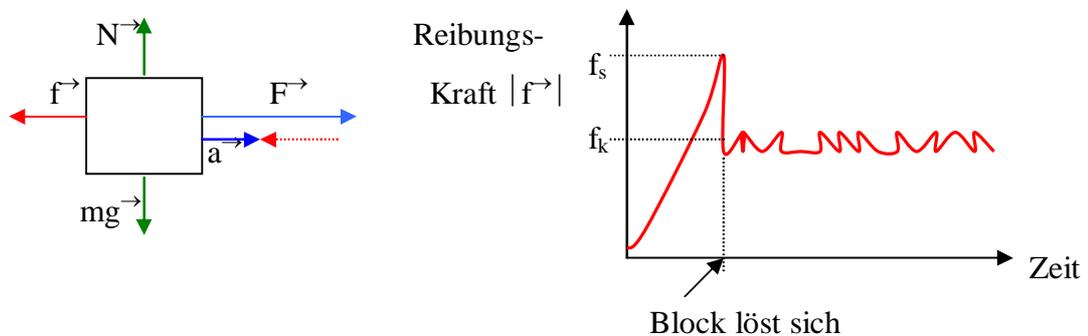
Lsg. ii)

## 5.7 Reibung

Reibung ist unvermeidbar, aber auch unverzichtbar. Ein Auto verbraucht ca. 20% des Benzin`s um Reibung zu überwinden, aber ohne Reibung würden die Räder durchdrehen, man könnte sich nicht fortbewegen, so wie auf dem Eis.

**Exp.** Block liegt auf einer horizontalen Tischplatte und wird mit von 0 ansteigender Kraft in x-Richtung gezogen. Federkraftmesser zeigt wirkende Kraft.

Trage Kraft über der Zeit auf.



### 5.7.1 Eigenschaften der Reibung

#### 1) Haftreibung

bewegt sich der Körper bei Kraftanwendung (horizontal) nicht, so heben sich Haftreibung  $f^{\rightarrow}_s$  und die parallel zur Oberfläche wirkende Kraft  $F^{\rightarrow}_x$  auf, d.h.

$$\vec{f}_S = -\vec{F}_x$$

2) Der Maximalbetrag von  $\vec{f}_S = -\vec{F}_x$  beträgt

$$f_{S\max} = \mu_S N \quad \mu_S: \text{statischer Haftreibungskoeffizient}$$

N: Normalkraft

- Mikroskopische Berührungsfläche ca.  $10^{-4}$  der totalen Fläche
- Haftreibung durch Kaltverschweißung der sich berührenden Flächenteile und Verhakung
- Problem bei bewegendenden Teilen im Vakuum, da Luft als Schmiermittel fehlt

### 3) Gleitreibung

Beginnt der Körper zu gleiten, so verringert sich die Reibungskraft auf den Wert

$$f_k = \mu_k N \quad \mu_k: \text{kinetischer Reibungskoeffizient}$$

$$\mu_k < \mu_S$$

#### Beachte:

- die Normalkraft N stellt ein Maß für den Andruck des Körpers auf die Fläche dar.
- $\vec{f}$  immer parallel zur Oberfläche und  $\vec{N}$  immer senkrecht zur Oberfläche
- Koeffizienten  $\mu$  sind dimensionslos, gelten zwischen 2 Flächen
- z.B.  $\mu_S$ : zwischen Ei & Teflonpfanne = 0.04, zwischen Bergschuh & Fels = 1,2

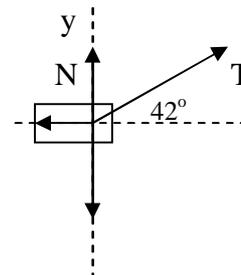
**Bsp.** ABS-System Bremsweg kürzer, da  $f_s > f_k$

#### Bsp.

Ein Kind zieht einen mit der Masse  $m = 75 \text{ kg}$  beladenen Schlitten mit konstanter Geschwindigkeit über horizontale Eisfläche. Gleitreibungskoeffizient zwischen Kufen & Eis  $\mu_k = 0,10$ , Seil im Winkel von  $42^\circ$ .

Frage Kraft (Zugspannung) des Seils auf Schlitten?

Lsg.



Frage Zugspannung wird über 91 N vergrößert. Wie verhält sich der Betrag von  $f_k^{\rightarrow}$ ?

Lsg

### 5.7.3 Strömungswiderstand $D$

Bewegt sich ein Körper in einem Fluid (Gas, Flüssigkeit) so erfährt er einen Strömungswiderstand  $D$ , d.h. eine Kraft  $D$ , die gegen die Körperbewegung gerichtet ist.

Hier nur: - Luft als Fluid,  
- gedrungene Körper, die Wirbel hinter sich erzeugen, (z.B. Ball, nicht Speer)

$$\underline{D = \frac{1}{2} C_D \rho A v^2} \quad \text{Widerstandskraft}$$

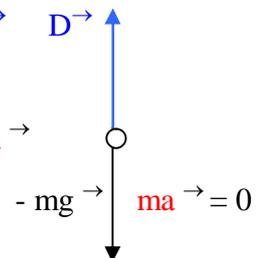
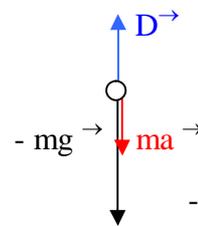
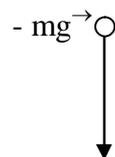
$C_D$ : Widerstandskoeffizient, hängt selbst von  $v$  ab, hier aber vernachlässigt

$\rho$ : Dichte der Luft

$A$ : effektive Querschnittsfläche des Körpers senkrecht zu  $v^{\rightarrow}$

Fällt ein Körper durch Luft nach unten, so gilt:

$$D - mg = ma$$



Fallzeitzeit:  $0 = 0s$

$0 < t < t_{\text{end}}$

$t = t_{\text{end}}$

Kraft:  $ma = -mg$

$ma = -mg + D$

$ma = 0$

Endgeschwindigkeit ist konstant wenn

$$t \geq t_{\text{end}} \Rightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} C_{\rho} A v^2 - mg = 0$$

$$\Rightarrow \underline{v_{\text{end}} = (2mg/C_{\rho}A)^{1/2}}$$

### Katze:

Wenn eine Katze vom Balkon fällt, dann dimmt die Wahrscheinlichkeit zu überleben mit wachsender Fallhöhe zu, wenn sie mehr als  $\sim 7$  Stockwerke tief fällt. Was passiert?

a) Katze fällt und spührt Beschleunigung  $\Rightarrow$  spührt Kraft

$\Rightarrow$  Zieht Kopf und Pfoten ein  $\Rightarrow$  leider wird Fläche  $A$  klein

$\Rightarrow$  Strömungswiderstand sinkt, ungünstig

b) erreicht die Katze  $v_{\text{end}}$   $\Rightarrow$  Beschleunigung  $a = 0$   $\Rightarrow$  Kraft = 0

$\Rightarrow$  Katze entspannt sich, streckt sich  $\Rightarrow$  vergrößert ihre Fläche

$\Rightarrow v_{\text{end}}$  wird kleiner

$\Rightarrow$  bereitet sich auf Landung vor (W.O. Withney, in J. Americ. Veterinary, 1987)

## 5.8 Gleichförmige Kreisbewegung

bedeutet: a) Bahn des Teilchens ist ein Kreis

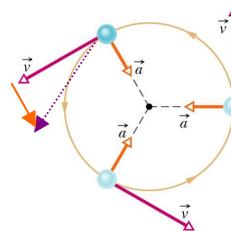
b) Betrag der Geschwindigkeit  $|\vec{v}|$  ist konstant

c) Richtung von  $\vec{v}$  zeigt immer tangential zur Kreisbahn

### 5.8.1 Zentripetalbeschleunigung

(1)  $|\vec{a}| = a = v^2 / r, \quad r = \text{Radius}$

(2)  $\vec{a}$  zeigt immer auf Kreismittelpunkt



$$T = 2\pi r / v$$

$T = \text{Umlaufdauer} = \text{Periode der Bewegung}$

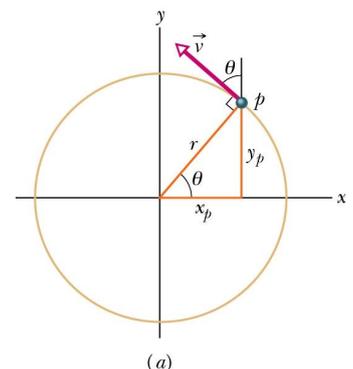
### Beweis von (1)

Punkt P bewegt sich mit  $|\vec{v}| = \text{konst}$  auf Kreisbahn mit Radius  $r$

Ort  $\vec{r} = r_x \vec{e}_x + r_y \vec{e}_y$

$$r_x = r \cos \theta$$

$$r_y = r \sin \theta$$



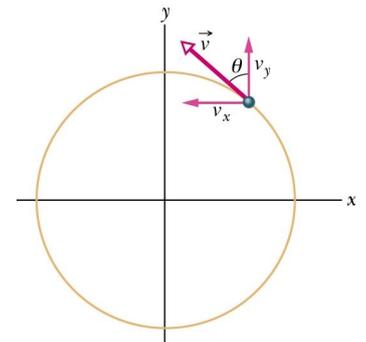
**Geschwindig.**  $\vec{v}$  läuft parallel zur Bahntangente, also

$\vec{v}$  senkrecht auf  $\vec{r}$

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y$$

$$= (-v \sin\theta) \vec{e}_x + (v \cos\theta) \vec{e}_y, \quad \text{sin, cos ersetzen}$$

$$= -v \frac{r_y}{r} \vec{e}_x + v \frac{r_x}{r} \vec{e}_y$$



(b)

**Beschleun.**  $\vec{a} = d\vec{v}/dt$  mit  $|\vec{v}| = v = \text{konst.}$ ,  $|\vec{r}| = r = \text{konst.}$

$$\Rightarrow \vec{a} = -\frac{v}{r} \frac{dr_y}{dt} \vec{e}_x + \frac{v}{r} \frac{dr_x}{dt} \vec{e}_y$$

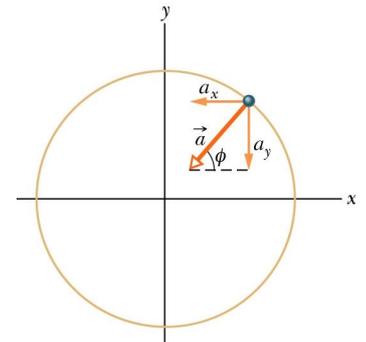
gilt  $dr_x/dt = v_x = -v \sin\theta$ ,  $dr_y/dt = v_y = v \cos\theta$ ,

$$\Rightarrow \vec{a} = -\frac{v^2}{r} \cos\theta \vec{e}_x - \frac{v^2}{r} \sin\theta \vec{e}_y$$

mit  $a_x = -\frac{v^2}{r} \cos\theta$ ,  $a_y = -\frac{v^2}{r} \sin\theta$

$$\Rightarrow |\vec{a}| = a = [a_x^2 + a_y^2]^{1/2} = v^2/r [(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2]^{1/2}$$

$$= v^2/r \quad \text{q.e.d.} \quad (\text{mit } (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1)$$



(c)

**Beweis von (2)**  $\vec{r}$  parallel  $\vec{a}$ :

$$\tan\phi = a_y/a_x = [(-v^2/r) \sin\theta]/[(-v^2/r) \cos\theta] = \tan\theta \Rightarrow \phi = \theta$$

### 5.8.2 Zentripetalkraft

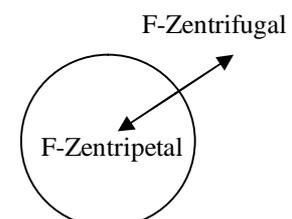
Eine Zentripetalkraft beschleunigt einen Körper auf eine Kreisbahn, indem sie nur die Richtung seiner Geschwindigkeit, nicht aber den Betrag ändert.

$$\underline{F = mv^2/r}$$

Betrag der Zentripetalkraft

### 5.8.3 Zentrifugalkraft:

Ist eine Trägheitskraft (Fliehkraft), resultiert aus drittem Newton'schen Gesetz actio = reactio und ist der Zentripetalkraft entgegengesetzt.



**Bsp.** Auto fährt durch Kurve:

Zentripetalkraft: Reibung zwischen Reifen und Straße zwingt das Auto auf die Kreisbahn

Zentrifugalkraft: Fahrer rutscht zur Seite (Trägheit), weil Reibung zwischen Sitz / Fahrer für notwendige Zentripetalkraft zu gering => rutscht bis an Autowand

Zentripetalkraft: Wand drückt auf Fahrer, zwingt ihn auf den Kreis

**Exp.** a) Fliehkraftregler, b) Erdabplattung

c) fliegende Kugeln in rotierender Schiene, Kugelhöhe ist unabh. von der Masse

**Zusammenfassung:** Prüfungstrainer Kapitel 1.1, Fragen 1.1.1 – 1.1.15

## 6 Arbeit & Energie

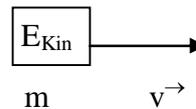
Die Newton'schen Gesetze ermöglichen uns die Analyse beliebiger Bewegungen. Oft ist die Analyse aber kompliziert und man kennt nicht alle Details der Bewegung, z.B. Berg-Talfahrt. Eine effektive Technik ist die Betrachtung der Energie dieses Systems. Sie läßt sich auf chemische oder biologische Funktionen ausdehnen.

### 6.1 Kinetische Energie

Ein Objekt der Masse  $m$  und Geschwindigkeit  $v$  besitzt die kinetische Energie  $K$

$$\underline{E_{\text{Kin}} = \frac{1}{2} m v^2}$$

$$[E_{\text{Kin}}] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2 = \text{J, Joule}$$



- skalare Eigenschaft eines bewegten Körpers

### 6.2 Arbeit $W$

wenn eine Kraft auf das Objekt wirkt, so dass es beschleunigt (gebremst) wird, so verändert sich seine kinetische Energie. Die Kraft hat dann Arbeit an diesem Objekt verrichtet.

„Arbeit  $W$  ist Energie, die eine auf ein Objekt wirkende Kraft diesem Objekt zuführt. „

- Arbeit ist übertragene Energie
- skalare Größe wie die Energie
- Einheit  $[W] = [E_{\text{Kin}}] = \text{Joule}$

**Beachte:** i) Energie wird zu / abgeführt: kein materieller Fluß!

ii) alltäglicher Arbeitsbegriff beinhaltet dagegen jede Form der körperlichen Anstrengung, ist aber meist nicht Arbeit im physikalischen Sinn.

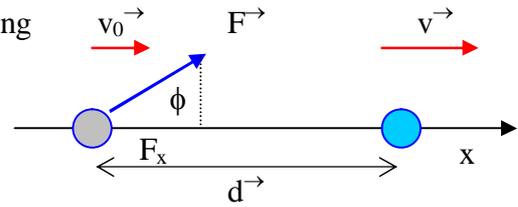
Bsp. drücken gegen eine Hauswand kostet Arbeit, man wird müde, aber es wird keine Energie ( $E_{\text{kin}}$ ) auf die Wand übertragen, da sie sich nicht verschiebt => phys. keine Arbeit.

### 6.3 Arbeit & kinetische Energie

Perle gleitet reibungsfrei über einen Draht

Konstante Kraft beschleunigt die Perle entlang x-Richtung

$$F_x = ma_x$$



von Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  nach  $v$  über Strecke  $d$

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x d \quad (\text{mit Gl. 3})$$

$$\Rightarrow a = (v^2 - v_0^2) / 2d$$

$$\Rightarrow F_x = m(v^2 - v_0^2) / 2d$$

$$\Rightarrow F_x d = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

$\uparrow$                      $\uparrow$                      $\uparrow$   
 Endenergie                    Anfangsenergie  
 Energietransfer,  
 durch Kraft  
 verursacht

$$W = F \cos \phi d$$

$$\underline{W = \vec{F} \cdot \vec{d}} \quad (\text{Skalarprodukt})$$

Arbeit  $W$  berechnet sich nur aus der Kraft entlang des Weges der Verschiebung  $d$ .

Kraft senkrecht zur Verschiebung verrichtet keine Arbeit.

Einschränkung für Gültigkeit von  $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ :

- i) konstante Kraft (Richtung, & Betrag)
- ii) Objekt = Teilchen  $\Rightarrow$  starr Verbindung, keine inneren Kräfte

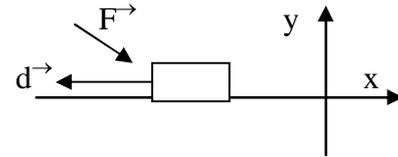
Vorzeichen:

- i)  $W > 0$  wenn  $\vec{F}$  Komponente in Richtung der Verschiebung  $\vec{d}$  besitzt  
Objekt gewinnt Energie
- ii)  $W < 0$  wenn  $\vec{F}$  Komponente entgegen der Verschiebung  $\vec{d}$  besitzt  
Objekt gibt Energie ab
- iii)  $W = 0$  wenn  $\vec{F}$  senkrecht auf  $\vec{d}$

**Bsp.** Auto rollt über Straße, Motor ist aus

Wind bläst mit konstanter Kraft

$$\vec{F} = 2\text{N } \vec{e}_x - 6\text{N } \vec{e}_y \text{ dagegen}$$



Frage Arbeit des Windes am Auto auf der Strecke  $\vec{d} = -3\text{m } \vec{e}_x$

Lsg.

### 6.4 Arbeit durch Gravitationskraft

Tomate wird mit  $v_0$  nach oben geworfen

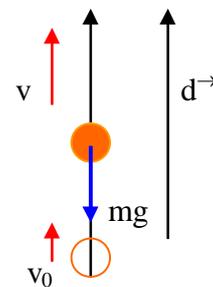
$$\Rightarrow E_{\text{Kin-0}} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Gravitation bremst auf der Strecke (Verschiebung)  $\vec{d}$  ab

$$\Rightarrow W = m\vec{g} \cdot \vec{d}$$

$$= mg d \cos\phi$$

von Gravitation verrichtete Arbeit



Aufwärts:  $\phi = 180^\circ \Rightarrow W = mgd(-1) \Rightarrow W < 0$  : Energie der Tomate wird abgeführt

Tomate wird langsamer

Abwärts:  $\phi = 0^\circ \Rightarrow W = mgd(1) \Rightarrow W > 0$  : Energie wird der Tomate zugeführt

Tomate wird schneller

**Bsp:** zwei identische Bälle werden über unterschiedliche Rampen auf gleiche Höhe gezogen.

Frage Bei welcher Rampe wird mehr Arbeit verrichtet?



Lsg.

## 6.5 Arbeit durch veränderliche Kräfte / Integrale

bisher: Kraft  $F(x) = \text{konstant}$  über dem Weg  $x$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{x} = Fd, \quad \text{mit } \vec{F} \text{ parallel } \vec{x}$$

Interpretation: Fläche unter Kurve  $F(x)$



neu: Kraft-Betrag  $|F(x)|$  ändert sich mit dem Ort  
aber Richtung konstant,  $F$  zeitlich konstant

## 6.6 Integrale / Flächenberechnung

Veranschaulicht wird die Integralrechnung an dem einfachen Problem der Streckenbestimmung. Gesucht wird die insgesamt zurückgelegte Strecke in der Fahrzeit  $t$ , wobei sich die Geschwindigkeit  $v(t)$  ändern kann.

Fall a)  $v(t) = \text{konstant}$

$$x = v(t - t_0) = vt$$

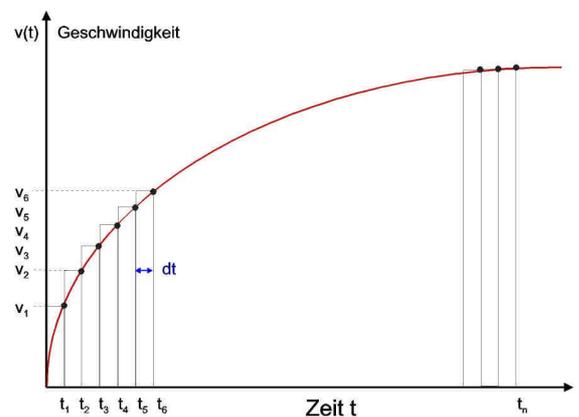
Interpretation: Strecke = Fläche unter Kurve

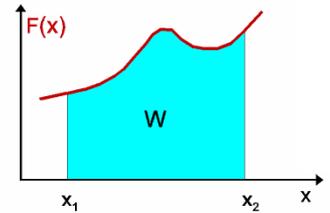
Skizze wie oben

Fall b)  $v(t)$  ändert sich mit der Zeit

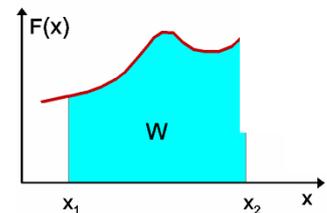
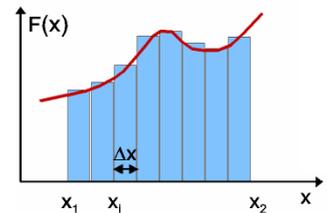
Idee: Gesamtfläche in kleine Säulen teilen  
und danach aufaddieren

$$\begin{aligned} x &= v_1 dt + v_2 dt + v_3 dt + v_4 dt + \dots + v_n dt \\ &= v(t_1)dt + v(t_2)dt + v(t_3)dt + \dots + v(t_n)dt \\ &= \sum_0^t v(t)dt \quad \text{mit Endzeit } t_n = t, \text{ Startzeit } t = 0 \\ &= \int_0^t v(t)dt \quad \text{wenn } \lim dt \Rightarrow 0 \end{aligned}$$



**Bestimmung von Integralen generell**bekannt  $g(x)$ gesucht Integral  $G(x) = \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx$ 

Vorgehen:

1. suche Stammfunktion  $G(x)$  so dass Ableitung  $dG(x)/dx = g(x)$ Ergebnis allgemein  $G(x) + c$   $c = \text{Konstante}$ denn  $dG(x)/dx = g(x) + 0$ 2. bestimmtes Integral  $\int_{x_1}^{x_2} g(x) dx = G(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = G(x_2) - G(x_1)$ Deutung: Fläche unter der Kurve  $g(x)$  im Bereich von  $x_1$  bis  $x_2$ **Typische Integrale / Stammfunktionen**

Suche eine Funktion, deren Ableitung die Funktion unter dem Integral ergibt

$$\int dx = x + c \quad c = \text{konstant wird zur Stammfunktion addiert}$$

$$\int a u(x) dx = a \int u(x) dx \quad \text{konst. Faktor herausziehen}$$

$$\int [u(x) + v(x)] dx = \int u(x) dx + \int v(x) dx \quad \text{Summen getrennt integrieren}$$

$$\int x^m dx = (x^{m+1})/(m+1) \quad m \neq -1$$

$$\int 1/x dx = \ln |x| \quad \text{Logarithmus}$$

$$\int e^x dx = e^x$$

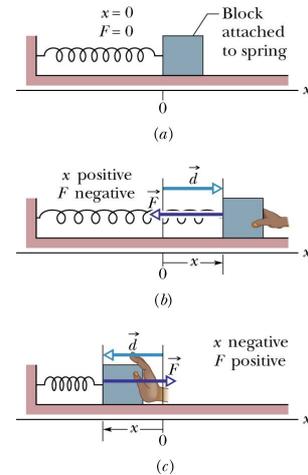
$$\int \sin x dx = -\cos x, \quad \int \cos x dx = \sin x$$

### 6.7 Federkraft

Dehnt man eine Feder aus oder komprimiert sie, so wirkt eine entgegengesetzte Kraft mit

$$\underline{F \vec{=} -kx \vec{}} \quad \text{Hook'sches Gesetz}$$

$k = \text{Federkonstante}$



**Exp.** 1) Block an Feder, ziehen / stauchen

### Arbeit durch Federkraft

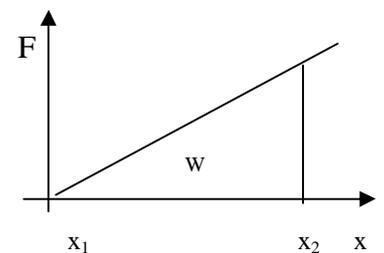
- Exp.** i) Wagen wird an Feder befestigt und erhält Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$
  - ii) Feder greift bei  $x_1$  am Wagen an und bremst ab auf  $v = 0$  bei  $x_2$
- => Feder verrichtet Arbeit am Wagen, entzieht ihm kinetische Energie

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F \vec{\cdot} dx \vec{\phantom{x}} \quad (\text{man z\u00e4hlt nur Kraftkomponente parallel zu } x)$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} (-kx) dx = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = -\frac{1}{2} kx^2 \Big|_{x_1}^{x_2} = -\frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2)$$

generell

$$\underline{E_{\text{Feder}} = \frac{1}{2} kx^2} \quad \text{Federenergie}$$



## 6.8 Arbeit & kinetische Energie

Kraftwirkung startet bei: Ort  $x_1$ , Geschw.  $v_1$

endet bei:  $x_2$ ,  $v_2$

auf der Strecke geleistete Arbeit:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} ma(x) dx \quad \text{mit 2. Newton'schen Gesetz}$$

$$ma(x) dx = m(dv(x)/dt) dx \quad \text{Definition der Beschleunigung}$$

mit  $dv(x)/dt = (dv/dx)(dx/dt) = (dv/dx)v$  Kettenregel, innere mal äußere Ableitung

$$\Rightarrow ma(x) dx = m(dv/dx)v dx \\ = m v dv$$

$$\Rightarrow W = \int_{v_1}^{v_2} m v dv = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{1}{2} m v^2 \Big|_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2), \quad \text{Grenzen x zu v}$$

$$\Rightarrow W = E_{\text{kin-2}} - E_{\text{kin-1}}$$

$\Rightarrow$  Die am Körper wirkende Kraft ändert dessen kinetische Energie.

$$\underline{\underline{E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2}} \quad \text{kinetische Energie}$$

## 6.9 Leistung P

Ein Bauunternehmer möchte Dachziegel vom LKW auf das Dach eines Hauses befördern.

Dazu benutzt er eine Seilwinde, welche die nötige Kraft zum Heben der Ziegel aufbringt. Wir können die Arbeit der Seilwinde bestimmen. Wichtiger für den Unternehmer ist aber die Rate, also Arbeit pro Zeit, d.h. ob er 5 min. oder 5 Tage benötigt.

$$P = \Delta W / \Delta t \quad \text{durchschnittliche Leistung = Arbeit pro Zeit}$$

$$\underline{P = dW/dt} \quad \text{momentane Leistung}$$

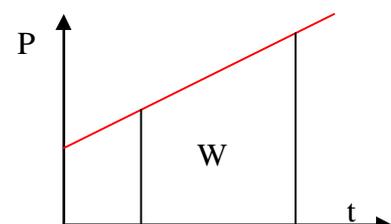
$$[P] = \text{J/s} = \text{W} \quad \text{Watt (James Watt)}$$

$$1 \text{ PS} = 735 \text{ W} \quad \text{Pferdestärken}$$

Interpretation:

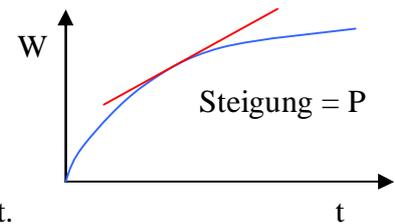
$$\Delta W = P \Delta t \quad \text{Arbeit = Leistung x Zeit}$$

$$1 \text{ Kilowattstunde} = 1 \text{ kW} \times \text{h} \\ = 1000 \text{ W} \times 3600 \text{ s} \\ = 3,60 \text{ MJ} \quad (\text{Mega-Joule})$$



Interpretation:

Leistung = Ableitung der Arbeit nach der Zeit



Leistung ist die Rate, mit der die angelegte Kraft Arbeit verrichtet.

## Leistung & Kraft

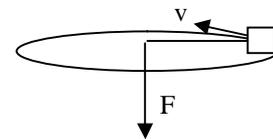
$$P = dW/dt = (F \cos\theta dx)/dt \\ = F \cos\theta v$$

$$\Rightarrow \underline{P = \vec{F} \cdot \vec{v}} \quad (\text{Skalarprodukt})$$

**Bsp:** ein Klotz ist am Seil befestigt und bewegt sich in gleichförmiger Kreisbewegung um das Zentrum.

Frage Wie groß ist die von der Kraft bewirkte Leistung auf den Klotz?

Lsg



## 7. Energie-Erhaltung

### 7.1 Potenzielle Energie U

Ziel: Energieerhaltungssatz, d.h. die Umwandlung der Energie eines Systems in unterschiedlichen Formen

System: Teilchen bewegt sich im Kraftfeld von  $x_1$  nach  $x_2$

Wenn Kraft  $\vec{F}(x)$  a) zeitlich konstant,

b) konservativ, d.h. Arbeit unabhängig vom gewählten Weg (Details später)

dann  $\Rightarrow$  Arbeit hängt nur von Anfangs und Endpunkt ab

$\Rightarrow$  Definition einer potenziellen Energie  $U(x)$  ist möglich

$\Rightarrow$  Arbeit  $W = \Delta U$  Änderung der potenziellen Energie des Systems

$$W = \Delta U = U(x_2) - U(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}(x) \cdot d\vec{x}$$

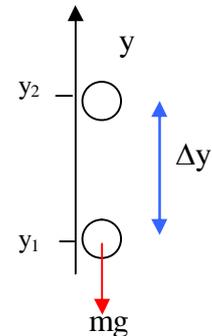
### 7.1.1 Potenzielle Energie der Gravitation

System: Ball – Erde: Gravitation verrichtet Arbeit am Ball auf dem vertikalen Weg  $y_1 \Rightarrow y_2$ ,

Die potenzielle Energie ändert sich um:

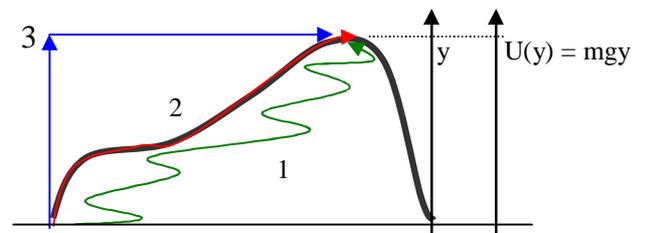
$$\Delta U = \int_{y_1}^{y_2} mg \, dy = mg \int_{y_1}^{y_2} dy = mg(y_2 - y_1) = mg \Delta y$$

$$\underline{U(y) = mg y} \quad \text{Referenzpunkt } y_1 = 0, y_2 = y$$



Die potenzielle Energie  $U(y)$  des Systems Teilchen – Erde hängt nur von der vertikalen Position (Höhe  $y$ ) des Teilchens relativ zum Referenzpunkt  $y_1 = 0$  ab, nicht von der horizontalen Position.

$\Rightarrow$  Arbeit unabhängig vom Weg



### 7.1.2 Elastische potenzielle Energie

Ziehen oder Stauchen einer idealen Feder ändert ihre elastische potenzielle Energie um:

$$\Delta U = \int_{x_1}^{x_2} -kx \, dx = -\frac{1}{2} k(x_2^2 - x_1^2)$$

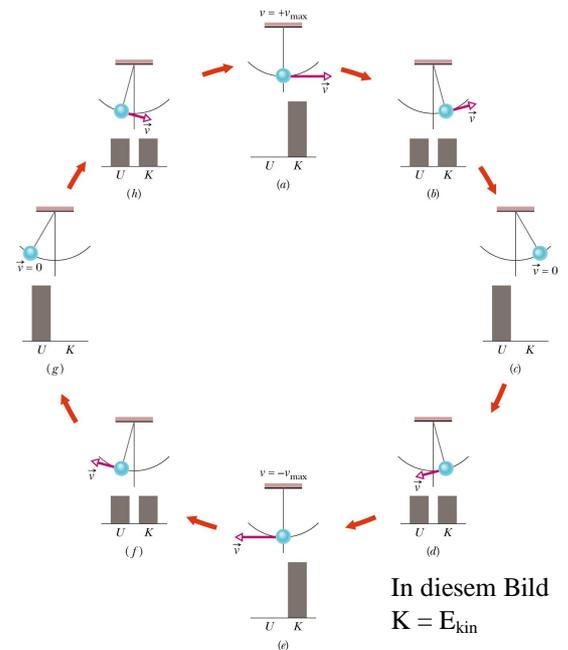
$$\underline{U(x) = \frac{1}{2} kx^2} \quad \text{Referenzpunkt: Feder entspannt bei } x_1 = 0$$

### 7.2.1 Energieerhaltung am Pendel

- Exp.**
- 1) großes Pendel: Experimentator sitzt auf einem Stuhl, zieht das Pendel bis vor die Nase, lässt es los, bewegt sich nicht und vertraut auf den Energieerhaltungssatz
  - 2) kleines Pendel schwingt über Stop hinaus

**Energieumwandlung**

oben:	$E_{\text{kin}} = 0, U = \text{max}$ Gravitationskraft beschleunigt
Weg nach unten:	$E_{\text{kin}}$ wächst, $U$ nimmt ab
unten:	$E_{\text{kin}} = \text{maximal}, U = 0$
Weg nach oben:	$E_{\text{kin}}$ nimmt ab, $U$ nimmt zu, Gravitationskraft bremst ab
Oben:	$E_{\text{kin}} = 0, U = \text{max}$

**7.2.2 Energie-Erhaltungssatz**

Wenn gilt: 1) System ist abgeschlossen

2) Umwandlung der Energieformen durch konservative Kräfte (s.u.)

dann ist die mechanische Energie eines Systems eine Erhaltungsgröße. Sie ergibt sich aus kinetischer und potenzieller Energie:

$$\underline{E_{\text{mech}} = E_{\text{kin}} + U = \text{konstant}}$$

Also  $E_{\text{mech-1}} = E_{\text{kin-1}} + U_1,$

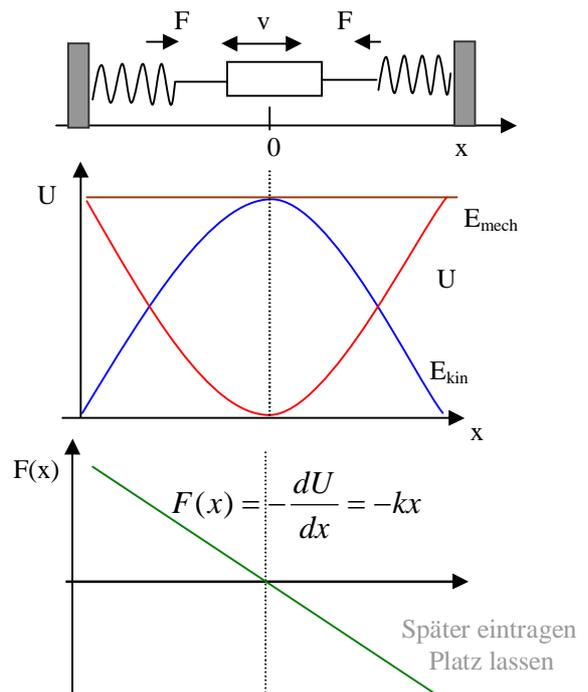
$$E_{\text{mech-2}} = E_{\text{kin-2}} + U_2$$

$$\Rightarrow \Delta E_{\text{mech}} = \Delta E_{\text{kin}} + \Delta U = 0$$

Ist die mechanische Energie eine Erhaltungsgröße, so kann man  $E_{\text{kin}}$  &  $U$  zu allen Zeiten miteinander verbinden, ohne die dazwischenliegende Bewegung u. Kräfte zu berücksichtigen.

### 7.2.3. Energieerhaltung bei Federkräften

**Exp.** Luftkissenbahn, Wagen zwischen zwei Federn gespannt, schwingt um die Nullposition



Potenzielle Energie  $U = \frac{1}{2} kx^2$

Kinetische Energie  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} mv^2$

Gesamtenergie  $E_{\text{mech}} = E_{\text{kin}} + U = \text{konstant}$

## 7.3 Konservative Kräfte

Wann kann man potenzielle Energie definieren? Geht das für alle Kräfte?

### 7.3.1 Reversibilität

Bewirken konservative (erhaltende) Kräfte die Energieumwandlung in einem System, so sind die Energieumwandlungsprozesse reversibel (umkehrbar).

Konservativ: Gravitationskraft, Federkraft, elektrostatische Kraft

Nicht-Konservative: Reibung, Strömungswiderstand

Bsp. Auto bremst:  $E_{\text{kin}} \Rightarrow E_{\text{reib}} \Rightarrow \text{Straße erwärmt}$

$\nleftrightarrow$  Straße erwärmen  $\nRightarrow E_{\text{reib}} \nRightarrow$  Auto beginnt zu fahren

### 7.3.2 Wegunabhängigkeit

„Die Arbeit, die eine konservative Kraft an einem Teilchen verrichtet, hängt nicht vom Weg ab, den das Teilchen dabei nimmt.“

$\Rightarrow$  Test, ob Kraft konservativ: Die von einer konservativen Kraft an einem Teilchen bewirkte Arbeit entlang eines geschlossenen Weges ist Null.

Siehe Bsp. 7.1.1 Wanderung über den Berg von  $x_1 \Rightarrow x_2 \Rightarrow x_1$  kostet Arbeit  $W = 0$

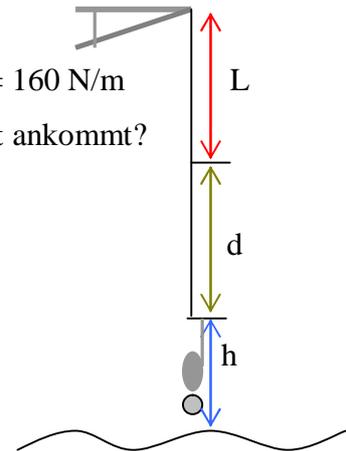
Lösungsstrategie zur Energieerhaltung:

- welche Objekte gehören zum System ?
- wirken konservative Kräfte, d.h. gibt es Reibung, Strömungswiderstand ?
- ist das System abgeschlossen?
- was sind Anfangs- und Endzustand des Systems ?
- was ist der Referenzpunkt der potenziellen Energie?

**Bsp. Bunjeespringerin**,  $m = 61 \text{ kg}$ , Höhe über Fluß  $45 \text{ m}$

Seil  $L = 25 \text{ m}$  (entspannt), erfüllt Hook'sches Gesetz mit  $k = 160 \text{ N/m}$

Frage: Abstand ihrer Füße vom Wasser, wenn sie am tiefsten Punkt ankommt?



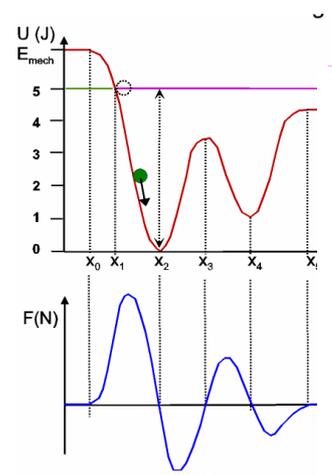
## 7.4 Graphische Darstellung U

Ein Großteil der Information über den Prozeßablauf steckt in  $U(x)$ :

Wirkende Kraft:  $\Delta U(x) = -W = -F(x)\Delta x$   
 $\Rightarrow \underline{F(x) = -dU/dx}$  (Minuszeichen beachten)

Bsp. Federkraft:  $F(x) = -d(\frac{1}{2} kx^2)/dx = -kx$

Gravitation:  $F(x) = -d(mgx)/dx = -mg$



## 7.5 Energieerhaltung & abgeschlossene Systeme

„Die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems kann sich nicht verändern.“

Gesamtenergie:  $E_{\text{mech}} = E_{\text{kin}} + U_{\text{elas}} + U_{\text{grav}} + E_{\text{therm}} + E_{\text{int}}$

**$E_{\text{therm}}$**  thermische Energie, entsteht z.B. durch Reibung. Klotz wird mit Kraft  $F$  von  $x_1$  nach  $x_2$  gezogen:

$$E_{\text{mech}} = \int (ma + f) dx = \frac{1}{2} mv^2 + f(x_2 - x_1), \quad f = \text{Reibungskraft}$$

**$E_{\text{int}}$**  Die interne Energie eines Systems ist z.B. chemische Energie in Form molekularer Bindungen oder die Kernenergie (Massenenergie  $E = mc^2$ ).

### Feynmanns Beispiel

Willi besitzt 30 Bauklötze, die absolut unverwüstlich und nicht zerteilbar sind. Er spielt tagsüber mit ihnen.

Abends zählt die Mutter nach und entdeckt ein Gesetz:

egal was Willi mit den Klötzen macht – es bleiben immer 30 Stück!

Eines Tages sind es nur noch 29 Stück

Aber nach langer Suche findet sie es unter dem Teppich

Eines Tages sind es 32 Stück – helle Aufregung

Aber Willis Freund war zu Besuch und hat 2 Klötze vergessen

Eines Tages sind es nur 25 Klötze

Mutter vermutet 5 Klötze in einer Holzkiste, darf sie aber nicht öffnen da Willi bockt

Sie weiß: 1 Klotz = 85g, leere Holzkiste = 500g

Dann macht sie eine erstaunliche Entdeckung:

Zahl sichtbarer Klötze + (Kistengewicht – 500g)/85 = konstant

1) Energie: vergessen wir die Klötze, dann berechnen wir abstrakte Dinge.

2) Erhaltung: man muß immer darauf achten ob etwas verschwindet, dazu kommt oder versteckt wird.

Beachte: wir wissen in der Physik nicht was eigentlich Energie ist. Wir wissen aber, dass es eine Größe gibt, die sich nicht ändert.

**Zusammenfassung:** Prüfungstrainer Kapitel 1.2, Fragen 1.2.1 – 1.2.14

### 8 Teilchensysteme

- Exp.** 1) Tennisball hochwerfen => Ball selbst beschreibt Parabelbahn  
 2) Keule hochwerfen => nur der Schwerpunkt der Keule beschreibt Parabel

#### 8.1 Schwerpunkt $x_S$

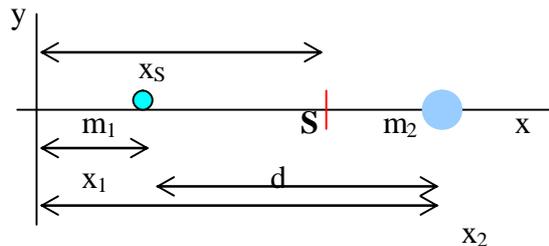
Der Schwerpunkt eines Teilchensystems (Körpers) bewegt sich so, als wenn die gesamte Masse in ihm konzentriert wäre und alle äußeren Kräfte nur dort angriffen.

System: 2 Teilchen:

$$x_S = (m_1 x_1 + m_2 x_2) / (m_1 + m_2)$$

$$x_S = (m_1 x_1 + m_2 x_2) / M$$

$$M = m_1 + m_2$$



Fälle:

- |                         |                                 |  |
|-------------------------|---------------------------------|--|
| Nur 1 Teilchen          | $m_2 = 0 \Rightarrow x_S = x_1$ | Schwerpunkt liegt im Teilchen (1) selbst |
| Gleiche Massen          | $x_S = (x_1 + x_2) / 2$         | Schwerpunkt liegt genau in der Mitte     |
| Generell $m_1 \neq m_2$ | $x_1 \leq x_S \leq x_2$         | Schwerpunkt liegt zwischen den Teilchen  |

Viele Teilchen auf einer Achse

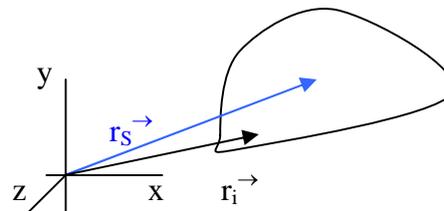
$$x_S = \frac{1}{M} \sum m_i x_i, \quad M = \sum m_i$$

Dreidimensionale Teilchenverteilung

$$\vec{r} = r_x \vec{e}_x + r_y \vec{e}_y + r_z \vec{e}_z$$

$$\vec{r}_S = r_{Sx} \vec{e}_x + r_{Sy} \vec{e}_y + r_{Sz} \vec{e}_z$$

$$\vec{r}_S = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i$$



#### Feste Körper

Aus einzelnen Teilchen wird eine kontinuierlich verteilte Masse, aus Summe wird Integral

$$\vec{r}_S = \frac{1}{M} \int \vec{r} \, dm \quad \text{Integration über die Masse } dm$$

mit  $\rho = dm/dV = M/V$  Dichte

$$\vec{r}_S = \frac{1}{M} \int \vec{r} \rho \, dV = \frac{1}{M} \int \vec{r} \frac{M}{V} \, dV = \frac{1}{V} \int \vec{r} \, dV \quad \text{Integration über das Volumen } dV$$

#### Bestimmung von $\vec{r}_S$ :

- Symmetrie des Körpers ausnutzen, Schwerpunkt sitzt immer in einem Symmetrieelement
- Allgemein: Schnittpunkt der 3 Schwerpunktebenen bestimmen
- Schwerpunkt kann auch außerhalb des Körpers liegen (Banane)

### 8.2 Zweites Newton'sches Axiom

**Exp.** Luftkissentisch, Puck stößt mit ruhendem Puck zusammen, Schwerpunkt bewegt sich

Für die Bewegung des Schwerpunktes beider Pucks gilt:

$$\vec{F} = M \vec{a}_S$$

**Beachte:**

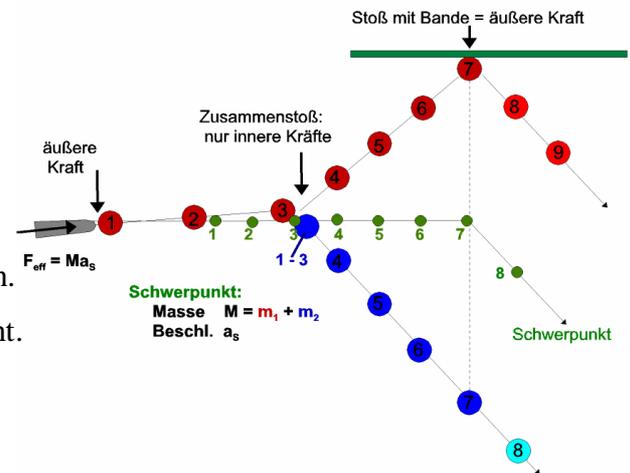
$F_{\text{eff}} \vec{}$ : effektive, von außen wirkende Kraft, innere

Kräfte zwischen den Teilchen sind nicht enthalten.

M: Gesamtmasse des geschlossenen Systems konstant.

$a_S \vec{}$ : Beschleunigung des Schwerpunktes

Beschleunigung der einzelnen Punkte unbekannt

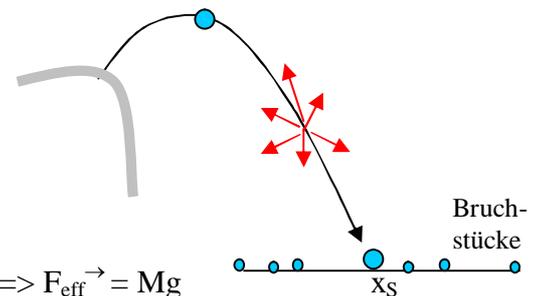


**Bsp.** Feuerwerkskörper

Rakete mit Schwerpunkt  $x_S$  fliegt auf Parabelbahn,

explodiert in der Luft, dabei wirken nur innere Kräfte =>  $F_{\text{eff}} \vec{=} Mg$

Schwerpunkt aller Bruchstücke bewegt sich weiter auf alter Parabel



### 8.3 Impuls

#### 8.3.1 Ein Teilchen

Ein Teilchen mit der Masse m und Geschwindigkeit v hat den Impuls:

$$\underline{\underline{\vec{p} = m \vec{v}}}, \quad \vec{p} \text{ immer parallel } \vec{v}, \text{ da } m \text{ Skalar}$$

was ist die zeitliche Änderung des Impulses?

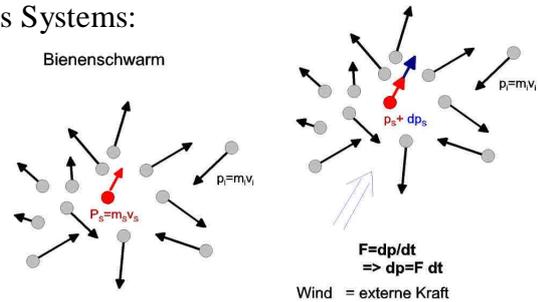
$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} mv = m \frac{dv}{dt} = ma, \quad \text{wenn Masse } m = \text{konstant}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}} \quad \text{Zweites Newton'sches Axiom}$$

### 8.3.2 Teilchensystem

Betrachte System aus  $n$  Teilchen, die untereinander in Wechselwirkung treten können bzw. äußere Krafteinwirkung erfahren können. Impuls des Systems:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n \\ &= m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \vec{P} = M \vec{v}_S$$

Der Gesamtimpuls des Systems ist das Produkt aus Gesamtmasse  $M$  und Geschw.  $v_S$  des Schwerpunktes des Systems.

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M \vec{a}_S$$

Die äußere, auf das System wirkende Kraft, ist das Produkt aus Gesamtmasse und Beschleunigung  $a_S$  des Schwerpunktes.

### 8.4 Impulserhaltung

„Wirkt keine äußere Kraft auf ein geschlossenes & isoliertes Teilchensystem und ist die Teilchenzahl (Masse) konstant, dann gilt für den Gesamtimpuls: „

$$\vec{P} = \text{konstant}$$

d.h.  $\vec{P}_i = \vec{P}_f$  Impuls zum Anfang  $i$ ) ist gleich dem Impuls zum Ende  $f$ )

Beweis keine äußere Kraft vorhanden

$$\Rightarrow 0 = \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow P = \text{konstant}$$

Beachte: 1) innerer Kräfte zwischen den Teilchen eines System ändern zwar die einzelnen Impulse  $p_i$ , nicht aber den Gesamtimpuls  $P$ .

2) Impulserhaltung komponentenweise betrachten.

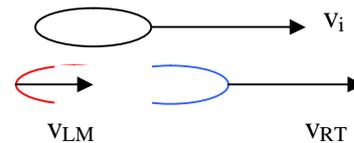
**Bsp.** Weltraumtransporter sprengt Lastmodul ab

Bewegen sich geradlinig auf die Sonne zu

Gesamtmasse  $M$ , Lastmodul  $m = 0,2 M$

Anfangsgeschwindigkeit:  $v_i = 2100 \text{ km/h}$  relativ zur Sonne

Nach Abtrennung: Transporter ist um  $500 \text{ km/h}$  schneller als das Lastmodul



Frage: Wie schnell ist der Raumtransporter relativ zur Sonne?

Lsg

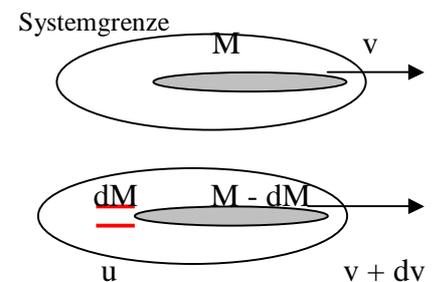
### 8.5 Systeme mit veränderlicher Masse

bisher: Masse des Systems konstant, **neu**: Masse ändert sich

**Exp.** Luftballon am Strohhalm fliegt durch Rückstoß Leine entlang

**Rakete** fliegt mit konst. Geschw. bzgl einem Inertialsystem durch den Weltraum, keine Gravitation, keine Reibung, Geschw. bezogen auf Sonne.

Zeit	Rakete	Geschw.	Masse
$t$	Triebwerk aus	$v$	$M$
$t + dt$	Triebwerk an, Gas	$v + dv$ $u$	$M - dM, dM > 0$ $dM$



System: Rakete + Gas ist geschlossen und isoliert  $\Rightarrow$  Impulserhaltung gilt

$$P(t) = P(t + dt) \quad \text{Impuls vorher} = \text{Impuls nachher}$$

$$(1) \quad Mv = dM u + (M - dM)(v + dv)$$

$$v_{\text{rel}} = u - (v + dv) \quad \text{Gasgeschw. rel. zu Rakete} = \text{Gasgeschw. zum System} \\ \text{minus Raketengeschw. zur Sonne}$$

$$\Rightarrow \quad u = v + dv + v_{\text{rel}} \quad \text{in (1) einsetzen ergibt}$$

$$\Rightarrow \quad -dM v_{\text{rel}} = M dv \quad \text{nach t ableiten ergibt}$$

$$\Rightarrow \quad -(dM/dt) v_{\text{rel}} = M (dv/dt)$$

$$\Rightarrow \underline{R v_{\text{rel}} = M a = F}$$

$$R = -dM/dt$$

Schubkraft:  $R v_{\text{rel}}$

### Erste Raketengleichung

Produkt aus Rate  $R$  des Massenverlustes und Relativgeschw. zwischen Rakete und Verbrennungsprodukten ergibt die Kraft auf die Rakete.

### Geschwindigkeitsänderung

$$dv = -v_{\text{rel}} dM/M$$

Beschleunigung von  $v_i$  nach  $v_f$

$$\Rightarrow v = \int_{v_i}^{v_f} dv = -v_{\text{rel}} \int_{M_i}^{M_f} dM/M$$

Indices: Anfang:  $i$ , Ende:  $f$

$$\Rightarrow \underline{v_f - v_i = v_{\text{rel}} \ln\{M_i/M_f\}}$$

### Zweite Raketengleichung

Geschwindigkeitszunahme der Rakete, wenn die Masse von  $M_i$  nach  $M_f$  abnimmt.

Vorteil mehrstufiger Raketen: Reduzierung von  $M_f$  durch Abwurf leerer Tanks am Ende der Beschleunigungsphase.

## 9. Stoßprozesse

FOLIE

Man beobachtet nur Verformungen als Folge des Stoßes, der Prozess selbst läuft zu schnell ab. Fast alles Wissen über Elementarteilchen (Kerne, Protonen, Quarks) hat man aus Stoßprozessen gewonnen. Die Spielregeln der Stoßprozesse sind Energie- & Impulserhaltungssatz.

„Ein Stoß / Kollision ist ein isoliertes Ereignis während dessen ein oder mehrere Körper für relativ kurze Zeit relativ starke Kräfte aufeinander ausüben“.

### 9.1 Impuls & Kinetische Energie

Betrachte geschlossenes & isoliertes System (kein Massenaustausch, keine äußere Kraft)

**Exp.** Tischtennisball, Golfball, Knete auf den Boden fallen lassen.

„Der Impulserhaltungssatz des Gesamtsystems gilt für elastische und inelastische Stöße bei isoliert & abgeschl. Systemen. Der Impuls des Einzelteilchens kann sich ändern.

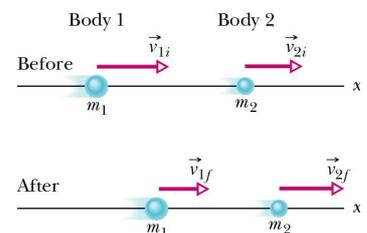
**Elastischer Stoß:** Die kinetische Energie der stoßenden Teilchen ändert sich durch den Stoß nicht. Benutze Energie- & Impulserhaltung

**Inelastischer Stoß:** Die kinetische Energie der Teilchen ändert sich (wird meist reduziert und in andere Formen überführt). Benutze nur Impulserhaltung

### 9.1.1 Inelastischer Stoß

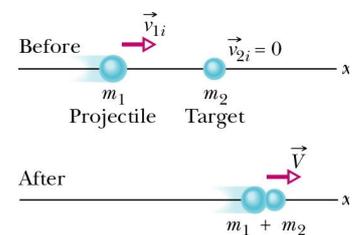
Alle Bewegungen laufen entlang einer Achse, betrachte nur Komponenten

Impulserhaltung  $p_i^{\rightarrow} = p_f^{\rightarrow}$  Index: i: initial, f: final  
 $p_{1i} + p_{2i} = p_{1f} + p_{2f}$   
 $m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$   
 $\Rightarrow$  Endgeschwindigkeiten sind berechenbar



**Bsp:** Körper haften nach Stoß mit ruhendem Objekt zusammen, z.B. Torwart fliegt mit dem Ball in das Tor, besitzen hinterher gemeinsame Geschwindigkeit v

$\Rightarrow m_1 v_{1i} + m_2 \cdot 0 = (m_1 + m_2)v$   
 $\Rightarrow v = v_{1i} \cdot m_1 / (m_1 + m_2)$   
 $v < v_{1i}$  da Impuls auf größere Masse verteilt wird



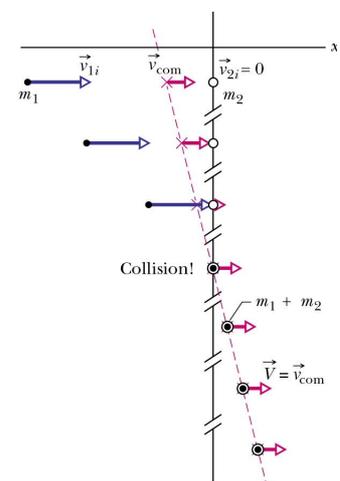
- Exp. Luftkissenbahn**
- a) Stoß gleicher Massen elastisch
  - b) Stoß gleicher Massen inelastisch
  - c) Stoß gleicher Massen in selbe Richtung, haften zusammen

### 9.1.2 Geschwindigkeit des Schwerpunktes $v_S$

$v_S$  kann sich im isolierten, abgeschlossenen System infolge eines Stoßes nicht ändern, da der Impulserhaltungssatz gilt.

$P^{\rightarrow} = M v_S^{\rightarrow} = (m_1 + m_2) v_S$   
 $P^{\rightarrow} = p_{1i}^{\rightarrow} + p_{2i}^{\rightarrow}$   
 $\Rightarrow v_S = (p_{1i}^{\rightarrow} + p_{2i}^{\rightarrow}) / (m_1 + m_2)$

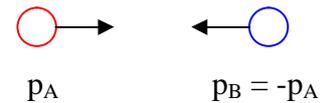
FOLIE



**Beachte**

Impuls eines Systems kann 0 sein aber kinetische Energie  $\neq 0$

Billiardkugeln A, B treffen aufeinander



$P = p_A + p_B = p_A - p_A = 0$  Gesamtimpuls des Systems

$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 \neq 0$   $E_{\text{kin}}$  des Systems

aber  $E_{\text{kin-S}} = \frac{1}{2} (m + m) v_S^2 = 0$   $E_{\text{kin}}$  des Schwerpunktes

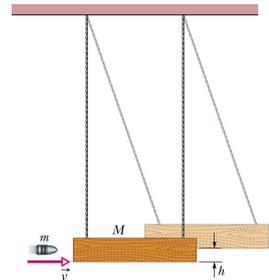
**Bsp.** (selber rechnen)

Die Geschwindigkeit von Geschossen wurde vor elektronischer Zeitmessung mit dem ballistischen Pendel bestimmt. Kugel trifft in Holzblock, beide gehen nach oben.

Kugel:  $m = 9,5 \text{ g}$ ,  $v = ?$

Block:  $M = 5,4 \text{ kg}$ , schwingt hoch um  $6,3 \text{ cm}$

Problem: irreversibler Prozeß, Wärmeentwicklung beim Abbremsen der Kugel, Energieerhaltung wird nicht vollständig erfasst



Schritt 1: System: Block-Kugel, Stoß dauert nur kurze Zeit  $\Rightarrow$  Seile in Ruhe

$\Rightarrow$  äußerer Kraftstoß auf System  $= 0 \Rightarrow$  Impulserhaltung gilt

$\Rightarrow mv + M \cdot 0 = V \cdot (m + M)$

$\Rightarrow V = mv / (m + M)$

Schritt 2: System: Block-Kugel-Erde, Mechanische Energie dieses Systems bleibt erhalten, Seilkraft ohne Einfluss, da immer senkrecht auf Geschwindigkeit

$\Rightarrow E_{\text{kin}} = U_{\text{grav}} \quad \frac{1}{2} (m + M) V^2 = (m + M) gh$

$\frac{1}{2} \{ mv / (m + M) \}^2 = gh$  mit V aus Schritt (1)

$\Rightarrow v = (m + M) / m \cdot [2gh]^{1/2} = 630 \text{ m/s}$

Ein ballistisches Pendel überführt die hohe, schwer messbare Geschwindigkeit der leichten Kugel in eine kleine, daher leicht messbare Geschwindigkeit des schweren Holzblocks.

**9.2 Elastische Stöße****9.2.1 Stoß mit ruhendem Objekt**

„Beim elastischen Stoß bleibt die gesamte kinetische Energie des Systems erhalten, die kinetische Energie der einzelnen Teilchen kann sich ändern.“

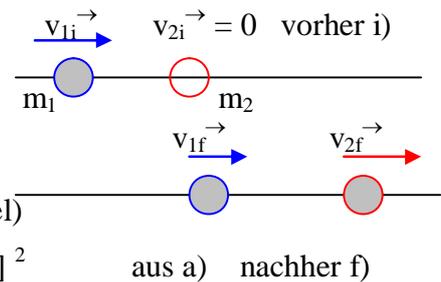
**Exp.** Pendelgestell: 1 Kugel schwingt gegen die linke Seite, rechts hebt sich 1 Kugel

2 Kugeln stoßen links  $\Rightarrow$  2 Kugeln heben sich rechts

Frage Warum ruht die erste Kugel (Billiard) ?

Lsg. a) Impulserhaltung  $m_1 v_{1i} + m_2 \cdot 0 = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$

b) Energierhaltung  $\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$



aus a) =>  $m_1/m_2 * (v_{1i} - v_{1f}) = v_{2f}$

aus b) =>  $m_1(v_{1i} + v_{1f})(v_{1i} - v_{1f}) = m_2 v_{2f}^2$  (Bin. Formel)

$v_{2f}$  ersetzen  $m_1(v_{1i} + v_{1f})(v_{1i} - v_{1f}) = m_2 [m_1/m_2 * (v_{1i} - v_{1f})]^2$

=>  $m_1(v_{1i} + v_{1f}) = m_1^2/m_2 * (v_{1i} - v_{1f})$

=>  $m_2(v_{1i} + v_{1f}) = m_1(v_{1i} - v_{1f})$

=>  $v_{1f} = v_{1i} * (m_1 - m_2) / (m_1 + m_2)$  **Kugel 1**

aus a) =>  $v_{1f} = 1/m_1 * (m_1 v_{1i} - m_2 v_{2f})$

in b) setzen  $m_1^2 v_{1i}^2 = m_1 m_2 v_{2f}^2 + (m_1 v_{1i})^2 - 2 m_1 m_2 v_{1i} v_{2f} + (m_2 v_{2f})^2$

=>  $0 = m_1 m_2 v_{2f} - 2 m_1 m_2 v_{1i} + m_2^2 v_{2f}$  ; durch  $v_{2f}$  teilen

=>  $v_{2f} = 2 m_1 v_{1i} / (m_1 + m_2)$  **Kugel 2**

**Spezialfälle:**

1) Gleiche Massen  $m_1 = m_2$  =>  $v_{1f} = 0, v_{2f} = v_{1i}$  unser Experiment, Billiard

2) schweres Ziel  $m_2 \gg m_1$  =>  $v_{1f} \approx -v_{1i}, v_{2f} \approx v_{1i} * 2m_1/m_2$  Perle gegen Kanonenkugel

3) schweres Geschöß  $m_1 > m_2$  =>  $v_{1f} \approx v_{1i}, v_{2f} \approx 2v_{1i}$

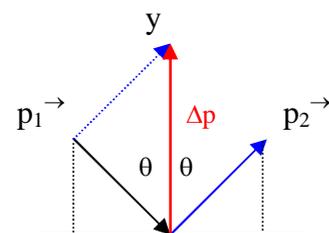
Faktor 2 in 2) durch Richtungsumkehr des leichten Balls  $v \Rightarrow -v$ , in 3) von  $v = 0 \Rightarrow 2v$

**Bsp. Squashball wird von der Wand in x-y-Ebene reflektiert**

Impulsänderung:  $\Delta p \rightarrow = p_2 \rightarrow - p_1 \rightarrow$

x-Achse  $\Delta p_x = p_{2x} - p_{1x} = 0$

y-Achse  $\Delta p_y = p_{2y} - p_{1y} = (p_{2y} - (-p_{2y})) = 2 p_{2y}$



**9.2.2 Stoß mit bewegtem Objekt**

wenn  $v_{2i} \neq 0$  ergeben sich analog zu 9.2.1 folgende Gleichungen:

=>  $v_{1f} = v_{1i} * (m_1 - m_2) / (m_1 + m_2) + 2 m_2 v_{2i} / (m_1 + m_2)$  **Teilchen 1**

=>  $v_{2f} = 2 m_1 v_{1i} / (m_1 + m_2) + v_{2i} * (m_2 - m_1) / (m_1 + m_2)$  **Teilchen 2**

ergeben im Grenzfall  $v_{2i} = 0$  die Gleichungen aus 10.4.1.

**Bsp.**

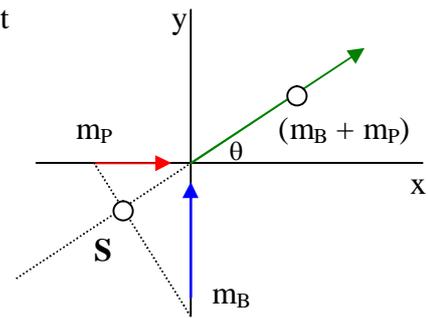
Zwei Schlittschuläufer stoßen zusammen und halten sich fest  
(inelastischer Stoß)

Paul  $m_P = 83 \text{ kg}$ ,  $v_{iP} = 6,2 \text{ km/h}$  in  $x$ -Richtung

Barbara  $m_B = 55 \text{ kg}$ ,  $v_{iB} = 7,8 \text{ km/h}$  in  $y$ -Richtung

Frage: Geschw. des Paares nach Zusammenstoß ?

Lsg:



Frage wie läuft der Schwerpunkt vor / nach dem Stoß ?

Lsg.

**Zusammenfassung:** Prüfungstrainer Kapitel 1.3, Fragen 1.3.1 – 1.3.7

### 10. Rotation

Alle Bewegungsformen lassen sich aus Translations- und Rotationsbewegungen aufbauen.

Wir betrachten hier: - starrer Körper  
 - Drehachse fest, (keine Bowlingkugel)

Idee: eine Translationsbewegung ist eindeutig beschrieben durch  $x(t)$

=> Eine Rotationsbewegung ist eindeutig beschrieben durch  $\theta(t)$

#### 10.1 Drehwinkel

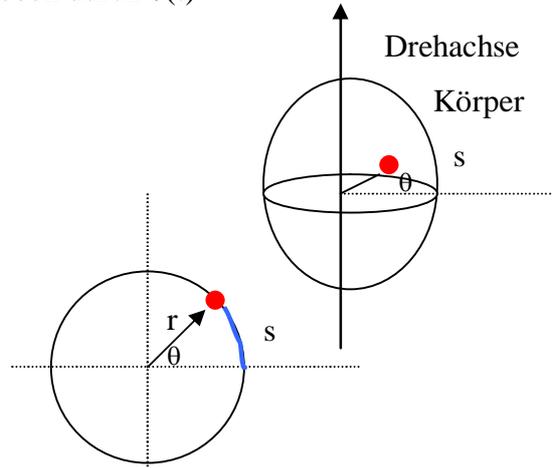
$\theta = s/r$  wenn  $\theta$  klein

$[\theta] = \text{rad}$  Bogenmaß

$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$

$\theta < 0$  im Uhrzeigersinn

$\theta > 0$  gegen Uhrzeigersinn

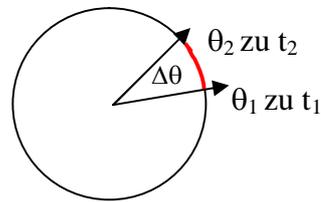


Beschreibung gilt nicht nur für einen Punkt des starren Körpers, sondern für alle Punkte!

#### 10.2 Winkelgeschwindigkeit

$\omega = d\theta/dt$

$[\omega] = \text{rad / s, Umdrehungen / min}$



#### 10.3 Winkelbeschleunigung

$\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$

$[\alpha] = \text{rad / s}^2$

**Bsp.** Drehende Scheibe

sei:  $\theta(t) = -1 - 0,6t + 0,25t^2$ ,  $[t] = \text{s}, [\theta] = \text{rad}$

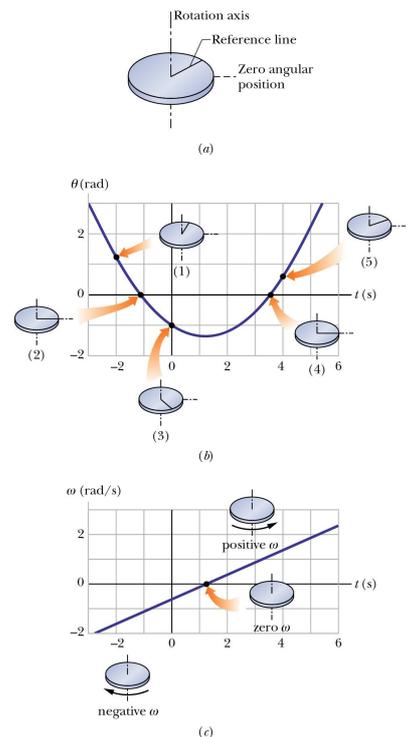
Frage: Zeichne  $\theta(t)$  für  $-3\text{s} < t < 6\text{s}$  und Bezugslinien

Lsg.  $\theta(t)$  durch Bezugslinie gegeben, z.B für  $t = -2 \text{ s}$

$\theta(2) = -1 + 0,6 \cdot 2 + 0,25 \cdot (-2)^2 = 1,2 \text{ rad} = 1,2 \frac{360^\circ}{2\pi} = 69^\circ$

Frage: Winkelgeschwindigkeit als Funktion der Zeit

Lsg.  $\omega = \frac{d\theta}{dt} = -0,6 + 0,5t$



### 10.4 Rotation bei konstanter Winkelbeschleunigung

Rotationen bei konstanter Winkelbeschleunigung lassen sich analog den Gleichungen von Translationsbewegungen mit konstanter Beschleunigung ausdrücken.

	<b>Translations-</b>	Unbekannte	<b>Rotations-Gleichung</b>	
1	$v(t) = v_0 + at$	$x - x_0$	$\theta - \theta_0$	} Lernen!
2	$x - x_0 = v_0t + \frac{1}{2} at^2$	$v$	$\omega$	
3	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$t$	$t$	} herleiten
4	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	$a$	$\alpha$	
5	$x - x_0 = vt - \frac{1}{2} at^2$	$v_0$	$\omega_0$	

Kontrollfrage: können obige Gleichungen angewendet werden auf:

$$\theta(t) = -5t^3 + 27t^2 - 4, \quad \theta(t) = -5t^2 + 27t + 1,$$

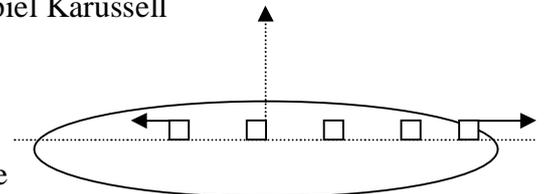
### 10.5.1 Rotation & Translation

Bei Rotation eines starren Körpers um eine Drehachse legen alle Punkte den selben Winkel pro Zeiteinheit zurück. Die zurückgelegte Strecke, Geschwindigkeit steigt aber mit dem Umfang also mit dem Abstand vom Zentrum (Drehachse). Beispiel Karussell

**Exp.** rotierende Scheibe mit Klötzen

Bei Anstieg von  $\omega$  rutschen zuerst die äußeren Klötze

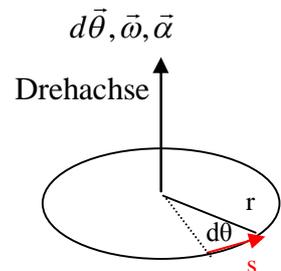
- 1) Bezugssystem Raum
- 2) Bezugssystem Scheibe, Kamera dreht mit, vorher aufnehmen, in VL zeigen



Gesucht: Zusammenhang zwischen Rotations- und Translationsgrößen.

### Rotation & Vektoren

Größe	Vektorrichtung	Orientierung
Geschwindigkeit $\vec{\omega}$	Drehachse	rechte Hand Regel
Beschleunigung $\vec{\alpha}$	Drehachse	rechte Hand Regel
Winkel <u>nur kleines</u> $d\theta$	Drehachse	rechte Hand regel



Unterscheide  $d\theta, d\vec{\theta}$  Betrag und Vektor

Problem: Für große Winkel ist  $\theta$  kein Vektor, denn das Kommutativgesetz gilt nicht bei Addition der Drehwinkel. Die Reihenfolge der Rotationen ist wichtig!

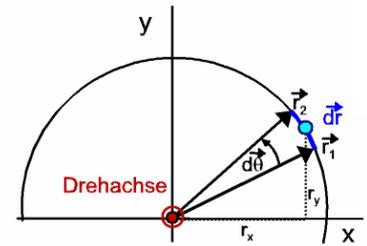
**Ort**

Punkt  $\vec{r} = |r|(\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)$   $r = \text{Radius}$

Kreisbogen  $d\vec{r} = r_1 \vec{e}_1 - r_2 \vec{e}_2$

$d\vec{r} = d\theta \vec{e}_\theta \times \vec{r}$   $d\theta \vec{e}_\theta$  in Richtung Drehachse

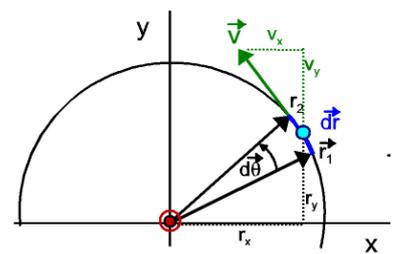
$|\underline{dr}| = \underline{d\theta} r$  Bezeichnung oft  $\underline{s} = \underline{dr}$



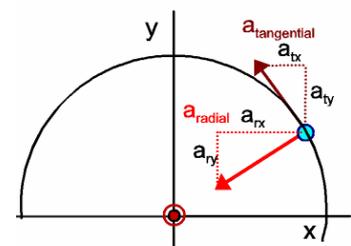
**Geschwindigkeit**

Vektor  $\vec{v} = d\vec{r}/dt = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Betrag  $\underline{v} = \underline{\omega} r$



$\omega$  konstant für alle Punkte des Körpers, aber v nimmt mit Abstand von der Drehachse zu.



**Beschleunigung**

Vektor  $\vec{a} = d\vec{v}/dt = d/dt(\vec{\omega} \times \vec{r})$

Skalar  $a = (d\omega/dt)r + \omega(dr/dt)$  (Produktregel)

$= (d\omega/dt) r + \omega (r d\theta/dt)$

$\underline{a} = \underline{\alpha} \underline{r} + \underline{\omega}^2 \underline{r}$

tangentiale radiale Beschleunigung

$a_{\text{tangential}}$  Proportional Geschwindigkeitsänderung

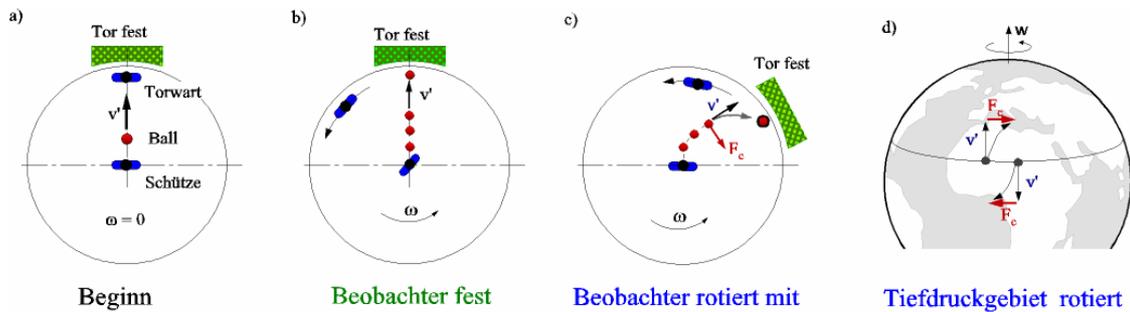
$a_{\text{radial}}$  tritt auch bei konstanter Geschwindigkeit auf

mit  $\omega = v/r \Rightarrow \omega^2 r = v^2/r$  Zentripetalbeschleunigung

### 10.5.2 Rotierende Bezugssysteme

welche Scheinkräfte treten bei einem rotierenden Bezugssystem auf?

Bsp. Fußballer auf rotierender Scheibe Tor steht außerhalb fest, Scheibe rotiert mit  $\omega$  :



Beobachter im	Ort	Geschw.	Beschl.	Koordinatensystem
Festes System	$\vec{r}$	$\vec{v}$	$\vec{a}$	$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$
Rotierendes System	$\vec{r}'$	$\vec{v}'$	$\vec{a}'$	$\vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z$

Für die generelle Umrechnung der Darstellung eines Vektors  $\vec{b}$  zwischen festem und rotierendem System gilt generell

$$\frac{d}{dt} \vec{b} = \frac{d}{dt} \vec{b}' + \vec{\omega} \times \vec{b}$$

Für den Ort gilt:  $\vec{r}' = \vec{r}$  weil Ort unabhängig vom rotierenden Koordinatensystem

Relativgeschw.  $\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  Relativgeschw. der Koordinatensysteme

Der Beobachter im festen System berechnet mit seinen Größen:

$$(1) \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}' + \vec{u} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$(2) \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \omega \times \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \omega = \text{konstant}$$

Der Beobachter im festen System erhält mit den Koordinaten des rotierenden Systems:

$$(3) \quad \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}' + (\omega \times \vec{v}') \quad \text{ohne Bew.}$$

aus (1 & 2)  $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r})$

$\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  (umstellen mit  $a \times b = -b \times a$ )

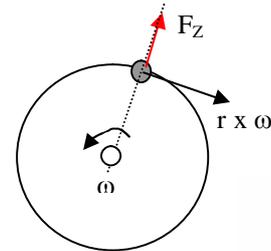
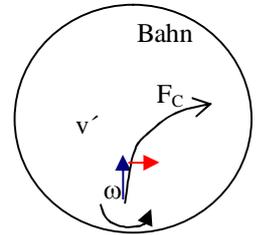
$\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}' - 2\vec{v}' \times \vec{\omega} - \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$

$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{a}' = \vec{a} + 2(\vec{v}' \times \vec{\omega}) + \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})}}$  aus Sicht des rotierenden Systems

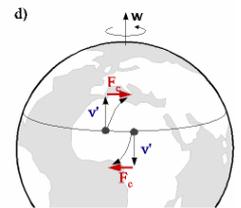
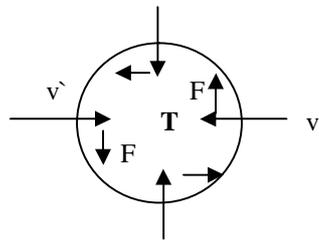
Kraftdefinition  $\underline{\underline{F = ma}}$   $\Rightarrow$

Corioliskraft  $\underline{\underline{F_C = 2m(\vec{v}' \times \vec{\omega})}}$  tritt bei bewegten Objekten auf

Zentrifugalkraft  $\underline{\underline{F_Z = m\vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})}}$  tritt immer auf



Luft strömt von außen in das Tiefdruckgebiet, von allen Seiten mit  $v'$



Tiefdruckgebiet rotiert

**10.6 Kinetische Energi**

**Exp.** a) 2 Cola-Dosen

Worin unterscheiden sich die Dosen?

b) Ring + Holzrolle mit identischer Masse

Problem: Ein rotierendes Kreissägeblatt besitzt offensichtlich kinetische Energie. Wie groß ist diese? Bekannt Form  $E = \frac{1}{2} m v^2$  für das Sägeblatt als Ganzes, d.h. Betrachtung des Schwerpunktes hilft nicht weiter, denn  $v_S = 0$ .

Lsg. betrachte jeden Massenpunkt  $m_i$  des Sägeblatts mit individueller Geschwindigkeit  $v_i$

$E_{kin} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$

$v_i = \omega r_i$  individuelle Geschw.  $v_i$  abhängig vom Abstand zur Drehachse, Winkelgeschw.  $\omega$  ist aber für alle Punkte gleich

$E_{kin} = \sum \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \sum m_i r_i^2 \omega^2$

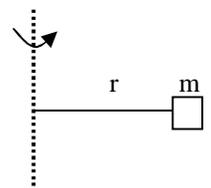
$\underline{\underline{E_{Rot} = \frac{1}{2} I \omega^2}}$  vergleiche mit  $E_{kin} = \frac{1}{2} m_i v^2$

Trägheitsmoment:

$\underline{\underline{I = \sum m_i r_i^2}}$

gibt die Massenverteilung bzgl. einer Drehachse an

$[I] = \text{kgm}^2$

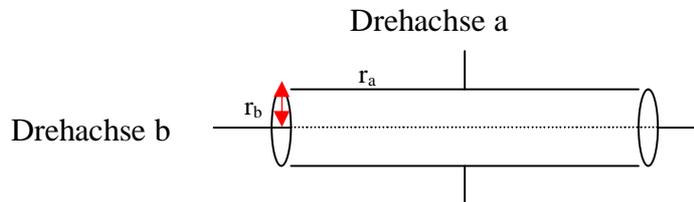


Translationsbewegung:  $E_{kin} \sim \text{träge Masse } m$

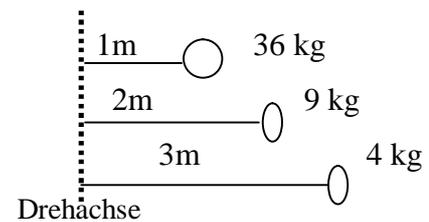
Rotationsbewegung:  $E_{kin} \sim \text{Trägheitsmoment } I$

Je kleiner das Trägheitsmoment, desto leichter läßt sich ein Körper drehen

**Bsp.** Trägheitsmoment einer Stange



**Bsp.** Ordne die Trägheitsmomente nach ihrer Größe



### 10.7 Trägheitsmoment

Berechnung des Trägheitsmomentes eines beliebigen Körpers

$$I = \int r_i^2 dm$$

per Hand oder Computer

**Exp.** a) Buch dreht erst um Achse mit höchstem Trägheitsmoment I. Buch ändert die Drehachse, rotiert später um Achse mit kleinstem Moment I (Energierminimierung).

b) Messung Trägheitsmoment aus Praktikum, schwingender Aluklotz

<p>Hoop about central axis</p> $I = MR^2$ (a)	<p>Annular cylinder (or ring) about central axis</p> $I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$ (b)	<p>Solid cylinder (or disk) about central axis</p> $I = \frac{1}{2}MR^2$ (c)
<p>Solid cylinder (or disk) about central diameter</p> $I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$ (d)	<p>Thin rod about axis through center perpendicular to length</p> $I = \frac{1}{12}ML^2$ (e)	<p>Solid sphere about any diameter</p> $I = \frac{2}{5}MR^2$ (f)
<p>Thin spherical shell about any diameter</p> $I = \frac{2}{3}MR^2$ (g)	<p>Hoop about any diameter</p> $I = \frac{1}{2}MR^2$ (h)	<p>Slab about perpendicular axis through center</p> $I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$ (i)

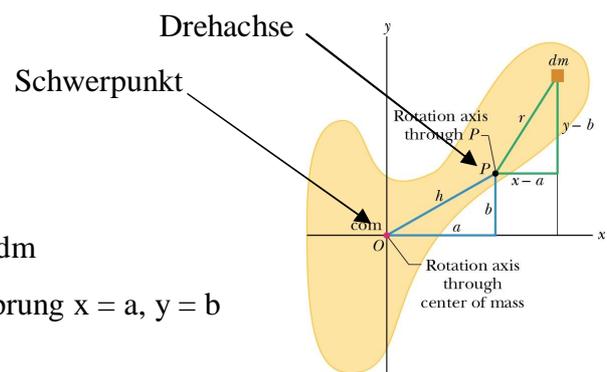
### Satz von Steiner

Bekannt ist das Trägheitsmoment  $I_S$  einer Achse, die durch den Schwerpunkt des Körpers mit Masse  $M$  geht. Das Trägheitsmoment bzgl. einer beliebigen parallelen Achse mit dem Abstand  $h$  ist dann:

$$\underline{I = I_S + Mh^2}$$

Beweis  $I = \int r^2 dm = \int [(x - a)^2 + (y - b)^2] dm$

integrieren um neue Achse mit Ursprung  $x = a, y = b$



$$= \int (x^2 + y^2) dm - 2a \int x dm - 2b \int y dm + \int (a^2 + b^2) dm$$

$$= I_S - 0 - 0 + Mh^2$$

denn  $\int x dm = 0, \int y dm = 0$  summiert um Schwerpunkt, gleich viele neg. wie pos. Anteile

### 10.8 Drehmoment

Warum ist die Türklinke möglichst weit vom Scharnier der Tür entfernt? In welche Richtung muß ich ziehen, um die Tür am leichtesten zu öffnen?

$$\underline{\underline{T \vec{r} = \vec{r} \times \vec{F}}}$$

$$T = r F \sin \theta \quad [T] = \text{Nm, nicht mit Arbeit verwechseln!}$$

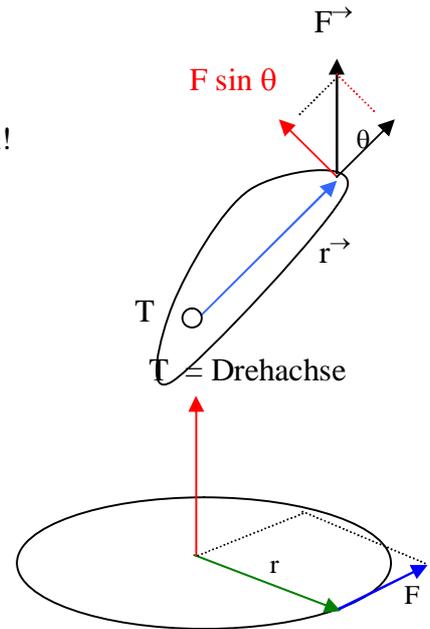
nur Kraftkomponente senkrecht auf  $\vec{r}$  bewirkt Drehmoment

**Hebelarm:** Komponente von  $\vec{r}$ , die senkrecht auf  $\vec{F}$  steht

$T \vec{r}$  senkrecht auf  $\vec{r}$  und  $\vec{F}$

$T \vec{r}$  Fläche, von  $\vec{F}, \vec{r}$  aufgespannt

Idee: Die Lage der Drehachse wird durch die Kraft und ihre Orientierung zum Hebelarm festgelegt.

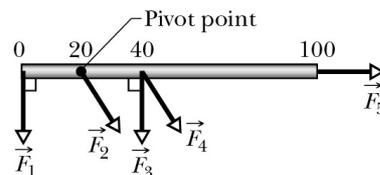


Superpositionsprinzip:

FOLIE Schraubenschlüssel

Resultierendes Drehmoment ist die Summe der einzelnen Drehmomente.

**Bsp.** Ordne die Drehmomente nach ihrer Größe  
(alle Kräfte sind betragsmäßig gleich)



Lsg.

**Exp.** Drehmomentenschlüssel

### 2. Newton'sches Axiom für die Rotation

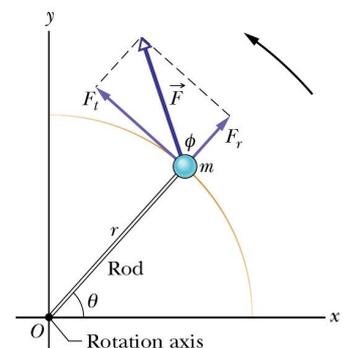
Kraft zieht Teilchen auf Kreisbahn, Teilchen rotiert um Drehachse

Masse m, Abstand r

nur tangentielle Kraftkomponente wirkt

$$F \sin \theta = ma_t$$

$a_t$ : lineare Tangentialbeschleunigung



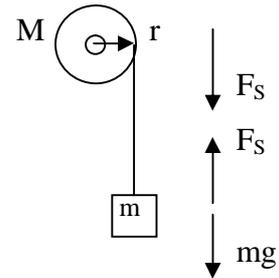
mit  $T = (F \sin\theta) r$

$\Rightarrow T = ma_t r$  mit  $a_t = \alpha r$ ,  $\alpha$ : Winkelbeschleunigung  
 $= m(\alpha r) r = mr^2 \alpha$

$\Rightarrow \underline{T = I \alpha}$  ( $\alpha$  im Bogenmaß)

Das Drehmoment ergibt sich aus Trägheitsmoment und Winkelbeschleunigung.

- Bsp.** Scheibe mit  $M = 2,5$  kg,  $r = 20$  cm, einheitliche Dicke  
 Horizontale Drehachse, masseloses Seil hält Block  $m = 1,2$  kg  
 Frage a) Beschleunigung des fallenden Blocks  
 b) Seilkraft  $F_S$   
 c) Winkelbeschleunigung  $\alpha$



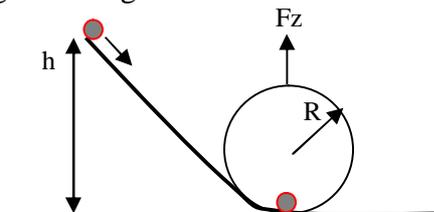
## 10.9 Rotationsenergie

angreifende Kraft  $\Rightarrow$  Drehmoment  $\Rightarrow$  Beschleunigung  $\Rightarrow$  Energiezunahme

**Exp.** Kugel rollt durch Looping,

Frage: Berechne  $v$  im Minimum

Lsg.  $U_{\text{grav}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{rot}} \Leftrightarrow mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$ , mit  $\omega = v / r$ , Kugelradius  $r$   
 $\Rightarrow 2mgh = (m + I/r^2)v^2$



$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + I/r^2}} = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{2}{5}m}} = \sqrt{\frac{2gh}{1,4}} \quad (I = \frac{2}{5}mr^2 \text{ für Kugel})$$

ohne  $E_{\text{rot}}$  wäre  $v$  größer, da 1 statt 1,4 im Nenner stünde

Frage aus welcher Höhe  $h$  muß die Kugel starten, damit sie den Looping durchlaufen kann?

Lsg als Hausaufgabe!  $F_z = mv^2/R \geq mg$

$\Rightarrow H = 0,7R$  über dem obersten Punkt des Loopings

**Arbeit**

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

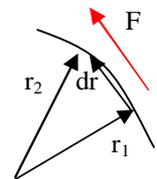
$d\vec{r}$  als Kreissegment

$$dW = \vec{F} \cdot (d\vec{\theta} \times \vec{r}) = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot d\vec{\theta}$$

Vertauschung im Spatprodukt

mit  $W = \int dW$  ,  $\vec{T} = (\vec{r} \times \vec{F})$

$$\Rightarrow \underline{W = \int \vec{T} \cdot d\vec{\theta}}$$



**Leistung**

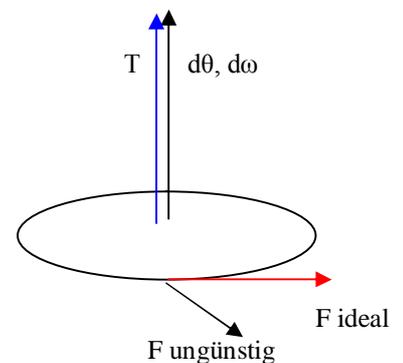
$$P = dW/dt$$

$$\Rightarrow P = \frac{d}{dt} ((\vec{r} \times \vec{F}) \cdot d\vec{\theta}) \text{ wenn Kreisradius } r \text{ und } F \text{ konstant}$$

$$\Rightarrow \underline{P = \vec{T} \cdot \vec{\omega}}$$

T übernimmt die Rolle von F

Arbeit, Leistung sind maximal, wenn T parallel zur Drehachse



<b>Translation</b> (feste Richtung)		<b>Rotation</b> (feste Achse)	
Ort	$x$	Winkel	$\theta$
Geschwindigkeit	$v = dx/dt$		$\omega = d\theta/dt$
Beschleunigung	$a = dv/dt$		$\alpha = d\omega/dt$
Masse	$m$	Trägheitsmoment	$I$
Kraft	$F = ma$	Drehmoment	$T = I \alpha$
Arbeit	$W = \int F dx$		$\int T \cdot d\theta$
Kin. Energie	$E_{kin} = \frac{1}{2} mv^2$		$E_{kin} = \frac{1}{2} I\omega^2$
Leistung (F konst)	$P = F \cdot v$	(T konst.)	$P = T \cdot \omega$

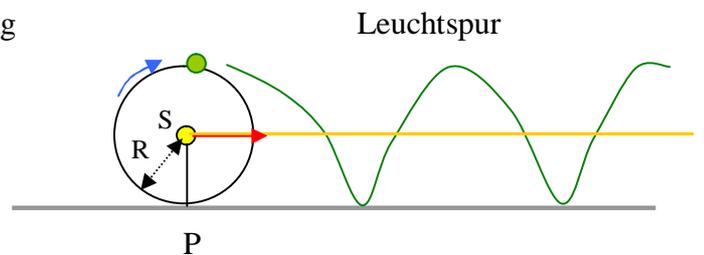
### 10.11 Rollbewegung

Kombinierte Rotations und Translationsbewegung

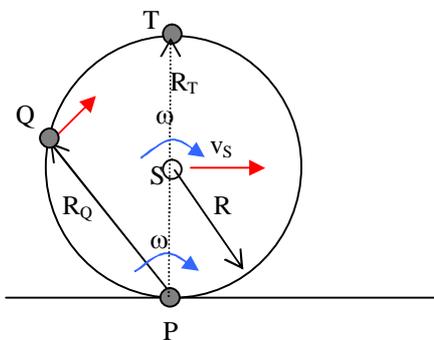
Schwerpunkt S: lineare Bewegung mit  $v_S$

Kontaktpunkt P: “  $v_S$

Denn er liegt immer unter S



Rollen = Rotation um Auflagepunkt P mit  $\omega$



Geschw. Punkt Q:  $v_Q = R_Q \omega$

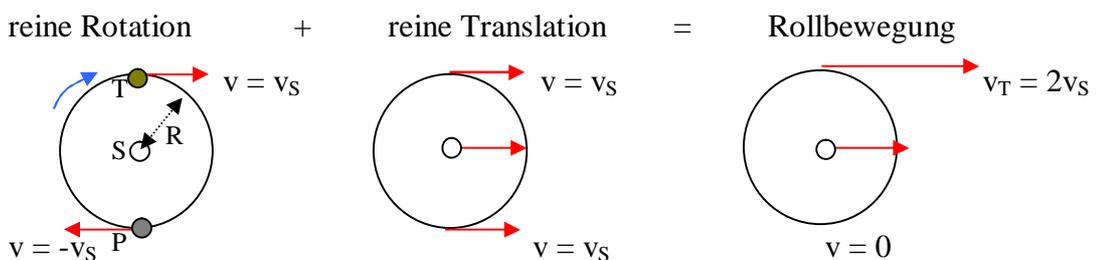
Schwerpunkt S:  $v_S = R \omega$

Oberseite Punkt T:  $v_T = 2R \omega$ , denn  $R_T = 2R$

Unterseite Punkt P:  $v_P = 0 \cdot \omega = 0$  denn  $R_P = 0$

Beschleunigung S:  $r_S = R \alpha$

Alternative Darstellung



$\Rightarrow v_T = 2\omega R = 2v_S$

FOLIE Photo eines sich drehenden Rades: Speichen oben unscharf, unten scharf

**Bsp.** Clown fährt auf Fahrrad durch die Manege. Durchmesser des Vorderrades = 2x des Durchmessers vom Hinterrad.

Frage: ist die lineare Geschw. des äußersten Punktes T am Hinterrad größer, gleich, kleiner der des Vorderrades?

Lsg.

Frage Winkelgeschw. des Hinterrades größer, gleich kleiner als der des Vorderrades?

Lsg.



## Kinetische Energie der Rollbewegung

Translations des Schwerpunktes + Rotation um den Schwerpunkt

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} I_S \omega^2$$

## Kräfte bei Rollbewegung

**Exp.** 2 Mullbinden rollen eine Schräge hinab. Welche Mullbinde ist schneller?

a) geschlossene Rolle, b) offene Rolle wickelt sich auf

**Schräge:** Rad / Mullbinde rollt nur, wenn Reibungskraft zwischen Unterlage und Rad wirkt, sonst würde es gleiten / rutschen, also keine Rotationsbewegung ausführen. Gesucht ist die Beschleunigung  $a_S$  des Schwerpunktes

Schräge: Koordinatensystem gekippt um  $\theta$

Gravitation:  $F_g \sin\theta$

Normalkraft:  $N$  senkrecht zur Ebene

Reibungskraft:  $f$  nicht bekannt

Kräfte:  $f - mg \sin\theta = ma_S$  (1)

Drehmomente:  $Rf = I_S \alpha$  (2)

mit  $a_S = -R\alpha$  denn  $a_S$  in neg.  $x$ -Richtung,  $\alpha > 0$  da gegen die Uhr

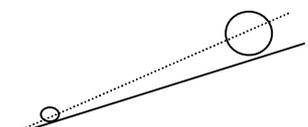
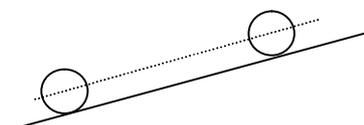
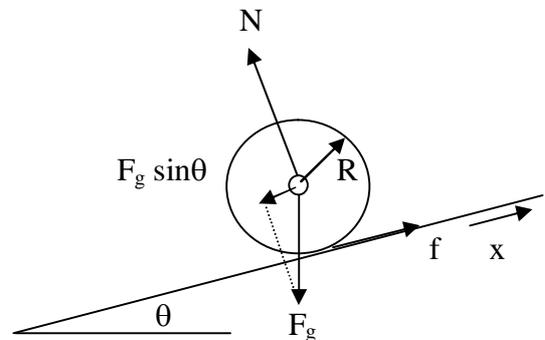
$$\Rightarrow f = (-I_S a_S)/R^2 \quad \text{in (1)} \Rightarrow (-I_S a_S)/R^2 - mg \sin\theta = ma_S$$

$$\Rightarrow a_S = (-g \sin\theta)/(1 + I_S/mR^2) \quad (\text{für Scheibe gilt: } I_S = \frac{1}{2} mR^2)$$

$$\Rightarrow a_S = (-g \sin\theta)/(1 + 1/2)$$

$\Rightarrow$  also ist  $a_S$  unabhängig vom Trägheitsmoment

Lsg. offene Mullbinde ist schneller als geschlossene Mullbinde, da der Schwerpunkt durch das Abwickeln fällt, d.h. die Steigung  $\sin\theta$  nimmt effektiv zu.



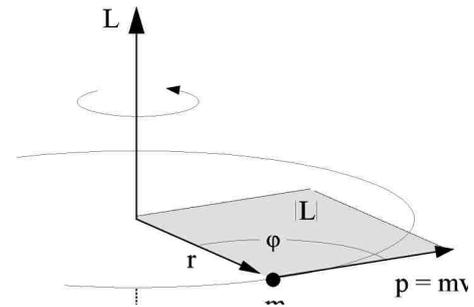
## 11.1 Drehimpuls

Analog zum Impuls  $\vec{p}$  der Translation gibt es den

Drehimpuls  $\vec{L}$  der Rotation

$$\underline{\vec{L} = (\vec{r} \times \vec{p})}$$

$$L = r m v \sin\theta \quad [L] = \text{kg m}^2/\text{s}$$



Konstruktion: rechte Hand-Regel, Bezugspunkt notwen

$\vec{L}$  senkrecht auf der Rotationsebene

$L < 0$  wenn Teilchen im Uhrzeigersinn d

## 2tes Newton'sches Axiom

$$\underline{\vec{T} = d\vec{L} / dt}$$

Die Vektorsumme aller Drehmomente, die auf ein Teilchen wirken, ist gleich der zeitlichen Änderungsrate des Drehimpulses.

Beweis:  $\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v})$

$$d\vec{L} / dt = m(\vec{r} \times d\vec{v} / dt + d\vec{r} / dt \times \vec{v}) \quad \text{Produktregel, Faktoren nicht}$$

$$d\vec{L} / dt = m(\vec{r} \times \vec{a} + \vec{v} \times \vec{v}) \quad \text{vertauschen!}$$

$$d\vec{L} / dt = (\vec{r} \times m\vec{a} + 0) \quad \vec{v} \times \vec{v} = 0, \text{ da } v \text{ parallel } v$$

$$d\vec{L} / dt = (\vec{r} \times \vec{F}) = \vec{T} \quad m\vec{a} = \vec{F}$$

Beachte:  $\vec{T}$  und  $d\vec{L}$  müssen für den selben Bezugspunkt angegeben werden.

## 11.2 Drehimpuls eines starren Körpers

### A) Teilchensystem

Für ein System aus mehreren Massenpunkten addieren sich die Drehimpulse  $L_i$  vektoriell

$$\vec{L} = \sum L_i$$

$$d\vec{L} / dt = \sum T_i = \vec{T}$$

$\sum T_i \vec{\tau}$  a) äußere Drehmomente durch äußere Kräfte

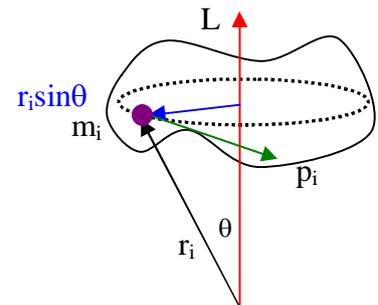
b) innere Drehmomente, durch innere Kräfte der Teilchen untereinander,  
heben sich aber gegenseitig auf (actio = reactio).

Bezugspunkt: wenn Schwerpunkt beschleunigt wird, darf nur dieser als Bezugspunkt genommen werden (rollendes Rad), sonst ist jeder Bezugspunkt erlaubt.

**B) Starrer Körper**

Starrer Körper rotiert mit konstantem  $\omega$  um feste Drehachse,  
gesucht: L bzgl. der Drehachse

Lsg. summiere die Drehimpulse aller Massenelemente  $m_i$



$$L = \sum l_i = \sum (r_i \sin\theta \ m_i \ v_i)$$

$$= \sum [(r_i \sin\theta) \ m_i \ \omega \ (r_i \sin\theta)] \ , \text{ Komponenten senkrecht zur Achse: } r_i \sin\theta$$

$$\underline{L} = \underline{\omega} \underline{I} \quad \text{mit } \sum (r_i \sin\theta)^2 \ m_i \text{ Trägheitsmoment bzgl. Rotationsachse}$$

**Bsp.** Scheibe, Ring, Kugel mit gleicher Masse u. gleichem Radius werden durch Faden tangential über gleiche Zeit mit gleicher Kraft aus der Ruhe um zentrale Drehachse beschleunigt.

Ordne nach a) Drehimpuls L,  
b) Winkelgeschw.  $\omega$



Lsg.

**11.3 Drehimpulserhaltung**

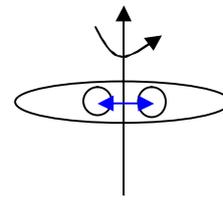
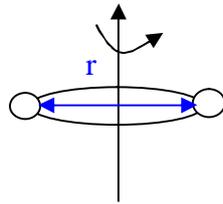
Wirkt auf das System kein äußeres Drehmoment  $T \vec{\tau}$ , so ist der Drehimpuls konstant:

$$\underline{dL \vec{\tau} / dt} = T \vec{\tau} = 0$$

Gilt über die Newton`sche Mechanik hinaus: Relativitätstheorie, Quantenmechanik

Was bedeutet Drehimpulserhaltung?

**Exp.** Person auf Drehstuhl ändert den Abstand der Hanteln vom Körper =>  $\omega$  ändert sich  
 Es wirkt kein äußeres Drehmoment, also gilt der Drehimpulserhaltungssatz.



$r$  groß =>  $I = \sum m_i r_i^2$  groß

$r$  klein =>  $I = \sum m_i r_i^2$  klein

Drehimpulserhaltung:  $L = \text{konstant}$

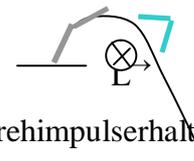
=>  $\omega = L / I$  klein

=>  $\omega = L / I$  groß

=>  $\omega$  ändert sich mit der Massenverteilung über das Trägheitsmoment

**Bsp.** Pyroette beim Eistanz oder Salto beim Turmsprung

- Beim Absprung erzeugt der Springer einen Drehimpuls.
- Nach Absprung: System isoliert, wirken keine Drehmomente => Drehimpulserhaltung
- Zieht er Beine, Arme an, so verkleinert sich  $I$  => dreht sich schneller (Salto)



**Exp.** Person sitzt auf Drehstuhl (in Ruhe) und hält drehendes Rad in der Hand. Achsen von Stuhl / Rad sind parallel. Dann dreht er das Fahrrad um 180°. Damit beginnt der Stuhl sich zu drehen. Am Trägheitsmoment hat sich nichts geändert, was ist passiert?

**Deutung:** System: Rad + Person,

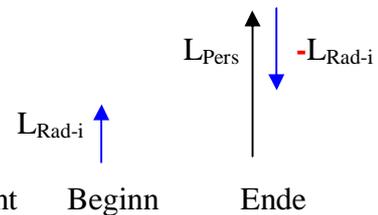
Drehimpulserhaltungssatz gilt, da kein äußeres Drehmoment bei Radumkehr wirkt

$L_{\text{Rad-i}} + L_{\text{Pers-i}} = L_{\text{Rad-f}} + L_{\text{Pers-f}} = \text{konstant}$

$L_{\text{Rad-i}} + 0 = -L_{\text{Rad-i}} + L_{\text{Pers-f}} \Rightarrow 2L_{\text{Rad-i}} = L_{\text{Pers-f}}$

$2\omega_{\text{Rad-i}} I_{\text{Rad}} = I_{\text{Pers}} \omega_{\text{Pers-f}}$

Trägheitsmomente konstant



$\omega_{\text{Pers}} = (2 I_{\text{Rad}} / I_{\text{Pers}}) \omega_{\text{Rad-i}}$

mit  $I_{\text{Rad}} = 1,2 \text{ kgm}^2$ ,  $\omega_{\text{Rad-i}} = 3,9 \text{ U/s}$ ,  $I_{\text{Pers}} = 6,8 \text{ kgm}^2$

=>  $\omega_{\text{Pers}} = (2 * 1,2 \text{ kgm}^2 / 6,8 \text{ kgm}^2) * 3,9 \text{ U/s} = 1,4 \text{ U/s}$

Rotation stoppen => Rad um 180° zurückdrehen.

	<b>Translation</b>	<b>Rotation</b>
Kraft	$\vec{F}$	Drehmoment $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$
Impuls	$\vec{p}$	Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
Impuls	$\vec{P} = M\vec{v}_S$	Drehimpuls $\vec{L} = I\vec{\omega}$ , für starren Körper
2.newt. Axiom	$\vec{F} = d\vec{P}/dt$	$\vec{T} = d\vec{L}/dt$
Erhaltungssatz	$\vec{P} = \text{konstant}$	$\vec{L} = \text{konstant}$ (isoliert, abgeschl.)

**Bisher** Drehimpulserhaltung bei Änderung von:

- a) Trägheitsmoment (Hanteln), b) innerer Drehimpuls (Fahrrad)

**Neu** Drehimpulsänderung bei äußerem Drehmoment (Kreisel) (kein isoliertes System)

## 11.4 Kreisel

**Exp.** Ein um die waagerechte Achse rotierendes Rad wird am Achsenende aufgehängt. Es wirkt die Gravitationskraft, d.h. System ist nicht mehr isoliert. Das Rad weicht senkrecht zur einwirkenden Kraft aus. FOLIE

### Präzession:

horizontaler Drehimpuls  $\vec{L}$ , vertikale Kraft  $\Rightarrow$  Kreisel weicht senkrecht zur Kraft aus

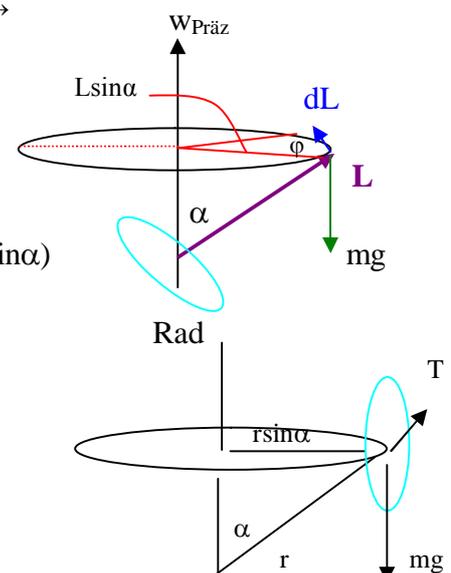
$$\Rightarrow d\vec{L} = \vec{T}dt, \quad |\vec{L}| = \text{konst}, \quad \text{da } \vec{T} \text{ senkrecht auf } \vec{L}$$

Präzessionswinkel:  $d\phi = dL / (L \sin\alpha) = Tdt / (L \sin\alpha)$

Geschwindigkeit  $w_{\text{Präz}} = d\phi / dt = T / (L \sin\alpha)$

$$\underline{w_{\text{Präz}} = (mgr) / (I\omega)} \quad \text{mit } T = mg (r \sin\alpha)$$

unabh. vom Neigungswinkel  $\alpha$



**Drehimpulse - Anwendung:**

a) Stabilisierung freier Bewegungen z.B. Diskuswerfen:

Eigenrotation des Diskus erhält den Neigungswinkel => Auftrieb wie bei Tragfläche

=> höhere Reichweite

b) künstlicher Horizont im Flugzeug **Exp** zeigen mit Kreisel

c) Schiffsstabilisator: antriebener Kreisel mit senkrechter Achse gleicht Schlingern des Schiffs um Längsachse aus, Freihändig Fahrradfahren

**Exp.** Levitation des magnetischen Kreisels. Stabilisation der Rotation durch Drehimpuls .

**Zusammenfassung:** Prüfungstrainer Kapitel 1.4 + 1.5, Fragen 1.4.1 – 1.4.17, 1.5.1 – 1.5.10

**11.5 Gleichgewicht**

Welche Objekte befinden sich im Gleichgewicht:

- i) Buch, auf Tisch liegend, ii) Puck, mit konstanter Geschw. über Eisfläche gleitend
- iii) rotierende Blätter des Deckenventilators, iv) Rad, mit konst. Geschw. rollend => alle !

Für einen starren Körper im Gleichgewicht gilt:

a)  $\vec{F}_{\text{Ges}} = d\vec{P}/dt = 0$

die Summe aller Kräfte verschwindet,

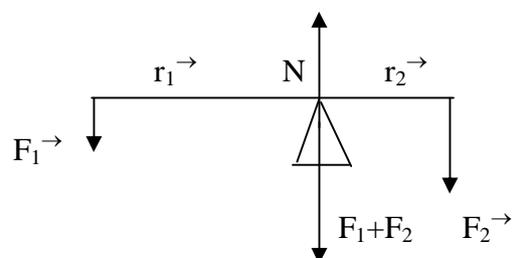
b)  $\vec{T}_{\text{Ges}} = d\vec{L}/dt = 0$

die Summe aller Drehmomente verschwindet bzgl. aller Punkte des Körpers.

**11.5.1 Hebelgesetz folgt aus b)**

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = -\vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$



**Exp.** Balkenwaage

Wie muß man einen Körper unterstützen, auf dessen Massenpunkte  $m_i$  die Schwerkraft wirkt?

sei  $F_{ges}^{\rightarrow} = \Sigma m_i g^{\rightarrow} = 0$

$\Rightarrow T_{Iges}^{\rightarrow} = \Sigma m_i r_i^{\rightarrow} \times g^{\rightarrow} = -g^{\rightarrow} \times \Sigma m_i r_i^{\rightarrow} = 0$

$\Rightarrow \Sigma m_i r_i^{\rightarrow} = 0 \Rightarrow$  Ursprung der Vektoren muß im Schwerpunkt liegen.

**11.5.2 Arten des Gleichgewichtes**

A) indifferentes Gleichgewicht

Ein im Schwerpunkt S aufgehängter Körper ist in jeder Lage im Gleichgewicht

B) Stabiles Gleichgewicht

Körper senkrecht über dem Schwerpunkt aufgehängt

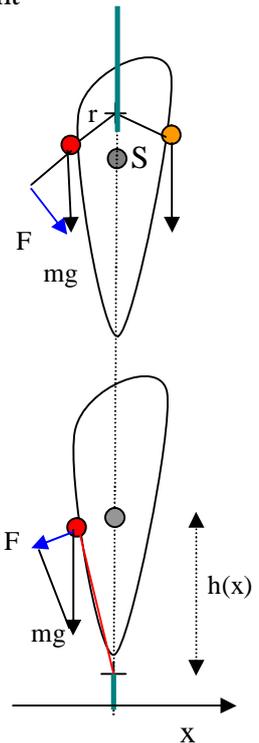
$\Rightarrow$  Lageänderung erzeugt Drehmoment, das zum Gleichgewicht zurückführt

$T^{\rightarrow} = r^{\rightarrow} \times F^{\rightarrow}$

C) Labiles Gleichgewicht

Körper senkrecht unter dem Schwerpunkt aufgehängt

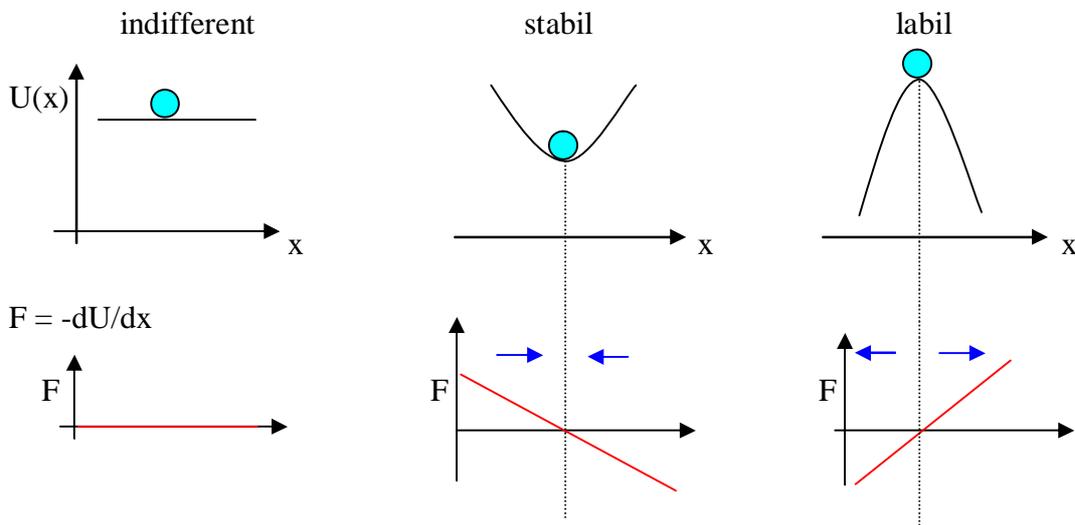
$\Rightarrow$  Kleinste Drehmomente führen Körper aus Gleichgewicht weg.



**11.5.3 Gleichgewicht & potenzielle Energie**

Betrachte  $U(x) = mgh(x)$  des Schwerpunktes bzgl. Aufhängungspunkt

Gleichgewicht herrscht, wenn  $dU/dx = 0$



## 11.6 Einfache Maschinen (selber durchrechnen)

Die einfachsten mechanischen Maschinen dienen zur Verrichtung von Arbeit. Meist ist die Heraufsetzung von Kräften gewünscht. Aus dem Energieerhaltungssatz folgt die Goldene Regel der Mechanik:

“Im verlustfreien Fall verhalten sich die entsprechenden Verschiebungen umgekehrt proportional wie die zugehörigen Kräfte”

### Hebelgesetz

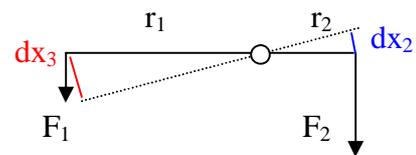
Gleiche Drehmomente

$$T_1 = -T_2 \Rightarrow r_1 F_1 = -r_2 F_2$$

Energieerhaltung

$$F_1 dx_1 = -F_2 dx_2$$

$$\Rightarrow F_1 (r_1 \theta) = -F_2 (r_2 \theta) \quad \text{gleiche Ergebnis}$$



### Flaschenzug

besitzt n lose Rollen und n feste Rollen

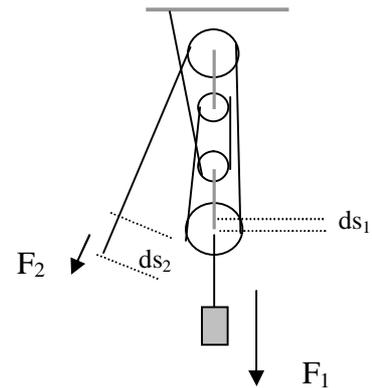
wenn Seilende gezogen um  $ds_2$

$$\Rightarrow \text{Last hebt sich um } ds_1 = ds_2/2n$$

denn Last verteilt sich auf  $2n$  Seilabschnitte

$$\Rightarrow F_1 ds_1 = F_2 ds_2 \quad \text{Energiesatz}$$

$$\Rightarrow F_2 = F_1 / 2n$$



### Getriebe

Zwei Zahnräder mit  $r_1, r_2$  greifen ineinander

Berührungspunkt: gleiche Lineargeschwindigkeiten

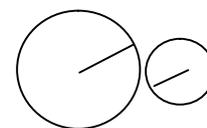
$$v_1 = v_2 = v, \quad v = \omega r$$

$$\Rightarrow \omega_1/\omega_2 = (v/r_1) / (v/r_2) = r_2/r_1$$

Bei verlustfreiem Leistungsübertrag:

$$P_1 = T_1 \omega_1 = T_2 \omega_2 = P_2 = \text{konstant}$$

$$\Rightarrow \omega_1/\omega_2 = T_2 / T_1$$



## 12 Fluid-Dynamik

### 12.1 Fluide

Deformation eines Körpers kann heißen:

- Formänderung wie Scherung, Biegung, Verdrillung (Festkörper)
- Volumenänderung wie Kompression, Dilatation (Festkörper, Fluide, Gase)

**Fluide:** Sind Substanzen, die strömen können, wie Flüssigkeiten, Gase. Daher Beschreibung nicht durch Masse / Kraft sondern durch Dichte und Druck.

#### 12.2.1 Dichte

$$\underline{\rho = m/V} \quad \text{für homogenes Medium}$$

$$[\rho] = \text{kg/m}^3 \quad \text{Skalar}$$

#### 12.2.2 Druck

Druck des Fluids bewirkt eine Kraft  $F$  auf den Kolben der Fläche  $A$

$$\underline{p = |\vec{F}|/A} \quad \text{Skalar ohne Richtungsabhängigkeit}$$

$$[p] = \text{N/m}^2 = \text{Pa} \quad (\text{Pascal})$$

Atmosphärendruck  $1 \text{ atm} = 1,013 \text{ bar} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ Torr}$

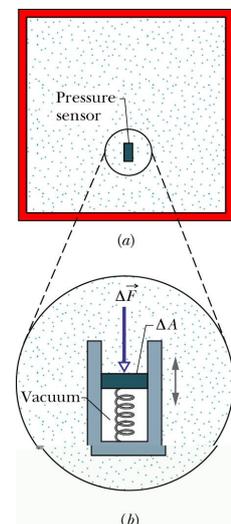
Anwendung: Federdruckmanometer

Merkhilfe: Bleistiftdruck der Spitze größer als der der Rückseite

**Bsp.** Welche Masse hat die Luft in einem Zimmer der Größe  $3,5\text{m} \times 4,2\text{m} \times 2,4 \text{ m}$  bei

Atmosphärendruck  $p = 1,013 \text{ bar}$ ?

Lsg.



**Exp.** Magdeburger Halbkugel (1654, Otto von Guericke)

Wenn man der Luft einen Druck zordnen kann, dann muss sie auch eine Druckkraft bewirken. Kiste Wasser hängt an evakuierte Kugel.

Kräfte:  $F = pA$                       Radius  $r = 5 \text{ cm}$

$$F = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot \pi(0,05\text{m})^2 = 796 \text{ N}$$

**Exp.** Schokoküsse explodieren im Vakuum

### 12.3 Hydrostatischer Druck in ruhenden Fluiden

Erfahrung: Taucher:    Wasserdruck nimmt mit steigender Wassertiefe zu

Bergsteiger: Luftdruck nimmt mit steigender Höhe ab

Gesucht: Druck als Funktion der Tiefe in Becken mit ruhendem Wasser, d.h. Gleichgewicht

Betrachte zylinderförmiges Wasservolumen

$$V = A(y_1 - y_2)$$

Kräfte auf Testvolumen:

$F_1 = p_1 A$     durch Wasser oberhalb des Zylinders

$F_2 = p_2 A$     durch Wasser unterhalb des Zylinders

$mg = \rho A(y_1 - y_2)g$     Gravitation auf Wasser im Zylinder,  $A(y_1 - y_2) = \text{Verdrängung}$

$$F_2 = F_1 + mg$$

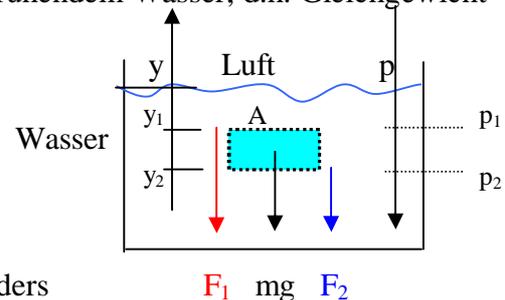
$$\Rightarrow p_2 = p_1 + \rho(y_1 - y_2)g \quad (A \text{ gekürzt})$$

#### Wasserdruck in Tiefe $h$

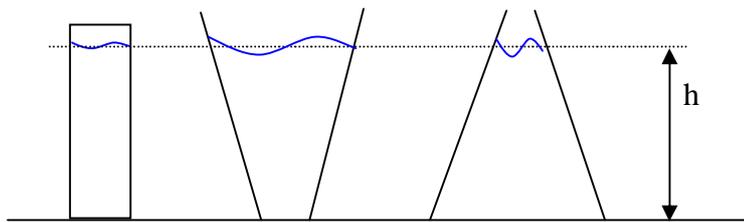
Wasseroberfläche  $y_1 = 0$ , Luftdruck  $p_1 = p_0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{p = p_0 + \rho gh}} \quad \text{FOLIE DRUCKVERHÄLTNISSE}$$

$\Rightarrow$  Der Druck an einem Punkt in einem Fluid im statischen Gleichgewicht hängt nur von der Tiefe des Punktes ab, aber nicht von den Abmessungen des Behälters.



**Bsp.** Alle Behälter sind mit Öl gefüllt. Ordne nach Größe des Drucks auf der Bodenfläche



Lsg

**Bsp.** (selber rechnen)

Für alle, die Omas Weihnachtsgeld beim Tauchen im roten Meer verprassen: Ein Anfänger im Scuba-Tauchen nimmt in einer Tiefe  $h$  aus dem Atemgerät ausreichend Luft zu sich um seine Lungen so weit zu füllen wie es geht. Dann schwimmt er nach oben an die Wasseroberfläche aber hört nicht auf seinen Lehrer und atmet nicht aus. Oben angekommen wirkt ein Druckunterschied zwischen Luft und Lunge von 9,3 kPa. Aus welcher Tiefe ist er gestartet?

Lsg.  $p = p_0 + \rho gh$  Druck in Tiefe  $h$  auf Lunge und Blut

$p_0$  Luftdruck an Oberfläche

$\Rightarrow \Delta p = p - p_0 = \rho gh$  Überdruck der Lunge nach aussen & gegenüber Blut

$h = \Delta p / \rho g = 9300 \text{ Pa} / (998 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2) = 0,95 \text{ m}$

$\Rightarrow$  Problem: Lungen reißen und Luft wird in's Blut gepresst, Luft wandert zum Herzen.

## 12.4 Druckmessung im Quecksilberbarometer

**Exp.** U-Rohr mit Vakuumpumpe ansteuern

Glasröhre mit Hg gefüllt, kopfüber in Hg-Bad gestellt, Hg fließt in's Bad,

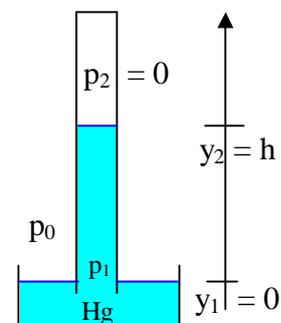
$\Rightarrow$  oberer Raum Vakuum (Hg-Dampf ist vernachlässigbar)

gesucht: Abhängigkeit Hg-Säulenhöhe von Luftdruck  $p_0$

$\Rightarrow p_1 = p_2 + \rho gh$  (Formel aus 12.3)

mit  $y_1 = 0, p_1 = p_0$  (Luftdruck)

$y_2 = h, p_2 = 0$



$\Rightarrow \underline{p_0 = \rho gh}$  Druck abh. von Temp über  $\rho(T)$ , Ort auf der Erde über  $g$

Hg-Höhe in mm entspricht dem Druck in Torr, wenn  $T = 0^\circ\text{C}$ ,  $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$

## 12.5 Pascalsches Prinzip

Eine Druckänderung in einem abgeschlossenen inkompressiblen Fluid wird unvermindert auf jeden Teil des Fluids sowie die Wände abgegeben.

$$p = p_{\text{ext}} + \rho gh$$

$$\Rightarrow \Delta p = p_{\text{ext}} \quad \text{für Punkt in konstanter Tiefe } h$$

d.h. wenn sich der Druck in konstanter Wassertiefe ändert, dann nur weil sich der externe Druck ändert

**Exp.** Wagenheber, Hydraulikpresse

### Anwendung: Hydraulik-Press

Kräfte: Druck auf beide Flächen ist gleich groß

$$\Rightarrow \Delta p = F_1 / A_1 = F_2 / A_2$$

$$\Rightarrow F_2 = F_1 \cdot A_2 / A_1$$

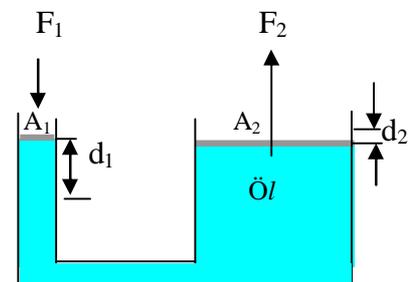
Kräfte und Flächen verhalten sich invers

Arbeit: Hebelbewegungen verdrängen das selbe Volumen

$$V = d_1 A_1 = d_2 A_2$$

$$\Rightarrow d_2 = d_1 A_1 / A_2$$

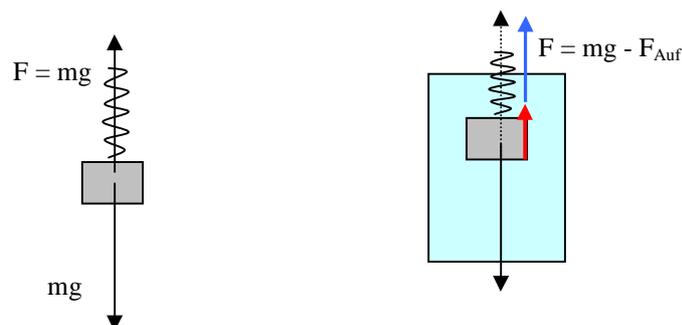
$$\Rightarrow W = F_2 d_2 = (F_1 \cdot A_2 / A_1) (d_1 A_1 / A_2) = F_1 d_1$$



Kleine Kraft, die auf langem Weg wirkt, wird umgewandelt in große Kraft, die auf kleinem Weg wirkt. Verhalten folgt direkt aus der Energieerhaltung, d.h. Kraft x Weg = konstant.

## 12.6 Archimedisches Prinzip

**Exp.** a) Masse hängt in Luft an Federwaage, b) Masse wird in Wasser gehängt => F sinkt



Prinzip: „Die Auftriebskraft auf einen schwimmenden Körper entspricht der Gewichtskraft des verdrängten Fluids.“

Der Auftrieb beruht auf dem mit steigender Wassertiefe ansteigenden Druck.

### Auftriebskraft

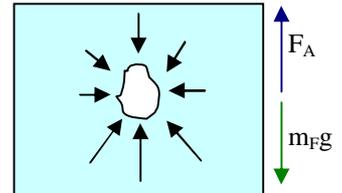
A) gewichtslose, mit Wassermasse  $m_F$  gefüllte, in Wasser schwebende Tüte, befindet sich im statischen Gleichgewicht

$$\Rightarrow \text{Kräftegleichgewicht } m_{FG} \vec{g} = F_A \vec{g}$$

Umgebungsasser übt Druck-Kräfte auf das Wasser in der Tüte aus

Summe der horizon. Kräfte = 0

Summe der vertika. Kräfte =  $F_A \vec{g}$  nach oben gerichtet, da untere Kräfte größer als oberen



B) selbe Tüte gefüllt mit Sand:

Tüte verdrängt selbe Menge Wasser  $\Rightarrow$  selbe Auftriebskraft  
aber größeres Gewicht

$$\Rightarrow m_{sg} > F_A \Rightarrow \text{Sand sinkt}$$

C) selbe Tüte gefüllt mit Holzsägespänen:

$$\Rightarrow m_{Hg} < F_A \Rightarrow \text{Holz steigt auf}$$

### Generell:

Die Auftriebskraft auf einen Gegenstand in einem Fluid hat den Betrag  $m_{FG} \vec{g} = F_A \vec{g}$ ,

Auftrieb, wenn  $m_{FG} > m_{Körper}g$ , also wenn

$$\frac{m_{Körper}}{m_{Fluid}} = \frac{\rho_{Körper} \cdot V}{\rho_{Fluid} \cdot V} = \frac{\rho_{Körper}}{\rho_{Fluid}} < 1$$

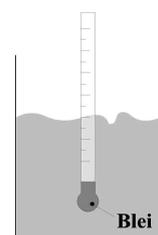
**Exp. 1** Kartesischer Taucher, vorführen, danach beschreiben lassen,  $p_{ext}$  geändert

**Exp. 2** Auftrieb einer luftgefüllten Glaskugel an Waage entfällt im Vakuum,

**Bsp.** Sie wetten einen schweren Stein heben zu können. Zeigen Sie das unter Wasser, dann hilft Ihnen der Auftrieb.

**Anwendung:** Aräometer zur Dichtebestimmung von Flüssigkeiten. Gerät sinkt so weit ein, bis Auftriebskraft = Schwerkraft im Gleichgewicht, also bei

$$mg = \rho_{Fluid} Vg$$



## 12.7 Strömung idealer Fluide

wir betrachten nur die Strömung vereinfachter, idealer Fluide unter folgenden Annahmen:

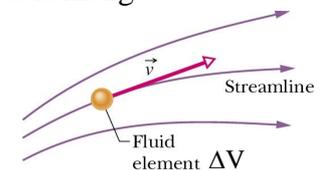
FOLIE ZIGARETTENRAUCH, WINDKANAL

- 1) Laminar: gleichmäßige Strömung, in festem Punkt ist die Geschwindigkeit konstant  
(ruhiger Fluß: laminar, Stromschnellen: nicht-laminar, d.h. turbulent)
- 2) Inkompressibel: Dichte des Fluids überall konstant
- 3) Nichtviskos: ohne Energieverlust, da Viskosität ein Maß der inneren Reibung ist  
(Bewegung in nicht-viskosem Fluid ist widerstandsfrei)
- 4) Wirbelfrei: kein Energieverlust, rotationsfrei  
(Teilchen in der Strömung dreht sich nicht um seinen Schwerpunkt)

### Stromlinien

- Stromlinien beschreiben den Weg eines kleinen Fluidelements in der Strömung
- können durch Tracer sichtbar gemacht werden
- Geschwindigkeit tangential zur Bahnkurve
- schneiden sich nie

(sonst gäbe es an einem Punkt zwei verschiedene Geschw.)

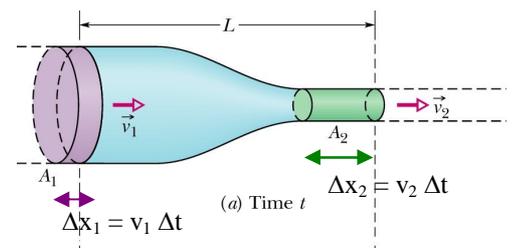


## 12.8 Kontinuitätsgleichung

Beobachtung: die Geschwindigkeit des aus einem Gartenschlauch austretenden Wasserstrahls kann man erhöhen, wenn man das Schlauchende zudrückt, d.h. den Querschnitt verkleinert.

Fluid strömt in Zeit  $\Delta t$  durch verengtes Rohr

gilt: eintretendes = austretendes Volumen (da inkompressibel)



strömendes Volumen:  $\Delta V = A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$

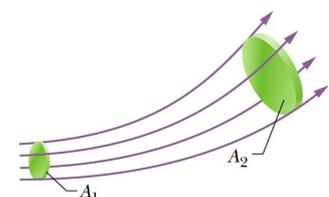
$$\Rightarrow \underline{A_1 v_1 = A_2 v_2} \quad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

### Flußröhre

Kontinuitätsgleichung gilt auch für imaginäre Flußröhre, d.h. Rand wird nur durch Stromlinien gebildet. Möglich, da Stromlinien sich nicht kreuzen können.

**Volumenflussrate**  $R_V = Av = \text{konstant}$   $[R_V] = \text{m}^3/\text{s}$

**Massenflussrate**  $R_M = \rho R_V = \rho Av = \text{konstant}$   $[R_M] = \text{kg}/\text{s}$



### 12.9 Bernoulli-Gleichung

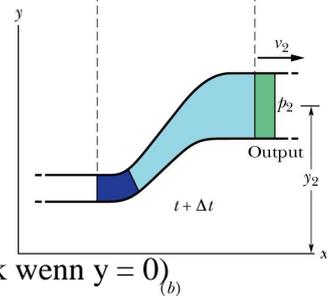
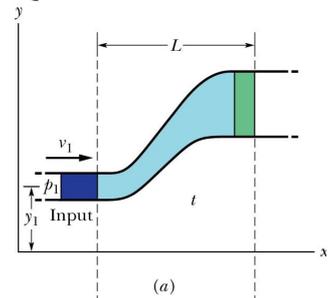
Zusammenhang zwischen Druck und Geschwindigkeit. Bildet Grundlagen der Luftfahrt.

identisches Volumen strömt von links nach rechts durch Röhre mit variablen Querschnitt

Dann gilt: (D. Bernoulli, ~ 1700)

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2 = p_0 = \text{konstant}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = p_0 = \text{konstant}}}$$



mit v: Fließgeschwindigkeit

p: statischer Druck in Fluid

$\frac{1}{2} \rho v^2$ : Staudruck

$\rho g y$ : hydrostatischer Druck (abh. von Fluidtiefe)

$p_0 = \text{konst.}$ : Luftdruck über der Flüssigkeit, d.h.

Gesamtdruck, der entsteht, wenn  $v \Rightarrow 0$  (= Luftdruck wenn  $y = 0$ )

wenn  $y = \text{konst.}$ :  $\Rightarrow p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = p_0$

d.h. wenn die Geschw. (Staudruck  $\frac{1}{2} \rho v^2$ ) eines Volumenelements in einer horizontalen Stromline zunimmt, muss der statische Druck p abnehmen.

Beachte: reale Fluide sind wegen Viskosität, Kompressibilität komplexer.

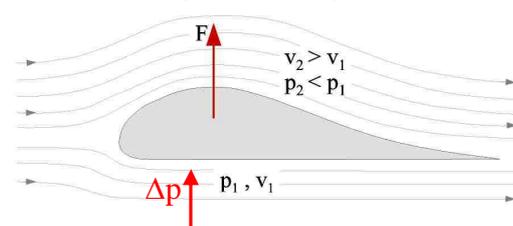
**Exp.** konisches Rohr hinter Windmaschine mit Drucksensoren längs der Stömungsachse  
 Kleiner Querschnitt  $\Rightarrow$  hohe Geschw.  $\Rightarrow$  kleiner Druck (Unterdruck)

**Exp.** Tragflächenprofil im Windkanal

Interpretation:

Stromliniendichte groß: v groß  $\Rightarrow$  p klein

Luft läuft oben schneller als unten wegen Wirbelbildung an Hinterkante (kompliziert)



### Beweis: Bernoulli-Gleichung

Ideales Fluid ändert seine Materialeigenschaften auf dem Weg durch das Rohr nicht. Wenn Fluidelement mit unterschiedl. Geschw. fließt, dann hat es unterschiedl. kinetische Energie:

$$\Delta E_{\text{kin}} = W \quad (\text{am Element geleistete Arbeit})$$

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2) \quad \text{Energiegewinn}$$

a) Gravitation  $W_g = -\Delta m g (y_2 - y_1)$  (Anheben des Fluidelements kostet Arbeit)

$$= -\rho g \Delta V (y_2 - y_1)$$

b) Druck  $W_p = F \Delta x = p A \Delta x = p \Delta V$  (Fließen gegen den Über- / Unter-Druck)

$$W_{p1} = p_1 \Delta V \quad (\text{Fluid wird hineingesaugt, da } v \text{ zunimmt, Energiegewinn})$$

$$W_{p2} = -p_2 \Delta V \quad (\text{Fluid muss hinausgedrücken, da } v \text{ abnimmt, Energieverlust})$$

$$\Rightarrow W_p = -(p_2 - p_1) \Delta V$$

In Energieerhaltung einsetzen

$$\frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2) = -\rho g \Delta V (y_2 - y_1) - (p_2 - p_1) \Delta V \quad (\text{durch } \Delta V \text{ teilen})$$

kin. Energie
pot. Energie
Druckarbeit

$$\Rightarrow p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2 \quad \text{q.e.d.}$$

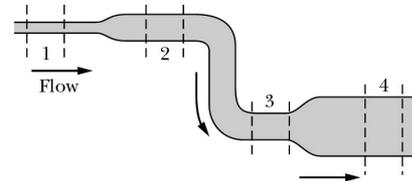
**Bsp.** Laminare Strömung fließt nach rechts

Ordne, beginnend mit dem größten:

a) Volumenrate gleich,

b) Geschw.  $v$  1, (2 / 3), 4

c) Wasserdruck 4, 3, 2, 1  $p = konst - \frac{1}{2} \rho v^2 - \rho g y$



## 12.10 Druckmessung

### 12.10.1 Drucksonde

gesucht: statischer Druck  $p_1$  im durchströmten Rohr,

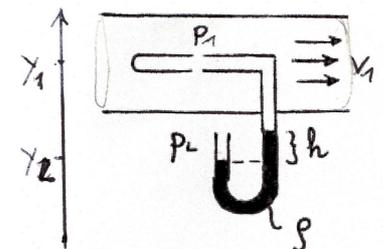
Fluid: strömt tangential an seitlicher Meßöffnung vorbei

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_L + \frac{1}{2} \rho v_L^2 + \rho g y_L$$

mit  $v_L = 0$ ,  $y_1 = y_L$ ,  $p_L = \text{Luftdruck}$

$$\Rightarrow p_1 = p_L - \frac{1}{2} \rho v_1^2 \quad (\text{Messgerät zeigt Druckdifferenz } p_1 \text{ an})$$

statischer Druck  $p_1$  wird durch Staudruck reduziert. Wenn  $v_1 = 0 \Rightarrow p_1 = p_L$ ,

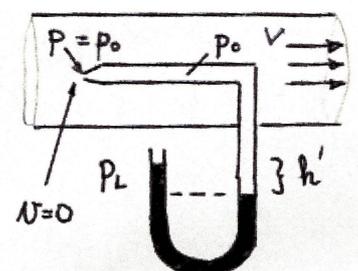


### 12.10.2 Pitot-Rohr

gesucht: Gesamtdruck  $p_0$  der in ruhendem Fluid herrschen würde

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = p_0 = konst$$

ruhend: in Messröhre  $v = 0$ , denn Röhre ist geschlossen,



Luftteilchen, welches direkt auf Loch zufliegt, muß abgebremst werden, d.h. hier herrscht dann der Gesamtdruck  $p_0$ , also

$$\Rightarrow p_0 = p + \frac{1}{2}\rho v^2 \quad (\text{vor Messröhre } v \neq 0)$$

### Exp. Magnuseffekt

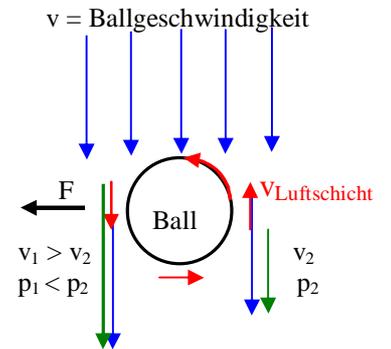
Fliegender und rotierender Ball beschreibt eine gekrümmte Bahn

Ursache: Balloberfläche ist rau und nimmt Luftschicht mit

$$v_{\text{Luftschicht}} = \omega r$$

$$\Rightarrow v_1 = v + v_L, \quad v_2 = v - v_L$$

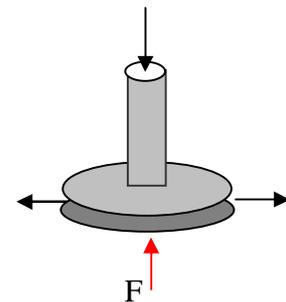
$$\Rightarrow \text{Unterdruck } \Delta p = p_1 - p_2 \Rightarrow \text{Kraft } F = \Delta p A$$



### Hydrodynamisches Paradoxon

Ausströmendes Fluid mit hoher Geschw.  $v$  erzeugt Unterdruck

z.B. Durchzug  $\Rightarrow$  Tür knallt zu, Staudruck öffnet die Tür



**Exp.** zwischen zwei gewölbten Flächen durchpusten  $\Rightarrow$  Unterdruck zieht sie zusammen

**Zusammenfassung:** Prüfungstrainer Kapitel 1.6, Fragen 1.6.1 – 1.6.14

## B. Schwingungen

### 1. Schwingungen

Fast alles schwingt, d.h. der Zustand ändert sich periodisch mit der Zeit wie in Kreisbewegung. Bsp. Uhr, Kolben im Automotor, wippende Boote auf dem Wasser.

#### 1.1 Harmonische Schwingung

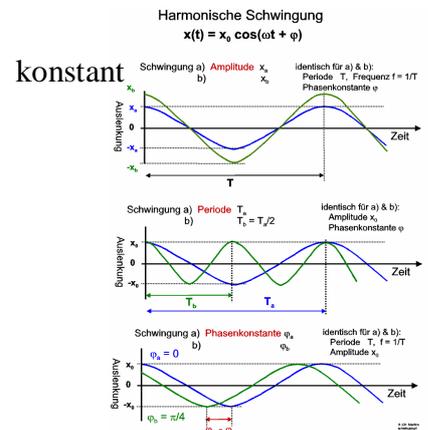
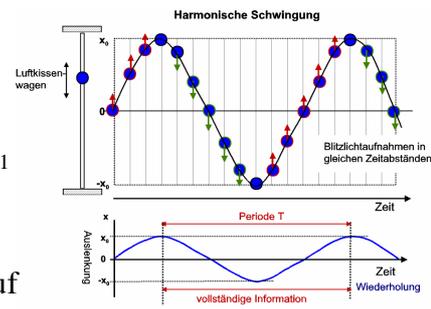
die einfachste Schwingung ist die harmonische Schwingung

**Exp.** physikalisches Pendel, Federpendel, Torsionspendel, Wagen zwischen 2 Federn auf Luftkissenbahn, Ball, Stimmgabel

Frequenz:  $f = \text{Anzahl der Schwingungen pro Sekunde}$   
 $[f] = 1 \text{ Hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ Schwingung} / \text{s} = 1 \text{ s}^{-1}$

Periode: Schwingungsdauer für vollständigen Durchlauf  
 $T = 1 / f \quad [T] = \text{s}$

Bewegung:  $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$   
 $x(t)$ : Auslenkung, Ort ändert sich mit Zeit  $t$   
 $\omega t + \varphi$ : Phase  
 $x_0$ : Amplitude, maximale Auslenkung  
 $\omega = 2\pi f$ : Kreisfrequenz  
 $\varphi$ : Phasenkonstante / Verschiebung



#### Kreisfrequenz $\omega \Leftrightarrow$ Frequenz $f$

Alter Ort muss nach voller Periode  $T$  wieder erreicht werden, also

$$x(t) = x(t + T)$$

$$x_0 \cos \omega t = x_0 \cos \omega(t + T)$$

cos-Funktion wiederholt sich nach voller Umdrehung, wenn Argument um  $2\pi$  zunimmt, d.h.

Periode  $T$  entspricht  $2\pi$  der Kreisbewegung

$$\Rightarrow \omega(t + T) = \omega t + 2\pi$$

$$\Rightarrow \omega T = 2\pi$$

$$\Rightarrow \omega = 2\pi/T = 2\pi f \quad \text{beachte: } \varphi \text{ immer in rad, } \omega \text{ in } 1/\text{s}$$

**Bsp.** Teilchen führt harmonische Schwingung aus und befindet sich zur Zeit  $t = 0$  bei  $-x_0$ .

**Frage** Wo befindet es sich zur Zeit  $t = 2T$  ?  $t = 1/2T$ ,  $t = 3/4T$  ?

Lsg

**Exp.** 2 identische Feder-Masse Systeme schwingen phasenverschoben

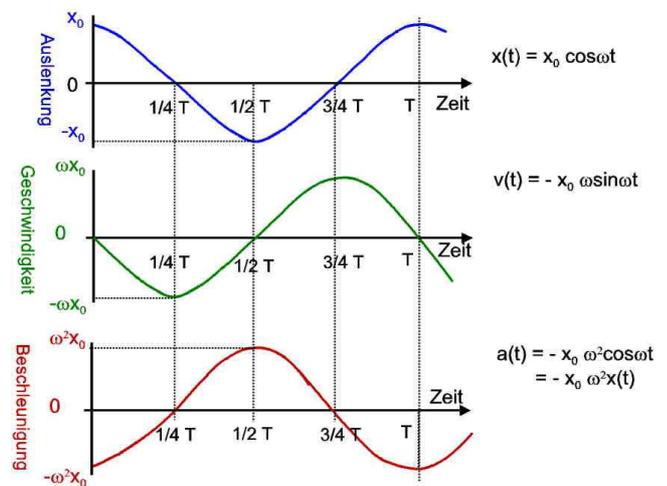
**Exp.** 2 blinkende Lampen phasenverschoben bzw. unterschiedl. Frequenz

### 1.1.2 Geschwindigkeit

$$\begin{aligned}
 v(t) &= dx(t)/dt \\
 &= d/dt[x_0 \cos(\omega t + \varphi)] \\
 &= -x_0 \omega \sin(\omega t + \varphi) \\
 v(t) &= v_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{mit } v_0 = -x_0 \omega
 \end{aligned}$$

### 1.1.3 Beschleunigung

$$\begin{aligned}
 a(t) &= dv(t)/dt \\
 &= d/dt[-x_0 \omega \sin(\omega t + \varphi)] \\
 &= -x_0 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \\
 a(t) &= a_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{mit } a_0 = -x_0 \omega^2
 \end{aligned}$$



**Generell** harmonische Schwingung:  $a(t) = -\omega^2 x(t)$

- Beschleunigung ist proportional zur Auslenkung
- Beschleunigung ist immer zur Ruhelage gerichtet
- Schwingungen treten immer auf, wenn Kraft in Gleichgewichtslage zurück treibt

## 1.2 Harmonischer Oszillator

Federkraft  $F = -kx$

Beschleunig.  $F = ma$

$$\Rightarrow ma + kx = 0$$

DGL  $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$  (Differentialgleichung)

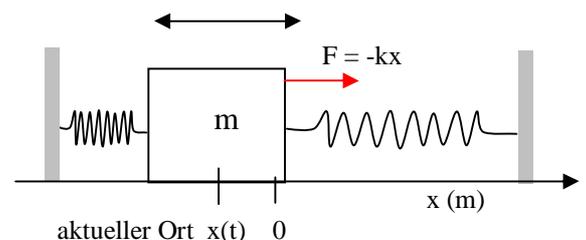
Lösung:  $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$  Lsg. ist Funktion, die jederzeit die DGL erfüllt

Lsg. in DGL  $-x_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{k}{m} x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) = 0$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{k/m} \quad \text{Eigenfrequenz, charakterist. für System, unabh. von Amplitude}$$

Harmonischer, linearer Oszillator, da  $F \sim x$  (nicht  $\sim x^2, \sqrt{x}, \dots$ )

**Generell:** jedes oszillierende System hat etwas „Rücktreibendes“ (k) und etwas „Träges“ (m).



**Bsp.** Ein Astronaut will im schwerelosen Weltraum seine Masse  $m_A$  ermitteln.

**Frage:** Wie macht er das? Federwaage funktioniert nicht!

Lsg:

**Frage:** Maximalauslenkung sei 8 cm nach 0,2s. Gebe Schwingungsgleichung an.

Lsg:

**Frage:** zeichne  $x(t)$

Lsg:

**Frage** Maximale Geschwindigkeit des Astronauten und wo tritt sie auf?

Lsg:

### 1.3 Energie der Schwingung

Die potenzielle Energie eines linearen Oszillators hängt allein vom Zustand der Feder ab

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} kx^2$$

$$= \frac{1}{2} k x_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \quad \text{Beachte } \cos^2 A = (\cos A)^2 \text{ aber } \cos A^2 = \cos(A^2)$$

Die kin. Energie hängt allein vom Zustand der Masse, also von der Geschwindigkeit ab

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} mv^2$$

$$= \frac{1}{2} m x_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad \text{mit } \omega = (k/m)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} x_0^2 k \sin^2(\omega t + \varphi)$$

## Gesamtenergie

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$$

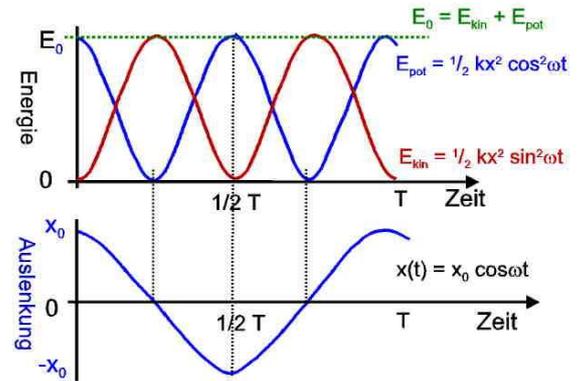
$$= \frac{1}{2} k x_0^2 [\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)]$$

$$\text{mit } \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

$$\underline{E = \frac{1}{2} k x_0^2}$$

beachte Ort:  $-x_0 \leq x(t) \leq x_0$

Energie:  $0 \leq E(t) \leq E_0$  (immer positiv)



Linearer Oszillator: - Rücktreibendes Element (Feder) speichert die potenzielle Energie,  
- träges Element (Masse) speichert die kinetische Energie

### 1.4 Kreisbewegung und harmonische Schwingung

**Exp.** rotierende Scheibe mit Korke, Projektion des Korkens auf Wand  
Schwinger Stift schreibt auf Overhead-Folie

=> Eine harmonische Schwingung entsteht als Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung auf eine Achse durch die Mitte des Kreises.

Punkt P bewegt sich gleichförmig mit  $\omega$  auf Kreis:

Koordinatenwahl für P(t)

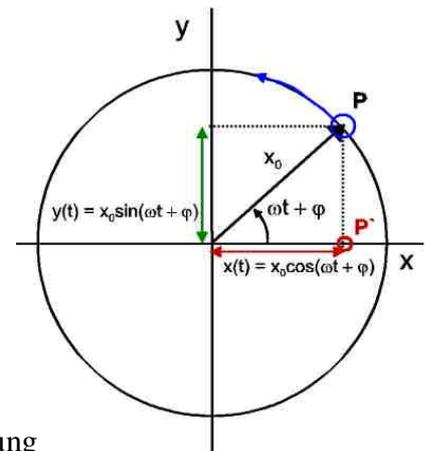
1) Radius  $x_0$  und Winkel  $\theta = \omega t + \varphi$

2)  $P(t) = (x(t), y(t)) = (x_0 \cos(\omega t + \varphi), x_0 \sin(\omega t + \varphi))$

Winkelposition zu  $t = 0$  ist  $\varphi$

=> Projektion von P auf die x-Achse ergibt Punkt P',

$P(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$  beschreibt eine harmonische Schwingung



Für Kreisbewegung muss gelten:

$$x(t)^2 + y(t)^2 = x_0^2 = \text{konstant für alle Zeiten } t$$

$$\text{Bew. } x_0^2 [\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)] = x_0^2$$

## 2.1 Einfaches Pendel

**Exp.** 2 Kugeln mit Masse  $m_1 = m_2$  an verschiedenen Seilen  $L_1, L_2 \Rightarrow f$  verschieden

**Exp.** 2 Seile mit  $L_1 = L_2$  aber  $m_1, m_2$  verschieden

$\theta$ : Auslenkung aus Ruhelage bei  $\theta = 0$

$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$  Rücktreibendes Drehmoment

$T = -L F_g \sin\theta$  L: Hebelarm,  $F_g \sin\theta$ : Kraftkomponente

Minus, da Drehmoment  $\theta$  verkleinern will

$T = I \alpha$   $\alpha = d^2\theta / dt^2$ : Winkelbeschleunigung

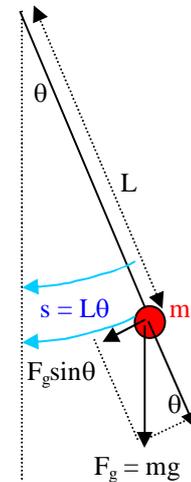
$I = mL^2$  Trägheitsmoment

$\Rightarrow I \alpha = -L mg \sin\theta$  Näherung  $\sin\theta \sim \theta$  wenn  $\theta$  klein,  $\theta$  in rad !

Bsp.  $\theta = 5^\circ = 0,0873 \text{ rad} \approx \sin\theta = 0,0872$

$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$  DGL

$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$  Lsg. der DGL



Eigenfrequenz bestimmen durch Einsetzen der Lösung in DGL

$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ ,  $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$  Periode

Pendel ist für kleine Auslenkungen auch ein harmonischer Oszillator, da  $\alpha = -\omega_0^2 \theta$

**Bsp.** ändere Abstand Masse – Drehachse  $\Rightarrow T$  wächst, Pendeluhren einstellen Bsp.

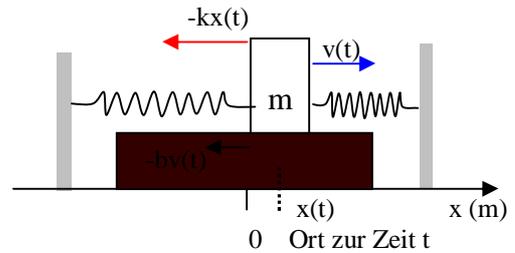
Messung von  $T \Rightarrow$  Bestimmung der Gravitationskonstante  $g$

Folie CHAMP, Geoforschungszentrum Potsdam

### 3. Erzwungene Schwingung

#### 3.1 Dämpfung

**Exp.** gedämpfte Schwingung



Schwingung : periodische Wandlung von kin. in pot. Energie

Dämpfung: Reibung verbraucht Energie, die der Schwingung entzogen wird

Reibungskraft  $F_R = -bv$  (gilt nur für langsame Bewegung)

$b$ ,  $[b] = \text{kg/s}$  Reibungskoeffizient

Kräftegleichung  $ma = -bv - kx$

$\Rightarrow m(d^2x/dt^2) + b(dx/dt) + kx = 0$  mit Dämpfung  $\delta = b/2m$

$\Rightarrow \text{DGL } \underline{\underline{(d^2x/dt^2) + 2\delta(dx/dt) + (k/m)x = 0}}$

Lsg:  $\underline{\underline{x(t) = x_0 \cdot \exp\{-\delta t\} \cdot \cos(\omega' t + \varphi)}}$  Funktion des Ortes  $x(t)$  des Teilchens

$$\underline{\underline{\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \delta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}}$$

Beweis: im Praktikum

Eigen-Frequenz bei Dämpfung

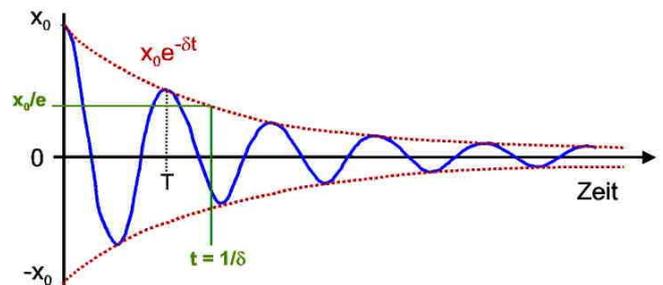
**Neu:**

Amplitude  $x_0 \exp\{-\delta t\}$  fällt exponentiell mit Zeit  $t$

Kreisfrequenz  $\omega' < \omega_0$  (kleiner Effekt)

Abklingzeit:  $\tau = 1/\delta \Rightarrow x(1/\delta) = x_0/e \approx 0,37x_0$

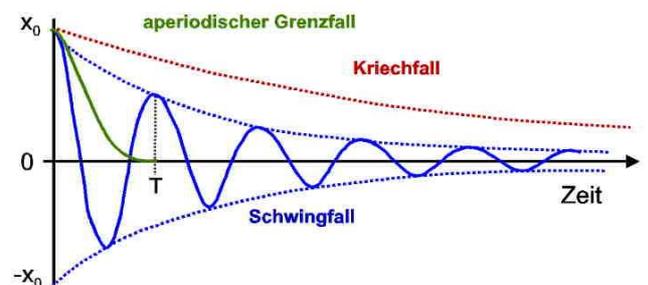
Verhältnis:  $x(t)/x(t+T) = \exp\{-\delta T\} = \text{konstant}$   
typischer Test ob exp-Funktion



#### Dämpfungsfälle

gegeben durch  $\omega' = \sqrt{k/m - \delta^2}$

- 1) Schwingfall:  $\delta^2 < k/m \Rightarrow \omega' > 0$
- 2) aperiodischer Grenzfall:  $\delta^2 = k/m \Rightarrow \omega = 0$
- 3) Kriechfall:  $\delta^2 > k/m \Rightarrow \omega$  imaginär



## Energieverlust

Gesamtenergie nimmt mit der Zeit exponentiell ab

$$E(t) = \frac{1}{2} k x(t)^2 = \frac{1}{2} k x_0^2 e^{-2\delta t} \quad \text{nimmt schneller ab als Amplitude, da } E \sim x^2$$

$$\Rightarrow P = dE/dt = -2\delta E(t) \quad \text{Verlustleistung}$$

**Gütefaktor**  $Q := (2\pi \text{ Energie}) / (\text{Energieverlust in einer Periode})$

$$= 2\pi E / (dE/dt \cdot T) = -E\omega' / (dE/dt) = \omega' / 2\delta,$$

je größer  $Q$ , desto kleiner ist der Dämpfungsverlust eines Systems

## 3.2 Resonanz

Energieverlust der gedämpften Schwingung kann durch Energiezufuhr von außen kompensiert werden, wenn sie im richtigen Takt erfolgt, also bei erzwungener Schwingung.

Bsp. Schaukel muss im richtigen Takt angestoßen werden, es genügen kleine Amplituden

**Exp.** Praktikumsversuch

Neu: zwei schwingende Systeme a) Schaukel mit eigener Kreisfrequenz  $\omega'$

b) äußere anregende Kraft  $F_a$  mit Kreisfrequenz  $\omega_a$

$$\Rightarrow m(d^2x/dt^2) + b(dx/dt) + kx = F_a \cos(\omega_a t) \quad \text{Kräftegleichung}$$

Beschleunigung    Reibungskraft    Rückstellkraft    Externe Kraft

$\Rightarrow$  Bewegungsgleichung beschreibt die Schwingung

$$\underline{(d^2x/dt^2) + 2\delta(dx/dt) + (k/m)x = F_a/m \cos(\omega_a t)} \quad \text{(Differentialgleichung)}$$

Lsg:  $x(t) = x_0 \cos(\omega_a t + \varphi)$

Ort des Teilchens für  $t \gg 1/\delta$

$$x_0 = F_a / [m^2(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2 + b^2\omega_a^2]^{1/2}$$

Amplitude

$$\omega_0 = (k/m)^{1/2}$$

Eigenfrequenz ohne Dämpfung

$$\omega' = (\omega_0^2 - \delta^2)^{1/2}$$

Eigenfrequenz mit Dämpfung

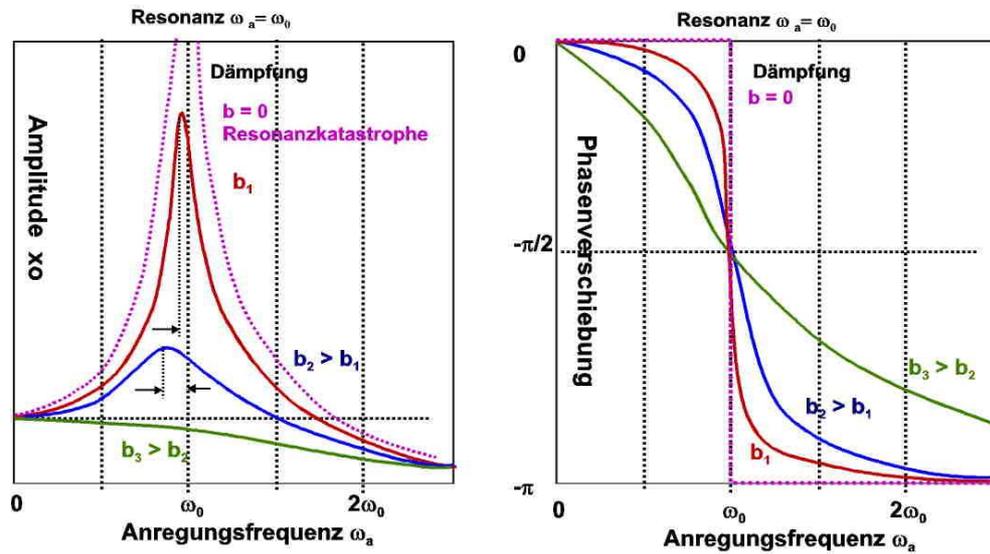
$$\varphi = \arctan\{2\delta\omega_a / (\omega_0^2 - \omega_a^2)\}$$

Phasenverschiebung System zu Anregung

**Neu:** System schwingt nicht mit Eigenfrequenz  $\omega_0$  sondern mit externer Frequenz  $\omega_a$ ,

System und externe Anregung schwingen phasenverschoben, abh. von  $(\omega_0^2 - \omega_a^2)$

Amplitude hängt stark von  $(\omega_0^2 - \omega_a^2)$  ab, ist maximal bei  $\omega_0 \approx \omega_a$  (Resonanz)



exakt  $\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$  = Position des Resonanzmaximums, folgt aus

$$\frac{dx_0}{d\omega_a} = 0$$

gilt:  $\omega_{res} < \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ , d.h. kleiner als Eigenfrequenz für gedämpfte Schwingung

Grenzfälle

a)  $\omega_a \ll \omega_0$  System wird von  $F_a$  langsam bewegt, Rückstellkraft dominiert

keine Phasendifferenz zwischen Ort &  $F_a$  (im Takt)

keine Leistungsaufnahme des Systems

b)  $\omega_a \gg \omega_0$  Trägheit dominiert, Beschleunigung

Ort und Kraft  $F_a$  um  $\varphi = -\pi$  phasenverschoben

Keine Leistungsaufnahme

c)  $\omega_a = \omega_0$  Resonanz, Ort und Kraft  $F_a$  um  $\varphi = -\pi/2$  verschoben

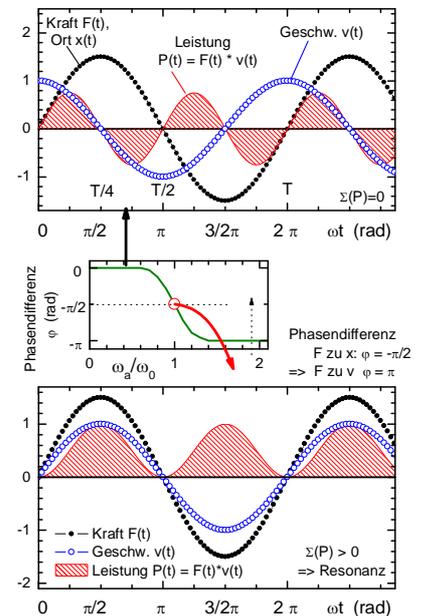
$$F_a(t) \sim \sin(\omega t)$$

$$x(t) \sim \sin(\omega t - \pi/2) = \cos(\omega t)$$

$$v(t) \sim dx/dt = \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow P = F_a(t)v(t) \text{ Leistungsaufnahme}$$

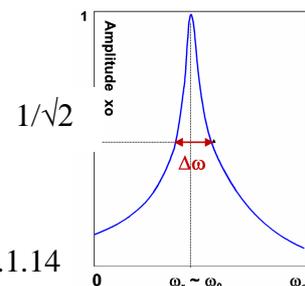
$$P \sim \sin^2(\omega t) \neq 0$$



### Halbwertsbreite

Aus der Halbwertsbreite lässt sich die Dämpfung ermitteln

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} = \frac{b}{\omega_0 m} \Rightarrow \Delta\omega = 2\delta$$



**Zusammenfassung:** Prüfungstrainer, Kapitel 2.1, Fragen F2.1.1 – 2.1.14

### 4. Wellen

Informationsübertragung ist möglich durch

- a) Teilchen (Brief), Materie bewegt sich von einem Ort zum anderen (Physik I)
- b) Wellen (Sprache, Handy), kein Materietransport, nur Energietransport z.B. durch Modulation des Mediums (Physik II)

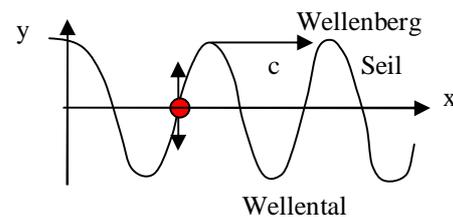
- 3 Typen
- a) Mechanische Wellen (Seil, Schall, Wasser)
  - b) Elektromagnetische Wellen (Funk, Licht, Röntgen) kein Medium notwendig
  - c) Wahrscheinlichkeitswellen (Elektronen, Protonen, Photonen)

#### 4.1 Wellenprinzip

Die Störung eines deformierbaren Mediums (Seil, Luft) breitet sich im Medium aus. Diesen zeitl. und räuml. veränderlichen Zustand bezeichnet man generell als Welle.

**Exp.** Seil / Feder durch Hörsaal spannen und Wellen anregen, Impuls läuft über das Seil

**Exp.** Wellenmaschine



- A) Transversale Welle: Auslenkung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung
- B) Longitudinale Welle: Auslenkung in Ausbreitungsrichtung

**Exp.** Feder in Längsrichtung anregen



Beachte: nur die Welle (Störung) breitet sich aus, nicht das Material selbst !

#### 4.2 Wellenlänge & Frequenz

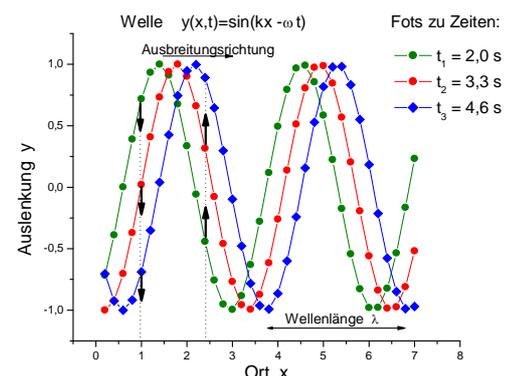
Schwingung eines Seilelementes am Ort x zur Zeit t

$$y(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$$

Auslenkung = Amplitude x Schwingungsterm

Amplitude  $y_0$  max. Auslenkung aus Gleichgewicht

Phase  $kx - \omega t$  Argument der Sinusfunktion  
 wächst linear mit t für festen Ort x



Wellenlänge  $\lambda$  *räumlicher* Abstand zwischen zwei Wiederholungen der Wellenformen

Bestimmung: Photo der Welle

$$y(x, 0) = y_0 \sin(kx), \quad t = 0$$

gilt  $y(x, 0) = y(x + \lambda)$

$$y_0 \sin(kx) = y_0 \sin(kx + k\lambda) \quad \text{Argumente des sin müssen gleich sein}$$

=>  $k\lambda = 2\pi$

Wellenzahl  $k = 2\pi/\lambda$   $[k] = \text{rad/m}$

Periode  $T$  *zeitlicher* Abstand zwischen zwei Wiederholungen der Wellenfront

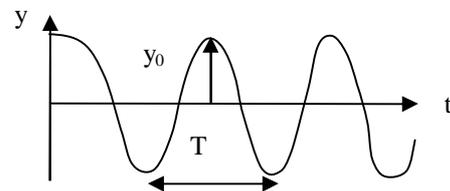
Bestimmung: Film drehen an festem Ort (Stab im Wasser bei  $x = 0$ )

$$y(0, t) = y_0 \sin(-\omega t) = -y_0 \sin(\omega t)$$

$$y(0, t) = y(0, t + T)$$

$$-y_0 \sin(\omega t) = -y_0 \sin(\omega t + \omega T)$$

=>  $\omega T = 2\pi$



beachte: ist nicht die Wellenform !

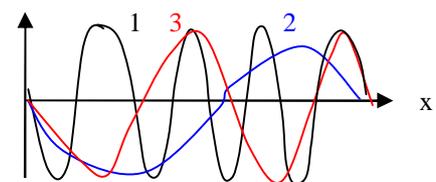
Kreisfrequ.  $\omega = 2\pi/T$   $[\omega] = \text{rad/s}$

Frequenz  $f = 1/T = \omega/2\pi$

Die Frequenz einer Welle ist die Schwingungsfrequenz eines beliebigen Seilelementes, wie beim harmonischen Oszillator. Alle Seilelemente haben die gleiche Frequenz

**Bsp.** Momentaufnahmen von Wellen mit Phasen:

- a)  $2x-4t$ , b)  $4x-8t$ , c)  $8x-16t$ .



Frage Welche Phase entspricht welcher Welle ?

Lsg.

### 4.3.1 Phasengeschwindigkeit der Welle

Wellenflächen: Flächen einer Welle, die mit gleicher Phase ( $kx - \omega t$ ) schwingen

Kugelwellen: punktförmige Anregung breitet sich in alle Richtungen gleichartig aus

Ebene Wellen: Anregung liegt im Unendlichen

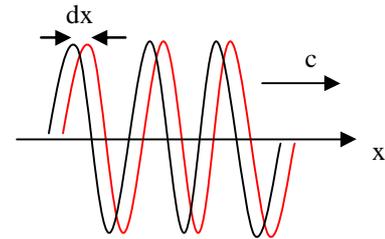
**Exp.** Wasserwanne & Kreiswellen

Mit welcher Geschwindigkeit breitet sich die Wellenfläche (Störung) aus?

Wellenfront  $y(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t) = \text{konstant}$

$$\Rightarrow kx - \omega t = \text{konstant}$$

$x, t$  ändern sich gleichermaßen



$$d/dt(kx - \omega t) = d/dt(\text{kons.}) \quad \text{Gl. nach t ableiten}$$

$$\Rightarrow k \, dx/dt - \omega = 0$$

$$\Rightarrow c = dx/dt = \omega/k \quad c: \text{Phasengeschwindigkeit der Welle (nicht Teilchengeschw)}$$

$$\underline{c = \lambda f} \quad \text{mit } \omega = 2\pi/T, \quad k = 2\pi/\lambda$$

$$c = \lambda/T \quad \text{Welle bewegt sich in einer Schwingungsperiode um ihre Wellenlänge}$$

#### 4.3.2 Geschwindigkeit eines Wellenpunktes

nicht mit Phasengeschwindigkeit verwechseln!

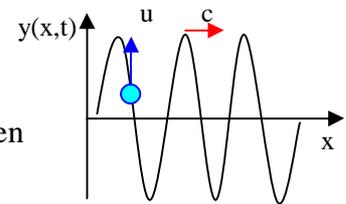
$$y(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$u = \partial y / \partial t$$

partielle Ableitung einer Variablen

$$u = -y_0 \omega \cos(kx - \omega t)$$

äußere x innere Ableitung



**Bsp.** Welle läuft ein Seil entlang mit  $y(x, t) = 0,0327 \sin(72,1 x - 2,72 t)$

**Frage** Amplitude der Welle?

Lsg.

**Frage** Wellenlänge, Periode, Frequenz der Welle?

Lsg.

**Frage** Phasengeschwindigkeit der Welle?

Lsg.

**Frage** Auslenkung der Welle am Ort  $x_1 = 22,5 \text{ cm}$  und Zeit  $t_1 = 18,9 \text{ s}$  ?

Lsg.

**Frage** Geschwindigkeit  $u$  eines Wellenpunktes in  $y$ -Richtung (nicht mit  $c$  verwechseln!)  
am Ort  $x_1 = 22,5 \text{ cm}$  zur Zeit  $t_1 = 18,9 \text{ s}$  ?

Lsg.

#### 4.4 Wellengleichung

Die bei uns behandelten Wellen sind Lösungen der Wellengleichung

Wellengl.  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$  Differentialgleichung 2ter Ordnung

Lösung  $y(x - ct)$  generelle Form

$y(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$  unsere spezielle Lösung

Geschw.  $c = \frac{\omega}{k} = \lambda f$  Berechnung für jedes Medium (Seil, Luft, ...) gesondert

#### 4.5 Geschwindigkeit $c$ der Seilwelle

Betrachte einen symmetrischen Impuls (Störung) der sich über ein gespanntes Seil ausbreitet.

Die Spannkraft des Seils treibt die „Beule“ über das Seil

$F_S$  Seilspannung

horizontale Komponenten heben sich auf  
vertikale Komponenten addieren sich

$$F = 2F_S \sin \theta \approx 2F_S \theta$$

$$= F_S \Delta l / R$$

vertikale Komponenten zeigen ins Zentrum und bilden die Zentripetalkraft

$$F_Z = m c^2 / R$$

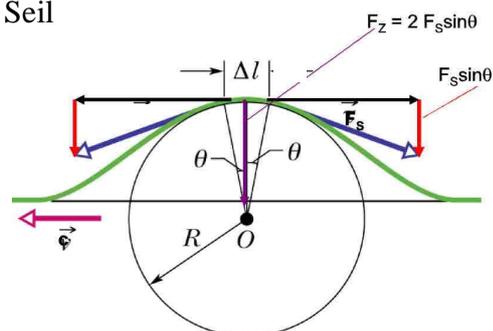
mit  $m = \mu \Delta l$  Masse des Seilelementes,  $\mu$  = lineare Massendichte

$$\Rightarrow F_S \Delta l / R = \mu \Delta l \cdot c^2 / R$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{c = \sqrt{F_S / \mu}}}$$

Geschwindigkeit der Seilwelle ist unabh. von Frequenz,

siehe später: Gitarrensaite spannen



### 4.6 Energietransport der Welle

Anregung / Ausbreitung einer Welle kostet Energie, die Störung wird über das Seil transportiert:

$$dE_{kin} = \frac{1}{2} (dm) u^2, \quad \text{Kinetische Energie des Seilelementes mit Masse } dm$$

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (y_0 \sin(kx - \omega t)) \text{ transversale Geschw. des Seilelementes}$$

$$dE_{kin} = \frac{1}{2} (\mu dx) (-\omega y_0)^2 \cos^2(kx - \omega t) \quad \mu = dm/l \text{ lineare Massendichte des Seils}$$

mit  $dE_{pot} = dE_{kin}$  (ohne Beweis)

$$\Rightarrow dE = dE_{kin} + dE_{pot} = (\mu dx) (-\omega y_0)^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

Zeitlich gemittelte Leistung P (Transportrate) beider Energieformen:

$$P = dE/dt \quad \text{mit} \quad c = dx/dt: \text{ Phasengeschw., Mittelwert von } \cos^2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{P = \frac{1}{2} \mu c \omega^2 y_0^2}} \quad \text{P ist proportional zum Amplitudenquadrat}$$

### 5. Überlagerung von Wellen

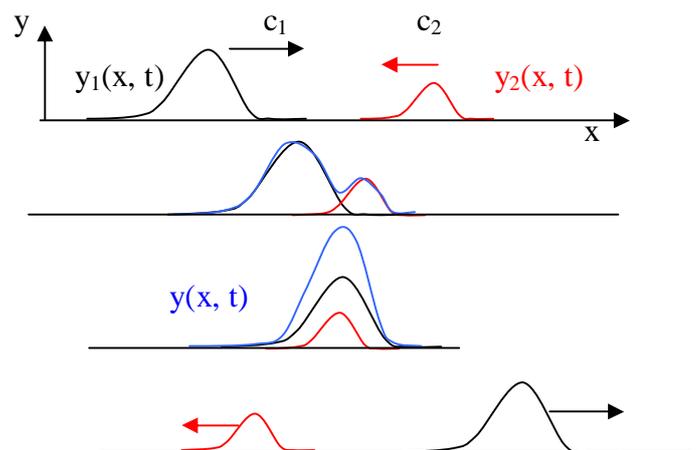
#### 5.1 Superpositionsprinzip

Zwei Wellen  $y_1(x, t)$  und  $y_2(x, t)$  breiten sich gleichzeitig auf dem selben Seil (Medium) aus

$$\Rightarrow y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \quad \text{(Superpositionsprinzip)}$$

Die Überlagerung von Wellen entspricht algebraischer Summe der einzelnen Wellen und ergibt eine resultierende Welle.

$\Rightarrow$  Überlappende Wellen beeinflussen sich bei ihrer Ausbreitung nicht.



#### 5.2 Interferenz

zwei identische Wellen  $y_1(x, t) = y_2(x, t)$  breiten sich in gleiche Richtung aus

$$y_1(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t + \varphi) \quad \text{einziger Unterschied: Phasenkonstante } \varphi$$

Was passiert bei der Überlagerung (Interferenz) gleicher Wellen?

$$y(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t) + y_0 \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

mit  $\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$  folgt

$$\Rightarrow y(x, t) = [2 y_0 \cos \frac{1}{2}\varphi] * \sin(kx - \omega t + \frac{1}{2}\varphi)$$

Auslenkung    Amplitude    Schwingungsterm

$\Rightarrow$  Sinus-Welle  $y(x, t)$  mit:

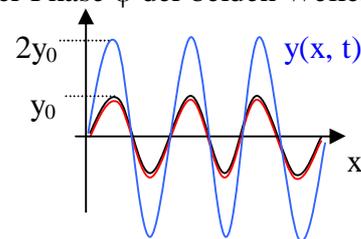
1) Phasenkonst.       $\frac{1}{2}\varphi$

2) Amplitude  $2y_0 \cos \frac{1}{2}\varphi$       stark abhängig von der Phase  $\varphi$  der beiden Wellen !

**Fall a)**  $\varphi = 0$  beide Wellen in Phase

$$\Rightarrow y(x, t) = 2 y_0 * \sin(kx - \omega t)$$

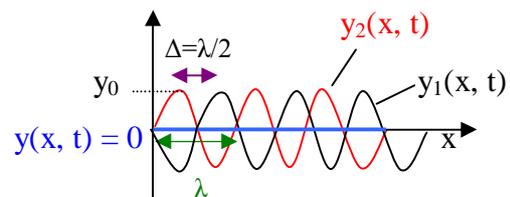
doppelte Amplitude, konstruktive Interferenz



**Fall b)**  $\varphi = 180$  beide Wellen außer Phase

$$\Rightarrow y(x, t) = 0 \quad \text{da } \cos 180 = 0$$

immer & überall Null, destruktive Interferenz



Gangunterschied  $\Delta$

ist Phasendifferenz  $\varphi$  von zwei gleichen Wellen gemessen in der Wellenlänge  $\lambda$  (eintragen)

Welle wiederholt sich exakt:  $\varphi = 2\pi$

$$\Delta = \lambda$$

Interferenz konstruktiv:  $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots n(2\pi)$

$$\Delta = 0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots n\lambda$$

Interferenz destruktiv  $\varphi = \pi, 3\pi, \dots (2n+1)\pi$

$$\Delta = \frac{1}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda, \dots (2n+1)/2\lambda$$

**Exp.** Interferenz in Wasserwanne mit zwei Wellenzentren

**Exp.** 2 Folien mit Kreisen auf Overheadprojektor

**Bsp.** 2 Wellen mit folgenden Gangunterschieden überlagern sich mit Gangunterschied:

$\Delta = 0,2\lambda, 0,45\lambda, 0,6\lambda, 0,8\lambda$  Ordne die resultierende Amplitude nach der Größe

Lsg.

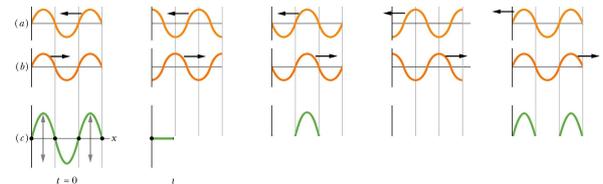
### 6.1 Stehende Wellen

Was passiert bei einem eingespannten, räumlich begrenztem Seil, wenn sich 2 sinusförmige Wellen in entgegen gesetzte Richtung ausbreiten? Es bildet sich eine stehende Welle aus!

**Exp.** 1) Gitarrensaite, 2) stehende Welle am langen gespannten Seil

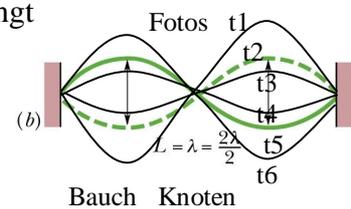
Ton der schwingenden Gitarrensaite = Resonanzfrequenz der stehenden Welle

**Exp.** Film stehende Welle



#### Stehende Welle:

- schwingendes Medium ist räumlich begrenzt
- Schwingungs-Knoten: Ort x, wo Seil immer in Ruhe ist
- Schwingungsbäuche: Ort x, wo Seil mit max. Amplitude schwingt
- Knoten bzw. Bäuche stehen, sie wandern nicht in x-Richtung, nur Bewegung in y-Richtung



#### Berechnung: Überlagerung entgegen laufender Wellen:

$$y_1(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2(x, t) = y_0 \sin(kx + \omega t)$$

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \quad \text{mit} \quad \sin\alpha + \sin\beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$\Rightarrow y(x, t) = 2 y_0 \sin(kx) \cdot \cos\omega t$$

Auslenkung   Amplitude   Schwingungsterm

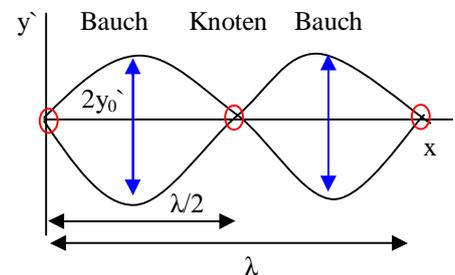
**Neu** - Ort x und Zeit t sind entkoppelt

- Amplitude  $2y_0 \sin(kx)$  hängt vom Ort x ab, (laufende Wellen hat für alle x gleiches  $y_0$ )

**Knoten:**  $\sin(kx) = 0$

$$\Rightarrow kx = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\Rightarrow x = n\lambda/2, \quad \text{Abstand benachbarter Knoten} = \lambda/2$$



**Bäuche:**  $\sin(kx) = 1$

$$\Rightarrow kx = (n + \frac{1}{2})\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\Rightarrow x = (n + \frac{1}{2})(\lambda/2) \quad \text{Abstand benachbarter Bäuche: } \frac{1}{2}\lambda$$

## 6.2 Resonanz stehender Wellen

Oben haben wir stehende Wellen betrachtet, aber unter welchen Bedingungen bildet sich überhaupt eine stehende Welle aus?

Betrachte: zwischen 2 Wände eingespanntes Seil wird periodisch angeregt

Anregung der Welle läuft zur Wand, wird reflektiert läuft zurück, reflektiert usw.

Interferenz aller gegenläufigen Wellen ergibt resultierende Welle

=> nur bei bestimmten Resonanzfrequenzen bildet sich eine stehende Wellen aus!

**Exp.** 1) Gitarrensaite, 2) stehende Welle am langen gespannten Seil

Ton der schwingenden Gitarrensaite = Resonanzfrequenz der stehenden Welle

**Bedingung** für Resonanz / stehend Welle ?

Schwingungs-Knoten an Befestigungspunkten

1 Bauch: einfachster Fall

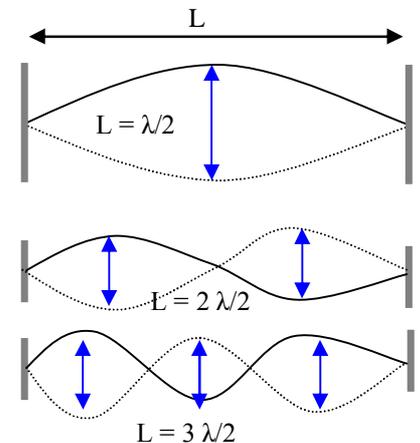
$$\Rightarrow L = \lambda / 2$$

2 Bäuche: zweite Wellenform

$$\Rightarrow L = \lambda$$

3 Bäuche: dritte Form

$$\Rightarrow L = (3/2) \lambda$$



stehende Wellen bilden sich aus, wenn:

Wellenlänge:  $\lambda = 2L/n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Frequenz:  $f = c/\lambda = nc/(2L)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

$n = 1$ : Grundschwingung (1. Harmonische)

$n = 2$ : erste Oberschwingung (2. Harmonische) usw.

Beachte: Wellenlänge hängt nur von Seillänge  $L$  ab

Frequenz (Ton) hängt von der Seillänge & Wellengeschwindigkeit  $c$  ab

**Exp.** Gitarrensaite stimmen heißt Spannung ändern, d.h. Geschwindigkeit  $c$  ändern

**Exp.** Stehende Welle auf Pauke

$$c = \sqrt{\frac{F_s}{\mu}} \quad F_s: \text{Spannungskraft (N)}, \mu: \text{lineare Dichte der Saite (kg/m)}$$

$$f = \frac{c}{\lambda} = \sqrt{\frac{F_s}{\mu}} \frac{n}{2L} \Rightarrow f \sim \sqrt{F_s}$$

**Zusammenfassung:** Prüfungstrainer, Kapitel 2.2, Fragen F2.2.1 – 2.2.10

### 7 Schallwellen / Longitudinale Wellen

Für die Ausbreitung benötigten mechanische Wellen ein materielles Medium, in dem sich die Störung (Welle) ausbreitet. Es gibt zwei Typen von Wellen

- 1) Transversale Wellen:  $y(x, t) \perp x$  Auslenkung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung
- 2) Longitudinale Wellen:  $s(x, t) \parallel x$  Auslenkung in Ausbreitungsrichtung

#### Nutzung von Schallwellen:

Seismologie: Erdbeben, Atombombentestüberwachung, Suche nach Ölvorkommen

Sonar: Schallmessung von U-Booten

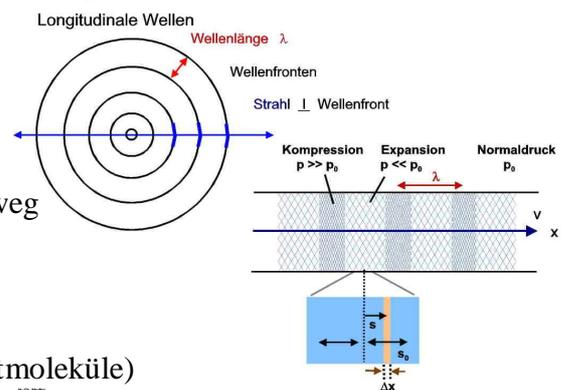
Ultraschall: bildgebende Verfahren in der Medizin

#### 7.1 Druckwellen

Schall = Druckwelle, punktförmige Störung breitet sich als Kugelwelle aus

**Exp.** gelbe Feder als Modell für Kompression

Luftmoleküle schwingen aufeinander zu / voneinander weg so dass sich Bereiche ausbilden mit Über / Unterdruck



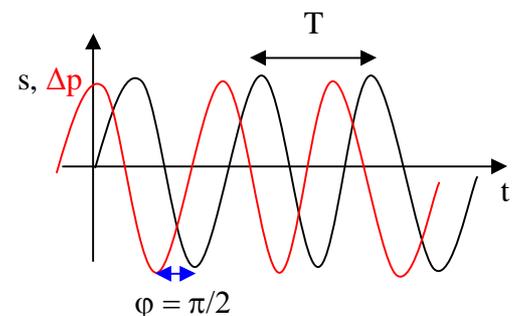
Bewegungs-Welle  $s(x, t) = s_0 \cos(kx - \omega t)$  (Luftmoleküle)  
 Auslenkung = Amplitude x Schwingungsterm

Amplitude  $s_0$  max. Auslenkung der Luftmoleküle aus Gleichgewicht  
 Wellenlänge  $\lambda$  räumlicher Abstand von benachbarten Orten gleichen Druckes (Über- bzw. Unterdruck) hier  $s_0 \ll \lambda$

Druck-Welle  $\Delta p(x, t) = \Delta p_0 \sin(kx - \omega t)$  (Druckdifferenz zu Normaldruck  $p_0$ )

Druck-Amplitude  $\Delta p_0 = (c\rho\omega)s_0$   
 $c =$  Schallgeschw.,  $\rho:$  Dichte

Phasendifferenz  $\pi/2$  zwischen Auslenkung  $s_0$  und  $\Delta p_0$   
 (cos => sin, ohne Beweis)



Drucksensor / Mikrophon:

Schwingung eines Luftelementes am festen Ort x

**Exp.** Schallausbreitung durch Druckwelle: 2 Stimmgabeln mit Resonanzkörper

**Exp.** Schallausbreitung im Vakuum: Luft als mechanisches Medium nötig

## 7.2 Schallgeschwindigkeit $c$

generell gilt für die Geschwindigkeit von mechanischen Wellen

$$c = \sqrt{\frac{\text{elastische Eigenschaft}}{\text{Trägheit}}} \quad (\text{siehe Seilwelle: } c = \sqrt{\frac{F_s}{\mu}})$$

Elastizität von Gasen wird durch Kompressionsmodul  $K$  erfasst

$$K = \frac{\Delta p}{\Delta V/V} \quad \text{Druckänderung pro relativer Volumenänderung}$$

Trägheit wird durch Massendichte  $\rho$  erfasst

$$\Rightarrow \quad c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad \text{Schallgeschwindigkeit}$$

Material	Luft 20°C	Helium	H <sub>2</sub>	Wasser 20°C	Stahl
$c$ (m/s)	343	965	1284	1482	5941

**Exp.** Warum klingt die Stimme höher, wenn man He eingeatmet hat?

$$\Rightarrow \quad f = c/\lambda \quad \lambda \text{ konstant, da gegeben durch Stimmbänder, Mundhöhle (Resonator)}$$

**Exp.** Zerspringendes Weinglas

Prozess: stehende Schallwelle erzeugt Resonanzkatastrophe am Weinglas

Durch hohe Schallintensität muss ausreichend Energie dem System zugeführt werden

**Exp.** Schallinterferenz durch 2 Lautsprecher im Hörsaal / Kundsches Rohr (alternativ)

**Exp.** Flammrohr (Maxima bei Druckbäuchen, Membran = Schwingungsbauch)

### 7.3.1 Schallintensität $I$

Lautstärke ist ein uneinheitlicher, subjektiver Begriff

Schallintensität: Energie-Übertragungsrate (Leistung) pro absorbierender Fläche

$$I = \frac{P}{A} \quad [P] = \text{W/m}^2$$

Betrachte: punktförmige Schallquelle mit Leistung  $P_Q$  strahlt Kugelwellen isotrop ab, idealisiert: ohne Verluste, Welle durchdringt Kugel mit Radius  $r$

$$A = 4\pi r^2 \quad \text{Kugeloberfläche}$$

$$\Rightarrow I = \frac{P_Q}{4\pi r^2} \quad \text{Schallintensität einer Punktquelle nimmt mit } 1/r^2 \text{ ab typisch}$$

$$I = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 s_0^2 = \frac{1}{2} \frac{\Delta p_0^2}{\rho c}$$

$$\Rightarrow \underline{I \sim (\text{Amplitude})^2} \quad \text{typisch für harmonische Welle}$$

### 7.3.2 Dezibel Skala

ist eine logarithmische Skala, angepasst an das menschliche Hörvermögen.

a) Maximal erträgliche Druckdifferenz:  $\Delta p = 28 \text{ Pa}$ , Normaldruck  $p = 10^5 \text{ Pa}$

$$\Rightarrow \text{Auslenkung } s_0 = \frac{\Delta p}{c \rho \omega} = \frac{\Delta p}{c \rho 2\pi f} \quad \text{für: } f = 1000 \text{ Hz, } c = 343 \text{ m/s, } \rho = 1,21 \text{ kg/m}^3$$

$$s_0 = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ m} \quad (\text{ca. } 1/5 \text{ Haaresbreite})$$

b) Minimal hörbare Druckdifferenz  $\Delta p = 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$

$$\Rightarrow \text{Auslenkung } s_0 = 1,1 \cdot 10^{-11} \text{ m} \quad (\text{ca. } 1/10 \text{ des Atomradius})$$

$$\text{Dynamikbereich: } \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \left( \frac{s_{0-\max}^2}{s_{0-\min}^2} \right) = \left( \frac{1,1 \cdot 10^{-5} \text{ m}}{1,1 \cdot 10^{-11} \text{ m}} \right)^2 = 10^{12}$$

### Schallpegel $\beta$

riesiger Dynamikbereich, daher Logarithmus zur Definition des Schallpegels

$$\Rightarrow \underline{\underline{\beta = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}}} \quad [\beta] = \text{db} \quad \text{Dezi-Bell (Alexander Graham Bell)}$$

$$I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2 \quad \text{untere Wahrnehmungsgrenze}$$

$$\text{Falls } I = I_0 \Rightarrow \beta = 10 \cdot \log 1 = 0$$

Logarithmus:  $y = \log(ax) = \log(a) + \log(x)$ ,  $\beta$  steigt um 10 x 1, wenn I um Faktor 10 zunimmt

Bsp:	Hörgrenze	Blätterrauschen	Unterhaltung	Rock-Konzert	Düsentriebwerk
	0 dB	20	60	110	130

## 8 Schwebung

**Exp.** Stimmgabel auf zwei leicht verstimmten Resonanzkörpern

a) jeden Ton einzeln, Unterschied ist nicht wahrnehmbar

b) beide Töne gemeinsam, Unterschied durch Überlagerung hörbar

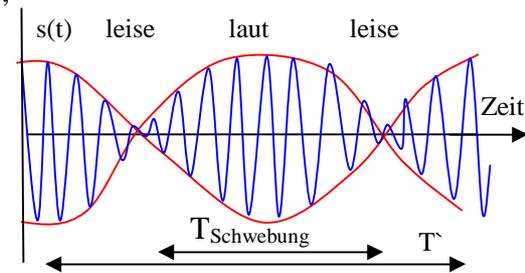
Schwingungen  $s_1(t) = s_0 \sin(\omega_1 t)$ ,  $s_2(t) = s_0 \sin(\omega_2 t)$ ,  $\omega_2 > \omega_1$

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) \\ = 2s_0 \{ \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t \} * \{ \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t \},$$

mit  $\omega' = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$ ,  $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$

$$\Rightarrow s(t) = 2s_0 \cos \omega' t * \cos \omega t$$

Amplitude      Schwingung  
ändert sich zeitl.



Maximale Amplitude:  $\cos \omega' t = \pm 1$  also 2mal in jeder Periode

$$\Rightarrow \omega_{\text{Schwebung}} = 2\omega' = \omega_1 - \omega_2$$

$$\Rightarrow 2T_{\text{Schweb}} = T'$$

Anwendung: Stimmen von Instrumenten durch Vergleich mit perfekt gestimmtem Instrument / Ton bis die Schwebung verschwindet

## 9.1 Doppler-Effekt

Sie fahren friedlich mit dem Auto über die Landstrasse und werden plötzlich von der Polizei mit Sirene (1000 Hz) verfolgt. Zum Glück sind nicht Sie gemeint und werden überholt. Können Sie an der Frequenz der Sirene erkennen, ob diese auf Sie zukommt, oder sich entfernt?

**Exp.** Akustischer Dopplereffekt

Johann C. Doppler (Österreich) 1842 Theorie

Buyss Ballot (Holland) 1845 Trompeten / Zug

Prinzip: Sender und Empfänger bewegen sich relativ zueinander

Tritt auf bei: Schallwellen, elektromagnetischen Wellen, Licht

$$\underline{\underline{f' = f \frac{c \pm v_D}{c \pm v_S}}}$$

f: Frequenz des Senders,  $f'$ : Frequenz bei Relativbewegung

c: Schallgeschwindigkeit in Luft, Luft ruht

$v_D$ : Detektor-Geschwindigkeit relativ zur Luft

$v_S$ : Sender-Geschwindigkeit relativ zur Luft

Vorzeichen so wählen, dass  $f' > f$  wenn Detektor & Sender aufeinander zu laufen !

**Bew.:** Sender emittiert Wellen mit Frequenz  $f$  (Rate)

a)  $v_S = 0$  Sender in Ruhe

$s = ct$  zurückgelegte Strecke der Welle in Zeit  $t$

$ct/\lambda$  Zahl der detektierten Wellen in Zeit  $t$

$$f = \frac{ct/\lambda}{t} = \frac{c}{\lambda} \text{ Rate der Wellen pro Zeit } t \Rightarrow \text{kein Doppler-Effekt}$$

b)  $v_D > 0$  Detektor bewegt sich auf Sender / Wellenfront zu

$s' = ct + v_D t$  Strecke der Wellenfronten bzgl. Detektor

$(ct + v_D t)/\lambda$  Zahl der detektierten Wellenfronten in der Zeit  $t$

$$f = \frac{(ct + v_D t)/\lambda}{t} = \frac{c + v_D}{\lambda} \text{ Rate der Wellen pro Zeit } t$$

$$\Rightarrow f' = \frac{c + v_D}{c/f} = f \frac{c + v_D}{c}$$

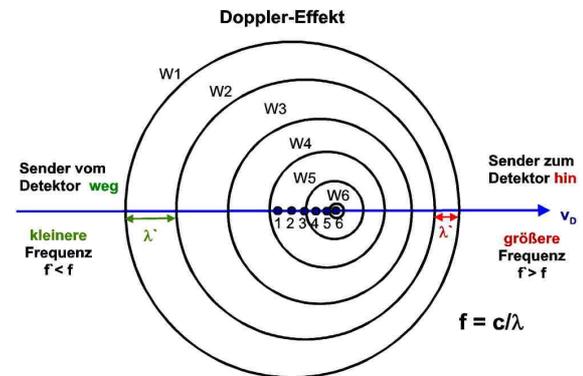
Doppler Effekt: Detektor fängt Wellen schon früher ab, also größerer Rate  $f' > f$

c)  $v_D < 0$  Analog wie oben, aber  $(ct - v_D t) \Rightarrow$  kleinere Rate  $f' < f$

**Bsp.**

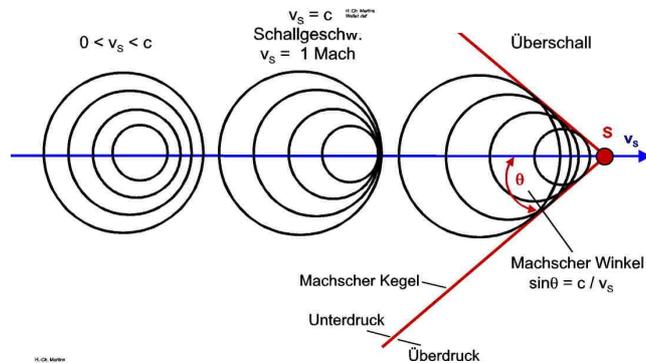
Fledermaus: Opferortung / Geschw.messung

Medizin-Anwendung: Blut-Geschwindigkeitsmessung



### 9.2 Überschall

**Exp.** Peitsche



**Zusammenfassung:** Prüfungstrainer Kapitel 2.3, Fragen 2.3.1 – 2.3.13

## Elektrostatik & Dynamik

Die Bedeutung der Elektrizität für unser Leben wurde überdeutlich, als das elektrische Netz von New York für einen Tag ausfiel. Stellen Sie sich Ihren Haushalt ohne Strom vor!

Erste Berichte der Griechen: geriebener Bernstein / Baumharz (Name: Elektron) zieht Strohhalme an. Es gibt es ein natürlich vorkommendes Gestein (Magnetit) welches Eisen anzieht. 1820 H.-Ch. Oerstedt beobachtet erstmals den Zusammenhang zwischen elektrischen Strömen und Magnetismus. Seitdem arbeitete man im 19. Jahrh. an der Vereinheitlichung beider Gebiete, vor allem Michael Faraday und James Clerk Maxwell.

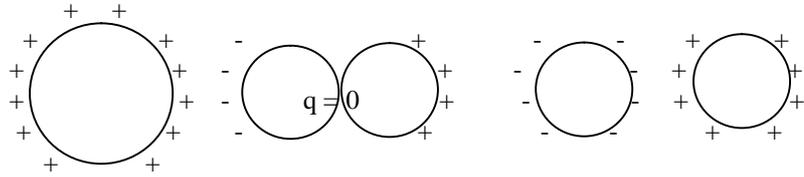
### 1.1 Elektrische Ladung $q$

- ist eine intrinsische Materialeigenschaft aber keine Substanz, ebenso wenig wie die Masse

- a) Es gibt 2 Ladungen: Positive Ladung (+ $q$ ), Negative Ladung (- $q$ )  
 Neutraler Körper:  $Q = (+q) + (-q) = 0$  also gleich viel pos. wie neg. Ladung  
 Geladener Körper:  $Q = (+q_1) + (-q_2) \neq 0$  also Ladungsungleichgewicht
- b) Ladung ist quantisiert:  
 Elementarladung  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$  Elektronenladung (Einheit Coulomb)  
 Ladungsmenge  $Q = ne$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  Aber nie  $q = 3,8e$  !
- c) Ladung ist eine Erhaltungsgröße, wie Energie, Impuls, Drehimpuls  
 Man kann Ladung nicht einzeln vernichten oder erzeugen  
 Nur trennen: Ionisation  $H \Rightarrow H^+ + e^-$
- d) Kraftwirkung: Ladungen mit gleichem Vorzeichen stoßen sich ab,  
 Ladungen mit unterschiedlichem Vorzeichen ziehen sich an.
- Exp.** Glasstab aufladen, Elektroskop, Kraftwirkung gleicher Ladungen, drehbarer Stab  
 Selbst aufladen, Haare abstehen lassen  
 Tischtennisbälle (Graphitüberzug) stoßen sich ab  
 Generator & Funkenentladung, Gasflamme mit Funken entzünden

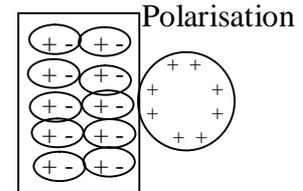
### 1.2 Influenz & Elektrische Leitung

**Exp.** Influenz: 2 kontaktierte Kugeln werden in E-Feld gebracht – Ladungsverschiebung – Kugeln trennen = Ladungstrennung. Man kann mit jeder Kugel ein Elektroskop laden



**Exp.** Wasserstrahl mit aufgeladenem Glasstab ablenken

**Exp.** Luftballon laden und an Tafel / Wand kleben  
Influenz und Polarisation hält den Ballon

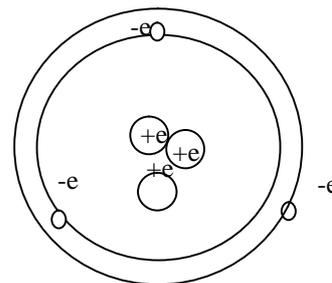


**Polarisation:** Verzerrung der Ladungsverteilung im neutralen Körper durch externe elektrische Kraft

#### 1.2.1 Ladungsträger

elektrische Ladungen werden getragen von

Elektron	e	q = -e
Protonen	P	q = +e
Neutron	N	q = 0



Li-Atom q = 0, neutral  
Elektronenhülle q = -3e  
Kern q = +3e

Wenn man Atome ionisiert, d.h. Ladungen trennt, erhält man freie Ladungsträger:

- 1) neg. Elektronen q = -e
- 2) pos. Ionen d.h. Atome an denen n Elektronen fehlen q = +ne

#### 1.2.2 Leitung

Je nach Material sind Elektronen nur locker am Rumpf gebunden und quasi frei beweglich

=> elektrischer Leiter

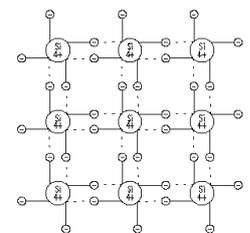
=> pos. Ionen bleiben fest, neg. Elektronen tragen Strom

Isolator: Elektronen sind fest an Atomrumpf gebunden, nicht beweglich

Halbleiter: zwischen Isolator & Leiter, Leitung bei höherer Temperatur

Supraleiter: elektrische Leitung ohne Stromverlust, d.h. Widerstand ist nicht nur klein sondern Null! Genaueres in Physik III

Leitung durch Cooper-Paare (gekoppelte Elektronen)



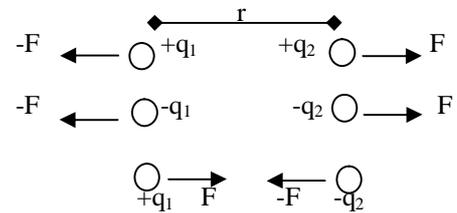
### 1.3 Coulombsches Gesetz

Zwei kleine Teilchen stehen im Abstand  $r$  und tragen die Ladungen  $q_1$  und  $q_2$ . Dann wirkt zwischen ihnen die abstoßende / anziehende elektrostatische Kraft

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2)$  Dielektrizitätskonstante

Das Gesetz gilt makroskopisch & im atomaren Bereich!



**Exp.** Torsionswaage zur Demonstration des Coulombgesetzes mit Skizze

Superpositionsprinzip Für  $n$  geladene Teilchen überlagern sich die Kräfte unabhängig

voneinander wie Vektoren  $F_{\text{res}}^{\rightarrow} = F_{12}^{\rightarrow} + F_{13}^{\rightarrow} + F_{14}^{\rightarrow} + \dots + F_{1n}^{\rightarrow}$

$F_{14}^{\rightarrow}$  : Kraft auf Teilchen 1, ausgehend von Teilchen 4

Gleichverteilung:

Bringt man Ladung auf eine elektrisch leitende Fläche, so verteilt sie sich homogen.

(die Ladung stößt sich gegenseitig ab, bis sich maximaler Abstand einstellt)

## 2 Elektrische Felder

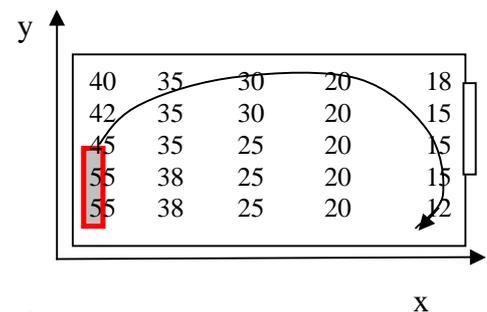
Es wirken Kräfte zwischen zwei elektrischen Ladungen, aber woher weiß Ladung  $q_1$  von Ladung  $q_2$  ? Wie kann die Kraft wirken, obwohl sich die Teilchen nicht berühren? Wer vermittelt die Kraft? Feldbegriff: die elektrische Ladung  $q_1$  baut ein Feld auf, das am Punkt P im Raum eine Kraft auf eine andere Ladung bewirkt.

**2.1.1 Skalares Feld:** z.B. Temperaturfeld im Raum

Jedem Punkt  $(x, y)$  des Raumes wird eine

Temperatur zugeordnet

T hoch an Heizung, T klein am Fenster

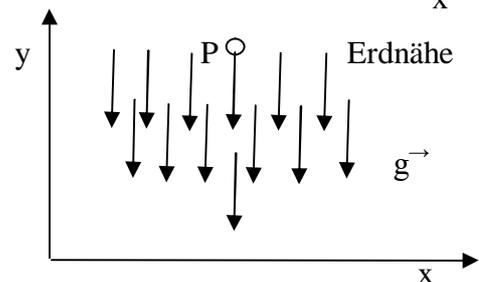


**2.1.2 Vektorfeld:** z.B. Gravitationsfeld

jedem Punkt P  $(x, y)$  des Raumes wird ein Vektor

$g^{\rightarrow}(x, y)$  zugeordnet, Pfeillänge =  $|g^{\rightarrow}|$

Kraft auf Masse  $m$  im Gravitationsfeld:



$F^{\rightarrow}(x,y) = mg^{\rightarrow}(x,y) = mg^{\rightarrow}$ , da  $g = \text{konstant}$

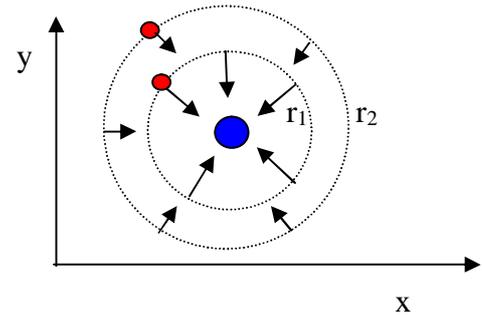
### 2.1.3 Gravitations-Kraftfeld

wird erzeugt durch Masse

$m_E =$  Erde,  $m =$  Satellit im Abstand  $r$

$$|F| = G \frac{m m_E}{r^2} = m|g| \quad \text{Kraft auf Satelliten}$$

$$|g| = \frac{Gm_E}{r^2}$$



Pfeillänge = Kraftbetrag, Kräfte zeigen radial zum Erdmittelpunkt an jedem Punkt (x, y)

### 2.1.4 Feldmessung

Messung der Kraftwirkung des Feldes auf eine kleine Probemasse

Probemasse  $m \ll m_E$  beeinflusst Gravitationsfeld der Erde nicht, kann g-Feld testen

### 2.1.5 Elektrisches Feld $\vec{E}$

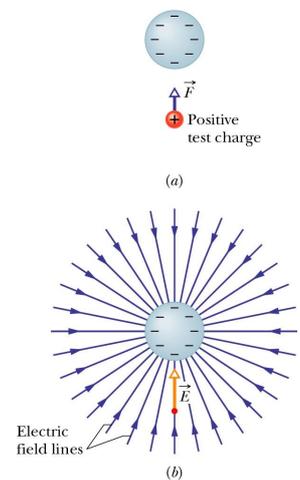
$$\vec{F} = q_0 \vec{E} \quad \text{Kraftwirkung auf Probeladung } q_0 \text{ durch Feld } E \text{ übermittelt}$$

Vektorfeld  $E$ -Feld existiert auch ohne Probeladung  $q_0$

Probeladung  $q_0$  ist so klein, dass sie das  $E$ -Feld nicht stört, testet  $E$ -Feld aus

## 2.2 Elektrische Feldlinien

- Elektrische Felder werden erzeugt durch Ladungen
- Feldlinien beginnen bei positiver Ladung und enden bei negativer Ladung
- beschreiben die elektrische Kraftverteilung im Raum
- sind nur ein Modell, sie existieren nicht wirklich
- Die Tangente an der Feldlinie gibt die Richtung des Feldes
- Dichte der Feldlinien ist proportional zur Feldstärke
- Feldlinien kreuzen sich nie

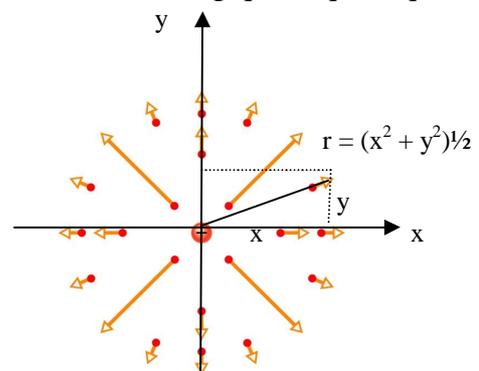


### 2.2.1 E-Feld einer Punktladung

$E$ -Feld der Punktladung  $q$  wird getestet durch dessen Kraft auf Probeladung  $q_0$  mit  $q_0 \ll q$

$$\text{Kraftbetrag} \quad F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q||q_0|}{r^2}$$

$$\text{Feld} \quad E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2}$$



Eigenschaften:  $E \rightarrow$  maximal im Ladungszentrum bei  $r = 0$   
 $E \rightarrow$  zeigt radial nach außen  
 $|E|$  fällt mit Abstand wie  $1/r^2$

Das Feld  $E$ , das sich aus vielen Punktladungen  $q_i$  aufbaut, ist die Summe der Einzelfelder  $E_i$

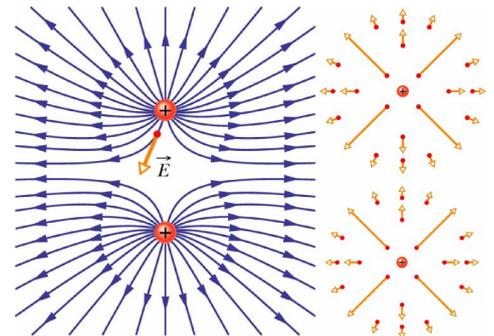
Kraft  $F \rightarrow = F_1 \rightarrow + F_2 \rightarrow + \dots + F_i + \dots$  (vektorielle Addition)

Feld  $E \rightarrow = F_1 \rightarrow / q_0 + F_2 / q_0 + \dots + F_i / q_0 + \dots = E_1 \rightarrow + E_2 + \dots + E_i + \dots$

### 2.2.2 Zwei gleiche (pos) Punktladungen

Feldlinien enden bei neg. Ladungen im Unendlichen

Rotationssymmetrisch um Achse durch die beiden Ladungen



### 2.2.3 Geladene, nichtleitende Platte

Feldlinien stehen senkrecht auf der Platte

E -Feld-Rechnungen möglich bei <http://www.pk-applets.de/phy/efeld/efeld.html>

**Exp.** E-Feldlinien sichtbar machen durch Fasern in Öl im E-Feld

### 2.3 Elektrischer Dipol

wichtig für Atome, Antenne, Abstrahlcharakteristik , Optik

berechne: E-Feld im Punkt P auf der Ladungsachse

Abstand  $z$  von Ladungszentrum

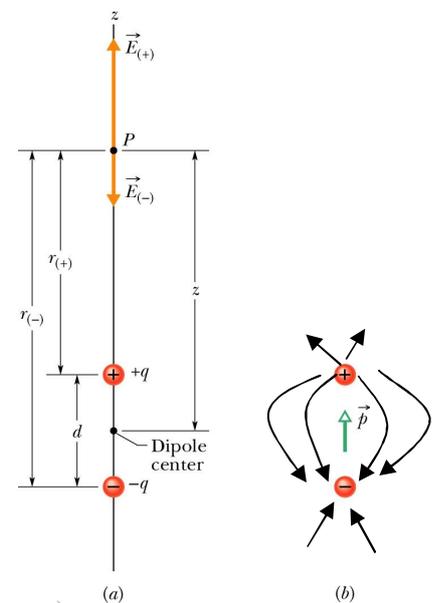
Ladungen  $q_{(+)}$ ,  $q_{(-)}$  erzeugen je ein E-Feld

$$E = E_{(+)} - E_{(-)}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(z - \frac{1}{2}d\right)^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(z + \frac{1}{2}d\right)^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left[ \left(1 - \frac{d}{2z}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{d}{2z}\right)^{-2} \right] \quad (z \text{ ausklammern})$$



wir suchen nur in großen Abständen  $z \gg d$ , also  $d/2z \ll 1$ . Dann kann man in Binomialreihe entwickeln und kleine Terme vernachlässigen:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left[ \left( 1 + \frac{d}{z} + \dots \right) - \left( 1 - \frac{d}{z} + \dots \right) \right] = \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left[ \frac{2d}{z} \right] = \frac{qd}{2\pi\epsilon_0 z^3} \quad \text{für Punkt auf der Dipolachse} \\
 \underline{\underline{\vec{E} = \frac{\vec{p}}{2\pi\epsilon_0 z^3}}}
 \end{aligned}$$

### Elektrisches Dipolmoment:

$\vec{p} = q\vec{d}$       Gibt Orientierung des Dipols (Achse) an,  
 Richtung von neg. zu pos. Ladung  
 Feldmessung ergibt nur p, nicht aber q oder d isoliert

Merke Punktladung:  $E \sim 1/z^2$

Dipol       $E \sim 1/z^3$ , da Dipolladungen sich gegenseitig schwächen

### 2.4 Feld einer linearen Ladungsverteilung

bisher wurden nur Punktladungen betrachtet, jetzt kontinuierliche Ladungsverteilung, Bestimmung über die Ladungsdichte mittels Infinitesimalrechnung:

Objekt	Zeichen	Einheit
Punkt-Ladung	q	C
Lineare Dichte	$\lambda$	C/m
Flächendichte	$\sigma$	C/m <sup>2</sup>
Raumdicke	$\rho$	C/m <sup>3</sup>

Problem: ortsfeste Ladung auf einem Ring. E-Feld am Punkt P ?

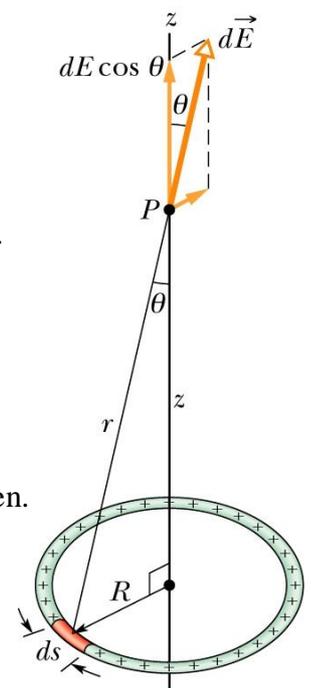
Lsg: gleichverteilte Ladung mit Dichte  $\lambda$

$dq = \lambda ds$       Element mit Ladung dq, Länge ds

$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$       Feld durch Ladungselement im Abstand r

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{(z^2 + R^2)}$$

Symmetrie bzgl. der z-Achse  $\Rightarrow$  E-Feldbeiträge senkrecht zur z-Achse löschen sich aus, nur Komponenten parallel zu z bleiben.



$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

Parallelkomponente:

$$dE \cos\theta = \frac{z\lambda}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} ds$$

Alle Feldkomponenten der einzelnen Ringelemente müssen aufsummiert werden, also über den Ring integrieren von  $s = 0$  bis  $s = 2\pi R$ :

$$E = \int dE \cos\theta = \frac{z\lambda}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} ds = \frac{z\lambda(2\pi R)}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$\text{mit } q = \lambda 2\pi R$$

1) Näherung weite Entfernung  $z \gg R$  ergibt dann  $z^2 + R^2 \approx z^2$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \quad \text{aus weiter Entfernung Ring} \sim \text{Punktladung}$$

2) Im Mittelpunkt des Rings  $z = 0$

$\Rightarrow E = 0$  alle Teilfelder heben sich im Ringmittelpunkt auf  
Faradaykäfig (später)

### 2.5.1 Punktladung im E-Feld

Die elektrostatische Kraft  $F$  auf ein geladenes Teilchen im E-Feld ist

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad q \text{ pos.} \Rightarrow F \text{ parallel } E, \quad q \text{ neg.} \Rightarrow F \text{ antiparallel } E \quad (\text{bei Elektronen})$$

### Tintenstrahldrucker

- Tintentropfen werden mit Ladung  $q$  belegt
- fliegen in konstantes E-Feld, werden abgelenkt, je nach  $q$
- Druckmuster steuert Ladung  $q$  der Tropfen

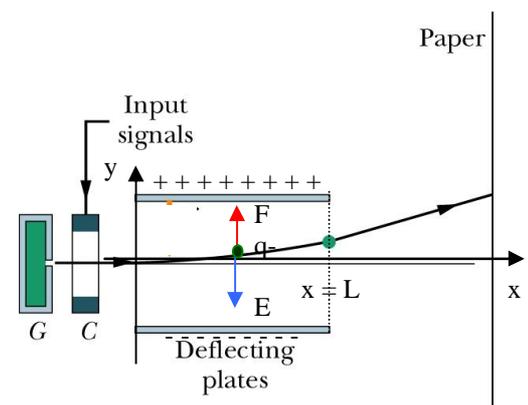
Tropfenmasse  $m = 1,3 \times 10^{-10}$  kg,  $q = -1,5 \times 10^{-13}$  C,  $v_x = 18$  m/s

E-Feld  $1,4 \times 10^6$  N/C, Plattenlänge  $L = 16$  mm

Gravitationskraft klein gegen E-Kraft

**Frage:** Ablenkung  $y$  des Tropfens als Funktion der Ladung ?

Lsg.



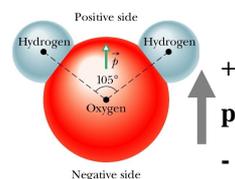
- Exp.** 1) Braunsche Röhre, Ablenkung von Elektronen im E-Feld  
 2) Oszilloskop  
 3) Leuchtstoffröhre neben Teslatrafo, Elektronenanregung ohne Kontakt durch E-Feld  
 4) Elektrischer Wind, Kerze im E-Feld, Ionen werden abgelenkt

**2.5.2. Dipol im E-Feld**

Dipol misst die Orientierung des E-Feldes, stellt sich wie eine Kompassnadel ein. Wichtig für Bindung von Molekülen an Oberflächen (Katalyse),

Orientierung von Atomen im Festkörper

Typ. Bsp. Wasser im E-Feld



Homogenes Feld

nur Drehmoment T um Schwerpunkt

Keine Kraft, da Dipolgesamtladung  $q = 0$

Drehmoment

$$T = Fx \sin\theta + F(d - x) \sin\theta = Fd \sin\theta$$

Dipolmoment

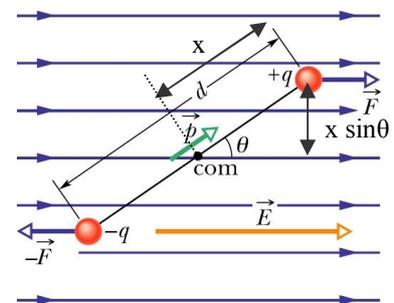
$$p = qd$$

Kraft

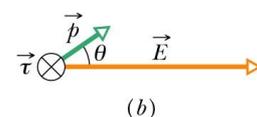
$$F = qE \quad (\text{mit } T = Fd \sin\theta)$$

$$\Rightarrow T = pE \sin\theta$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{T} = \vec{p} \times \vec{E}}}$$



(a)



(b)

**Merke:** Punktladung wird im E-Feld verschoben

Dipol wird im homogenen E-Feld gedreht

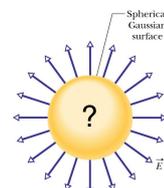
**Exp.** polarisierte Fasern in Öl richten sich im externen E-Feld aus (Drehung der Dipole)

Flüssigkristalle: Dipole werden im E-Feld ausgerichtet, absorbieren pol. Licht

**3. Gaußscher Satz**

Betrachte Luftballon, der selbst elektrisch ungeladen ist, aber von dem E-Felder ausgehen. Er muss also eine elektrische Ladung im Inneren besitzen. Wie groß ist diese ?

Berechnung ist mit dem Gaußschen Satz möglich (Gauß 1777 – 1855)



### 3.1 Fluss

neuer Begriff in der Elektrodynamik, veranschaulicht am Bsp. eines Fischschwarms, der mit Geschwindigkeit  $v$  durch die Fläche  $A$  des Netzes strömt

$\vec{v}$ : Geschwindigkeitsfeld der Fische

$\vec{A}$ : Flächenvektor senkrecht auf der Fläche,  $|\vec{A}| = \text{Flächeninhalt}$

$\Phi = \vec{v} \cdot \vec{A} = vA \cos \theta$  Fluss = Strömungsrate der Fische in das Netz

=> Der Fluss ist das Skalarprodukt einer Fläche mit einem die Fläche durchdringenden Feld.

$\vec{v}$ -Feldlinien: Fische schwimmen längs der Feldlinien

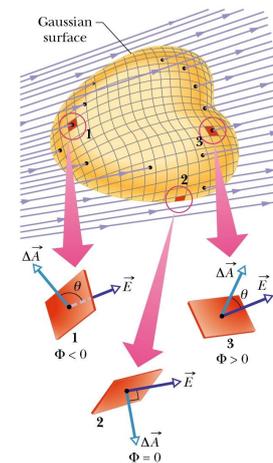
Feldlinien eng beieinander => hohe Fischdichte

### 3.2 Elektrischer Fluss

Der Fluss des elektrischen Feldes durch eine geschlossene Fläche ist die Summe (Integral) über den Fluss durch alle Teilstücke der Fläche

$$\Phi_{el} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$\Phi_{el}$  ist proportional zur Zahl der E-Feldlinien durch die Fläche



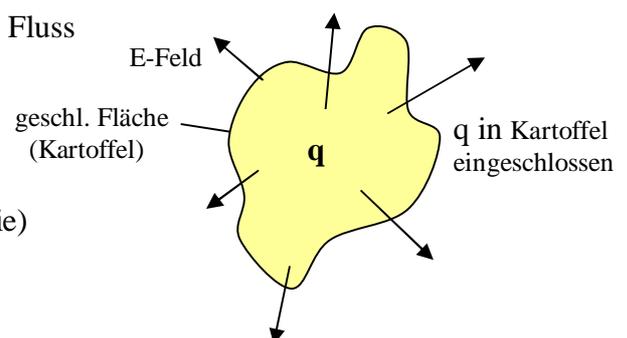
### 3.3 Gaußscher Satz

Die in einem geschlossenen Hohlkörper befindliche gesamte Ladung  $q$  ist gleich dem durch die Oberfläche tretenden elektrischen Fluss

$$\epsilon_0 \Phi_{el} = q$$

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q$$

(gilt für Vakuum, Luft, nicht generell für Materie)



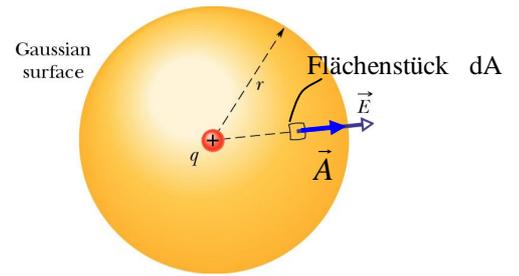
#### Beachte:

- Ladungen außerhalb des geschlossenen Körpers tragen nicht zu  $q$  bei
- Lage und Verteilung von  $q$  innerhalb des Körpers ist unwichtig
- E-Feld wird von inneren und äußeren Ladungen erzeugt, aber äußeren Ladungen tragen nicht zum netto-Fluss durch die Oberfläche bei, da gleich viel rein wie raus

### 3.4 Gaußscher Satz & Coulombgesetz

Das Coulombgesetz und der Gauß'sche Satz sind äquivalent

- Ladung  $q$  in Kugel mit Radius  $r$
- Fläche Flächenvektor  $\vec{A}$  zeigt radial nach außen
- E-Feld zeigt radial nach außen



$$q = \epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 \oint E dA \quad (\text{Gaußscher Satz, } \vec{E} \parallel \vec{A})$$

Betrag des E-Feldes ist auf jedem Ort der Kugelfläche gleich groß, da nur abh. von  $r$

$$\Rightarrow \epsilon_0 E \oint d\vec{A} = \epsilon_0 E 4\pi r^2 = q \quad \text{denn } \oint dA = 4\pi r^2 \text{ gesamte Kugelfläche}$$

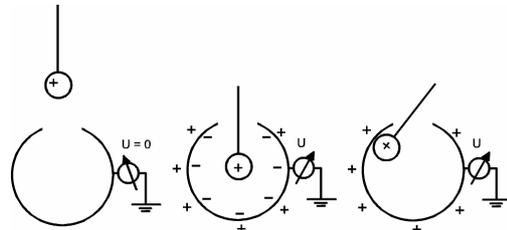
$$\Rightarrow \underline{\underline{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}}} \quad \Rightarrow \text{Coulombgesetz folgt aus dem Gaußschen Satz}$$

**Bsp.** Ladung  $q$  in Kugel mit Radius  $r$  ergibt den Fluss durch die Kugelfläche. Wie ändert sich  $\Phi_{el}$  wenn:

- a) größere Kugel, b) Würfel mit Kantenlänge  $r$ , c) Würfel mit Kantenlänge  $2r$  ?

Lsg.

**Exp.** Ladung mit kleiner Konduktorkugel in große Konduktorkugel halten: Ladung in Kugelmittelpunkt = Ladung auf Kugeloberfläche



## 4. Elektrische Spannung & Potenzial

### 4.1 Mechanische Verschiebe-Arbeit

Masse  $m$  soll auf einen Berg gebracht werden

Bewegung durch Gravitationsfeld

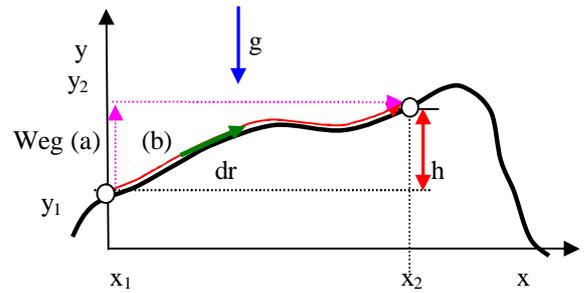
$$\text{Arbeit} \quad W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \int_{r_1}^{r_2} \vec{g} \cdot d\vec{r}$$

Linienintegral längs eines Weges von  $r_1$  nach  $r_2$

$$\vec{g} = (0, g), \quad d\vec{r} = (dx, dy)$$

$$\vec{g} \cdot d\vec{r} = 0 \cdot dx + g \cdot dy = g \, dy$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{W = mg(y_2 - y_1) = mg \, h}} \quad \text{nur Streckenanteil parallel zu } g \text{ ist relevant}$$



Potenzial  $y$  (Höhe)

Potenzialdifferenz  $h = y_2 - y_1$  ist proportional zur Arbeit !

Äquipotenziallinien: Höhenlinien,  $y = \text{konstant}$

Arbeit ist unabh. vom Weg, gleiche Arbeit für Wege a) , b),  
abh. nur von Höhendifferenz ( $y_2 - y_1$ ), also Differenz in  $g$ -Richtung

$\Rightarrow$  Kraftfeld ist konservativ

pot. Energie  $E_{\text{pot}} = mgh$  Energie der Masse, gewonnen durch Anheben im  $g$ -Feld

### 4.2 Elektrische Verschiebe-Arbeit

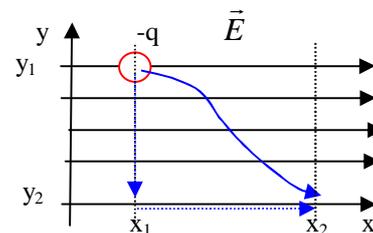
Ladung  $q$  wird durch ein elektrisches Feld bewegt

$$\text{Arbeit} \quad W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} q\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{E} = (E, 0), \quad d\vec{r} = (dx, dy)$$

Nur Anteil  $E$  parallel zu  $dx$  ist relevant

$$\Rightarrow \quad W = qE(x_2 - x_1)$$



Arbeit ist unabh. vom Weg, gleiche Arbeit für Wege a) , b),

nur abh. von Streckendifferenz ( $x_2 - x_1$ ) parallel zum  $\vec{E}$ -Feld

pot. Energie  $E_{\text{el}} = W$ , Energie der Ladung, gewonnen durch Verschieben im  $E$ -Kraftfeld

### 4.3 Elektrische Spannung

Ziel: Berechnung der Arbeit beim Bewegen einer Ladung  $q$  im E-Feld

$$W = \int_{r_1}^{r_2} q \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Zweckmäßig: Trennung von Ladung  $q$  und Eigenschaft des Feldes  $\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$

Definiere Potenzialdifferenz zwischen den Punkten  $r_1$  und  $r_2$ :

$$\Phi(r_2) - \Phi(r_1) = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Definiere Spannung als Potenzialdifferenz zwischen 2 Punkten

$$\underline{U = \Phi(r_2) - \Phi(r_1)}, \quad [U] = \text{Volt} = \text{J/C}$$

**Arbeit**  $\underline{W = qU}$  (daher die Einheit der Spannung J/C)

- unabhängig vom Weg
- nur abh. von Spannung  $U$  zwischen Punkten  $r_1$  und  $r_2$
- Spannung  $U$  spielt für  $E$ -Feld gleiche Rolle wie Höhe  $h$  im  $g$ -Feld
- es ist meist einfacher mit Spannung  $U$  als mit  $E$ -Feld (Vektor) zu rechnen

**Beachte:** - nur Spannung zwischen zwei Punkten macht Sinn, so wie Strom durch Leitung

- Potenzial  $\Phi$  nicht mit Fluss  $\Phi$  verwechseln

#### 4.4.1 Elektrisches Potenzial

Generell gilt: wenn Arbeit im Kraftfeld wegunabhängig ist, dann:

=> Kraftfeld ist konservativ, d.h. Energieerhaltung gilt

=> Potenzial existiert

$$\underline{\underline{\Phi(\vec{r}) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r}}}$$

a) Elektr. Potenzial ist Eigenschaft des E-Feldes unabh., ob Probeladung existiert oder nicht

b)  $E_{el} = qU$  Elektr. potenzielle Energie ist Energie eines geladenen Teilchens, das sich im E-Feld befindet.

c) Referenzmarke  $\Phi(r = \infty) = 0$ , wie Meeresspiegel  $h = 0$  gesetzt

### 4.4.2 Äquipotenzialflächen

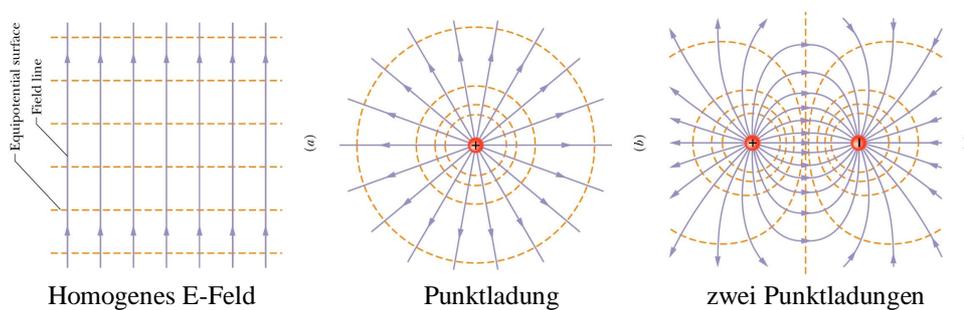
Wie kann man eine Ladung  $q$  durch ein E-Feld bewegen, ohne dass sie Energie gewinnt oder verliert, bzw. ohne Arbeit an ihr zu verrichten?

$$\text{Arbeit} \quad W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} q\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \text{Weg } d\vec{r} \text{ muss senkrecht auf } \vec{E} \text{ sein}$$

$$\Leftrightarrow \quad W = q(\Phi(r_2) - \Phi(r_1)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Potential } \Phi(\vec{r}) = \text{konstant}$$

Äquipotenzialflächen sind

- Flächen im Raum mit konstantem Potential  $\Phi(\mathbf{r})$
- stehen immer senkrecht auf dem E-Feld
- je dichter sie liegen, desto größer ist das E-Feld



**Exp.** Elektrolytischer Trog / Folie, Äquipot-Linien zeichnen

### Vergleich mit Gravitationsfeld:

$$\text{Arbeit} \quad W = 0$$

$$\Rightarrow \text{Weg } d\vec{x} \text{ muss senkrecht auf } \vec{g} \text{ sein}$$

$$\Rightarrow E_{\text{pot}} = mgh = \text{konstant} \Rightarrow h = \text{konstant}$$

Eine Äquipotenzialfläche hat an allen Punkten die gleiche Höhe  $h$ ,

Höhenlinien sind Schnittlinien des Berges mit der horizontalen Fläche

### 4.5 Berechnung des E-Feldes aus Potential $\Phi(\mathbf{r})$

Wenn 3-dim. Potential bekannt, dann kann man Äquipotenzialflächen zeichnen und senkrecht dazu das E-Feld eintragen. Welchen Betrag hat aber das E-Feld?

$$\text{Potential} \quad \Phi(\vec{r}) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{r} = (x, y, z) \quad (\text{Pot. aus Integration über E})$$

$$\text{E-Feld} \quad E_x = -\frac{\partial\Phi(x, y, z)}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\Phi(x, y, z)}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\Phi(x, y, z)}{\partial z} \quad (\text{Ableitung})$$

$$\underline{\underline{\vec{E} = -\text{grad } \Phi}}$$

E-Feld ist die räumliche Änderungsrate des Potentials  
zeigt in Richtung der stärksten Änderung des Potentials

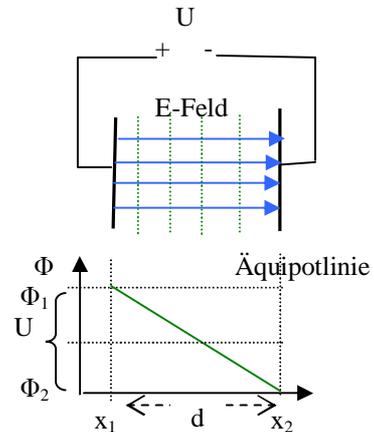
Vergleich Mechanik

Die Kraft / Beschleunigung ist  $\vec{g}$  mal Änderungsrate der Höhenlinien = Gefälle am Berghang. Ein Ball rollt in die Richtung der stärksten Potenzialänderung.

**Bsp.** Plattenkondensator, Spannung U, Abstand d

$$E = \frac{d\Phi}{dx} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{x_2 - x_1} = \frac{U}{d}$$

$q^+$  von  $r_2$  nach  $r_1$  bringen kostet Arbeit  
 $q^+$  bei  $r_1$  los lassen: pot Energie wird frei



**4.6 Potenzial einer Punktladung**

betrachte Punkt P im Abstand R von der Punktladung, gesucht  $\Phi(R)$  bezogen auf  $\Phi(\infty) = 0$

$$\Phi(\vec{R}) = -\int_R^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

E-Feld ist konservativ

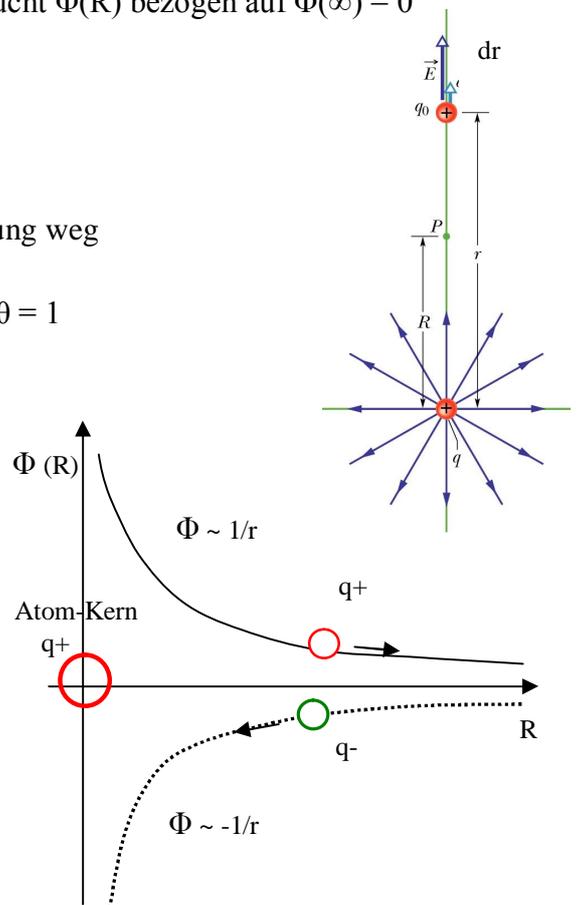
=> Weg beliebig, wähle gerade Linie, radial von Punktladung weg

$$\Rightarrow \Phi(\vec{r}) = -\int_R^\infty E dr \quad \text{denn } E \text{ immer parallel zu } dr, \cos\theta = 1$$

E-Feld einer Punktladung

$$\Phi(\infty) - \Phi(R) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \right]_R^\infty$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Phi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}}} \quad \Phi(\infty) = 0$$



### 4.7 Potenzial eines (isolierten) Leiters

- a) Eine Überschussladung verteilt sich auf einem Leiter gleichmäßig über die Oberfläche.
- b) Alle Punkte auf dem Körper und auch in seinem Inneren haben gleiches Potenzial.

**Bew.** Wenn Ladung gleichmäßig verteilt ist, wirken keine elektrischen Kräfte, also  $E = 0$

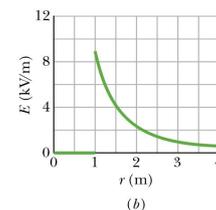
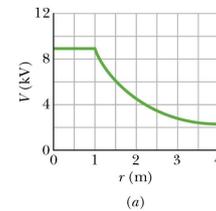
$$\Rightarrow \Phi_2 - \Phi_1 = - \int_{x_1}^{x_2} \vec{E} \cdot d\vec{x} = 0 \text{ also } \Phi_1 = \Phi_2 \text{ für alle Orte } x$$

**Bsp.** Metallkugel mit  $r = 1 \text{ m}$ ,  $q = 10^{-6} \text{ C}$

$$\Rightarrow \Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \text{ außerhalb der Kugel}$$

innerhalb der Kugel:  $\Phi = \text{konstant}$

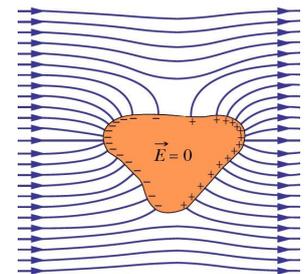
$$\Rightarrow E = - \frac{d\Phi}{dr} \quad E = 0 \text{ innerhalb der Kugel, da } \Phi = \text{konst.}$$



#### 4.7.1 Faraday Käfig (Abschirmung)

Prinzip: neutraler Leiter wird in ein E-Feld gebracht

das äußere E-Feld verschiebt die Ladung (Influenz) so, dass ein Gegenfeld im Inneren herrscht, das das äußere Feld kompensiert.



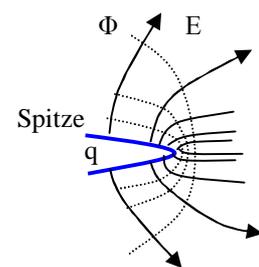
- Exp.** Funksender, Handy telefonieren lassen und in Käfig abschirmen
- Funksender bringt Neonröhre zum Leuchten, abschirmen
- Faraday-Cup, Elektrometer beladen

#### 4.7.2 E-Felder an Spitzen

An Metall-Spitzen bilden sich hohe elektrische Feldstärken,

$$E = - \frac{d\Phi}{dr} \quad \text{Radius } r \text{ der Spitze klein machen}$$

- $\Rightarrow$  Entladungserscheinungen in Luft (Mast eines Segelschiffs, bei Gewitteranzug)
- $\Rightarrow$  Feldemissionsmikroskop, Elektronen können leichter austreten, (quantenmechanisches Tunnelpotential wird gesenkt)



- Exp.** Überschlag an Spitze - Platte, an Kugel - Platte, Folie Flachbildschirm

**Zusammenfassung:** Prüfungstrainer Kapitel 4.1, Fragen 4.1.1 – 4.1.14