



Physik III

Bachelorstudiengang Physikalische Technik
Fachhochschule Münster

Prof. Dr. Hans-Christoph Mertins



Die Veranstaltung Physik III besteht aus dem Zusammenspiel der folgenden Komponenten:

Vorlesung: hier hören Sie die Grundlagen der Physik und lernen an Schauexperimenten die wichtigsten Effekte kennen. Dieses Script stellt den Stoff der Vorlesung dar, wobei die Beispielaufgaben in der Vorlesung vorgerechnet und von Ihnen nachgetragen werden müssen. Das Script ersetzt nicht den Besuch der Vorlesung, sondern soll Ihnen die Mitschrift ersparen. Die Vorlesung orientiert sich an den Büchern „Physik“ von Haliday, Resnick, Walker, VCH-Viley und „Prüfungstrainer Experimentalphysik“ von Mertins, Gilbert, Spektrum Akademischer Verlag Elsevier. Jeder Abschnitt der Vorlesung wird durch das entsprechende Kapitel des Buches „Prüfungstrainer Experimentalphysik“ noch einmal in Volltext zusammengefasst und anhand der Prüfungsfragen können Sie Ihr aktuelles Wissen schon während des Semesters und nicht erst vor der Prüfung testen.

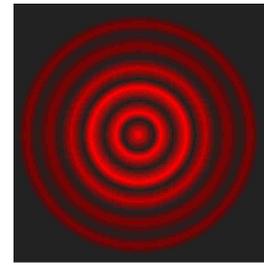
Übung & Hausaufgaben: in den Übungen, den Tutorien und den wöchentlichen Hausaufgaben lernen Sie die Theorie in die Praxis umzusetzen und berechnen konkrete Anwendungen .

Praktikum: hier lernen Sie, wie das theoretische Wissen an Messgeräten und Maschinen im späteren Berufsalltag zum tragen kommt.

www.fh-muenster.de/physiklabor hier finden Sie alle wichtigen Informationen wie die Lösungen der Hausaufgaben, Praktikumsanleitungen, Formelsammlungen die Bilder in höherer Auflösung und andere Hinweise.

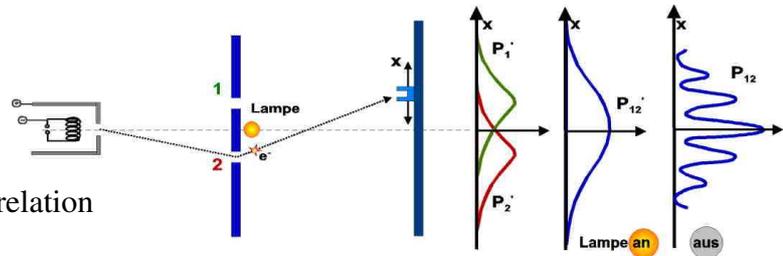
Wellen-Optik

- 1) Beugung
- 2) Interferenz an dünnen Schichten
- 3) Beugung am Spalt & Gitter, Auflösungsvermögen



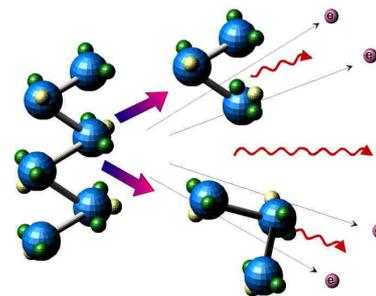
Quantenmechanik

- 1) Photonen
- 2) Materiewellen
- 3) Wahrscheinlichkeitswellen
- 4) Heisenbergsche Unschärferelation
- 5) Tunneleffekt
- 6) Elektronen im Potenzialtopf



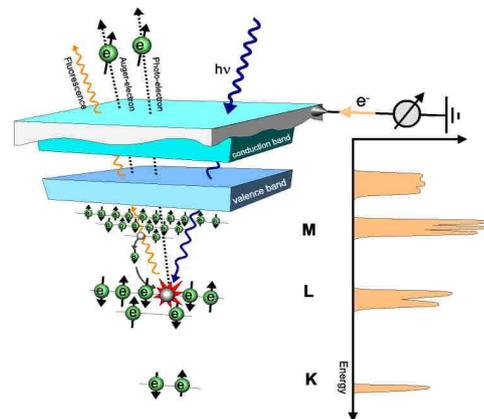
Atomphysik

- 1) Wasserstoffatom
- 2) Drehimpuls & Spin des Elektrons
- 3) Periodensystem
- 4) Röntgenstrahlung
- 5) Laser



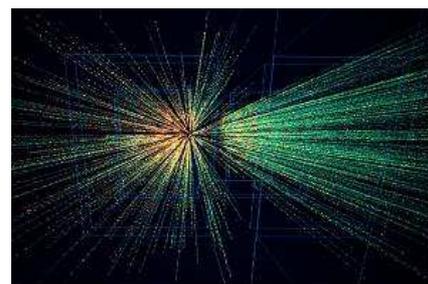
Festkörperphysik

- 1) Gitterstruktur
- 2) Kristallbindung
- 3) Elektronische Struktur
- 4) Halbleiter



Kernphysik

- 1) Aufbau der Kerne
- 2) Radioaktiver Zerfall
- 3) Kernspaltung



WELLENOPTIK

1. Beugung

Lichtausbreitung, bisher im Strahlenmodell betrachtet, findet Grenze an kleinen Aperturen (Spaltöffnungen). Dies beschränkt die Anwendung der geometrischen Optik.

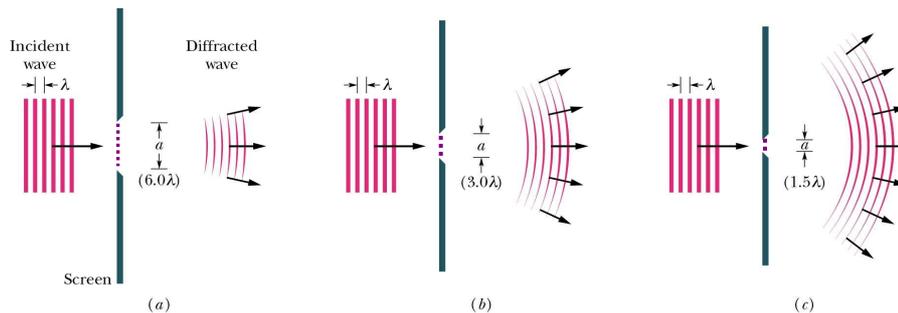
Modell	Ausbreitung	Anwendung wenn
a) Geometrische Optik:	Strahlen geradlinig	große Aperturen (Spalte)
b) Wellenoptik:	Kugelwellen Beugung	kleine Aperturen $d \sim \lambda$

1.1 Beugungsprinzip

Exp. Wellenwanne, Durchgang von ebenen Wellen durch kleinen Spalt

Beugung am Spalt: Welle läuft auch in den Schattenraum

Ursache: Huygensche Wellenzentren sitzen in Spaltebene, kugelförmige Ausbreitung



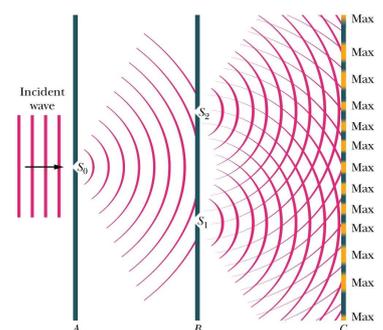
Übergang von Strahlen / zur Wellenoptik: Spalt verkleinern => Zahl der Wellenzentren sinkt

Exp. Laserinterferenz am Einfachspalt mit variabler Spaltbreite

1.2 Beugung am Doppelspalt

1801 Beugung von Licht (Thomas Young) erster Nachweis, dass Licht eine Welle ist

- Spalt S_0 sendet 1 monochromatische Kugelwelle aus, trifft S_1, S_2
- Spalte S_1, S_2 senden gleichzeitig Kugelwellen mit gleicher Phase aus
- gleichphasig: feste zeitl / räuml. Beziehung der Wellen aus S_1, S_2
- Interferenz der Wellen, Interferenzmuster sichtbar an Schirm
- Wellenberg + Tal => Auslöschung (Minimum)
- Wellenberg + Berg => Verstärkung (Maximum)



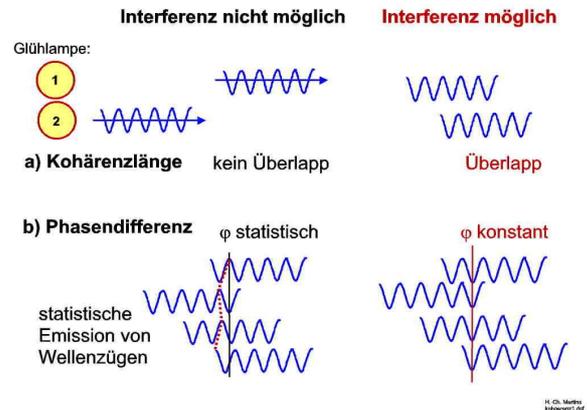
1.3 Kohärenz

zur Interferenz benötigt man kohärente Wellenzüge, d.h.

- a) zeitlich konstante Phasenbeziehung => immer gleiche Art der Interferenz (pos, neg)
- b) gleiche Frequenz, gleiche Wellenlänge
- c) Kohärenzlänge ausreichend groß (Überlapp)

Glühlampe: inkohärent, da statistische Emission von Wellenzügen, willkürliche Verteilung von pos. und neg. Interferenz

Laser: kohärent, da feste Phasenbeziehung Zwischen den Wellenzügen



Strahlteilung: Interferenz an dünnen Schichten, Michelson-Interferometer kohärent, da ein Wellenzug immer geteilt wird und mit sich selbst interferiert, aber Kohärenzlänge beachten!

Punktförmige Lichtquelle nahezu kohärent, wenn $d \cdot \theta \ll \lambda$

Das Diagramm zeigt eine kreisförmige Lichtquelle mit dem Durchmesser d . Ein Winkel θ ist durch zwei abgewinkelte Pfeile angedeutet, die von der Quelle ausgehen.

2 Interferenz an dünnen Schichten

Farbiges Schillern von Seifenblasen oder von Ölflecken auf einer Pfütze entsteht durch wellenlängenabhängige Interferenz des weißen Spektrums. Kohärenzbedingung ist meist gegeben, da *ein* Strahl aufgespalten wird.

Exp. Interferenz an senkrecht stehender Seifenhaut mit weißem Licht

Tafelbild

2.1 Interferenzberechnung

Objekt: Schicht mit Brechungsindex n

hier $n = 1,5$ (Schicht), $n_1 = n_3 = 1$ (Luft)

Licht: *ein* Wellenzug spaltet an Schicht in 2 Teilwellen und interferieren mit sich selbst

Interferenz: von 2 reflektierten, kohärenten Teilwellen

Gesucht: Phasendifferenz der 2 reflektierten Teilwellen

Phasendifferenz:

a) Reflexion an optisch dichtem Medium: $\varphi = \pi$ $\Delta_R = \frac{1}{2} \lambda$

an optisch dünnem Medium: $\varphi = 0$ $\Delta_R = 0$

b) geometrische Weglänge Δ_L

c) optische Weglänge: $n \cdot \Delta_L$ Warum ?

weil $n = \frac{c}{c_{mat}}$ c_{mat} : Lichtgeschwindigkeit in Materie

$$d = c_{mat} t = \frac{c}{n} t \Rightarrow d n = c t \quad \text{Lichtweg in Materie mit } n \text{ multiplizieren!}$$

längerer „Aufenthalt“ des Lichtes in Materie

=> Gangunterschied $\Delta = n \cdot \Delta_L + \Delta_R$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} + \frac{\lambda}{2}}} \quad (\theta \text{ Einfallswinkel, selber rechnen})$$

konstruktive Interferenz: $\Delta = m \lambda$ $m = 0, 1, 2, \dots$

destruktive Interferenz: $\Delta = \frac{2m+1}{2} \lambda$

Beachte: Interferenz abhängig von d, θ, λ

2.2 Anwendung:

1) Reflexionsverstärkung im Interferenzspiegel für festen Winkel θ , Wellenlänge λ

2) Dickenbestimmung von sub- μm -Schichten (optische & Halbleiterindustrie)

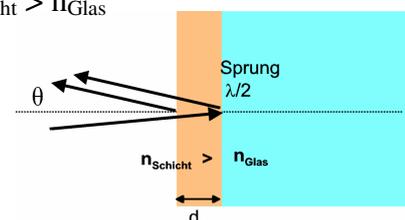
3) Anti-Reflex-Beschichtung, Interferenzfilter für feste Wellenlänge

Ziel: Auslöschung der reflektierten Strahlen (hier $\theta = 0^\circ$)

$$\Rightarrow \frac{2m+1}{2} \lambda = \Delta = \underbrace{2nd}_{\text{Wegunterschied}} + \underbrace{\frac{1}{2} \lambda}_{\text{Phasensprung}}, \quad \text{mit } n = n_{\text{Schicht}} > n_{\text{Glas}}$$

$$\Rightarrow \lambda = 2nd, \quad m = 1$$

$$\Rightarrow d = \frac{\lambda}{2n} \quad \text{Dicke der Anti-Reflex-Schicht}$$



Beachte: für $m = 0$ Auslöschung auch für $d \approx 0$, Phasensprung reicht! Billige Lösung, da kaum Materialverbrauch für Schicht, aber $d = 0$ geht nicht.

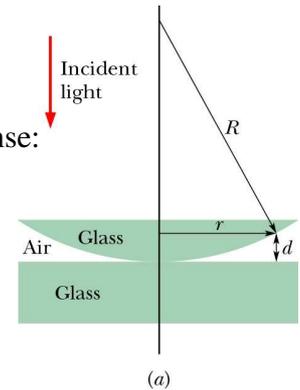
4) Interferenz an Luftschicht, Vermessung von Krümmungsradien

Exp. Newtonsche Ringe

Radius r eines Interferenzringes abhängig vom Krümmungsradius R der Linse:

$$r^2 = 2Rd - d^2, \quad \text{bei schwach gewölbten Linsen gilt } d \ll R,$$

$$\Rightarrow r^2 = m\lambda R.$$

**2.3 Michelson Interferometer**

Messung: Weglängen-Unterschiede in Einheiten der Lichtwellenlänge

Prinzip: Erzeugung / Auswertung von Interferenzmustern

Interferenz konstruktiv: hell

$$\Delta L = m\lambda = 2(d_2 - d_1)$$

Interferenz destruktiv: dunkel

$$\Delta L = \frac{1}{2}(2m + 1)\lambda = 2(d_2 - d_1)$$

Messung: Änderung des Interferenzmusters durch

a) ΔL ändern, Spiegel M1 um Δx verschieben

$$\Delta x = \frac{1}{4}\lambda \Rightarrow \Delta L = \frac{1}{2}\lambda \Rightarrow \text{heller Streifen wandert auf nächsten dunklen}$$

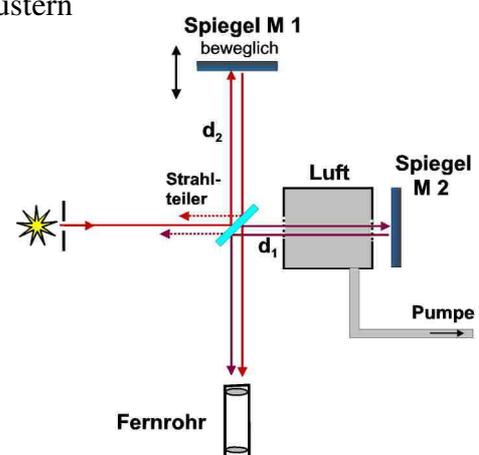
$$\Delta x = \frac{1}{2}\lambda \Rightarrow \Delta L = \lambda \Rightarrow \text{heller Streifen wandert auf nächsten hellen}$$

\Rightarrow wandernde Streifen zählen $\Rightarrow \Delta x$ bestimmen

b) dünnes transparentes Material in einen Weg stellen

$$\Delta L = 2nd \quad n: \text{Brechungsindex, } d: \text{Materialdicke}$$

\Rightarrow n oder d bestimmen



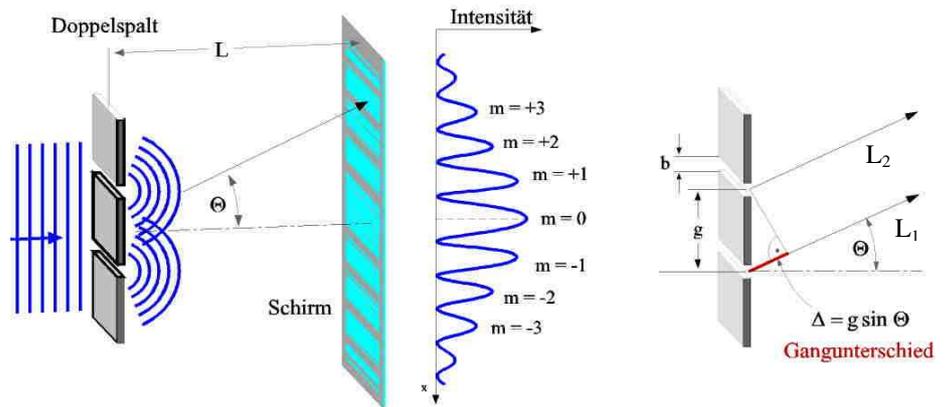
- Streckendifferenzen in Einheiten der Lichtwellenlänge zu messen, also extrem genau

- Weltweit verfügbar (Urmeter in Paris nicht mehr nötig)

- Meter = 1 553 163,5fache der Wellenlänge einer Cd-Spektrallinie, 1907 Nobelpreis.

3. Beugung an Spalten

Exp. Laserinterferenz
am Doppelspalt



3.1 Interferenz-Muster

Wellen aus Spalten S_1, S_2 sind phasengleich

gesucht: Phasendifferenz φ am Ort P, berechnet wird aber Weglängendifferenz Δ

Interferenzort gegeben durch Richtung θ zum Interferenzmaximum / Minimum

Näherung: $L \gg d \Rightarrow L_1, L_2$ parallel

$\Rightarrow L_1 - L_2 = \Delta = d \sin \theta$ Spaltabstand wird oft mit g oder d bezeichnet

Maxima: $\Delta = m\lambda = d \sin \theta$, $m = 0, 1, 2, \dots$ Wellen von S_1, S_2 addieren sich

Minima: $\Delta = (m + \frac{1}{2})\lambda = d \sin \theta$ $m = 0, 1, 2, \dots$ Wellen von S_1, S_2 löschen sich aus

Beugungsordnung: $m = 0$ Hauptmaximum

$m = \pm 1, 2, 3 \dots$ Nebenmaxima

Zusammenhang Weglängen-

Phasendifferenz:

Maxima $\Delta = m\lambda$ $\varphi = m(2\pi)$ $m = 0, 1, 2, \dots$

Minima $\Delta = (m + \frac{1}{2})\lambda$ $\varphi = (m + \frac{1}{2})2\pi$

$\Rightarrow \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta}{\lambda}$, generell

$\Rightarrow \underline{\underline{\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta}}$ (für Doppelspalt, mit $\Delta = d \sin \theta$)

3.2 Interferenz-Intensitäten

betrachte Wellen am Interferenzort

von S_1 $E_1 = E_0 \sin \alpha$ mit $\alpha = kx - \omega t$

von S_2 $E_2 = E_0 \sin(\alpha + \varphi)$ φ : Phasendifferenz am Interferenzort durch Δ

Interferenz $E = E_1 + E_2$ mit $\sin \beta + \sin \gamma = 2 \cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma) \cdot \sin \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ folgt

$$E = \underbrace{2E_0 \cos \frac{1}{2} \varphi}_{\text{Amplitude}} \cdot \underbrace{\sin \left(\alpha + \frac{1}{2} \varphi \right)}_{\text{periodischer Wellenteil}}$$

$$\text{a) } \Rightarrow \quad \underline{\underline{I = 4E_0^2 \cos^2 \left(\frac{1}{2} \varphi \right)}} \quad (\text{Intensität = Quadrat der Amplitude})$$

$$\text{b) } \Rightarrow \quad \underline{\underline{I = 4I_0 \left(\cos \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right) \right)^2}} \quad (\text{für Doppelspalt, } \theta: \text{ Richtungswinkel})$$

a) Interferenz-Intensität $I(\varphi)$

von zwei kohärenten Wellen als Funktion des Phasenunterschieds φ , für Spaltbreite $d \ll \lambda$,
Beachte: dies ist nicht die räumliche Intensitätsverteilung, die man am Schirm beobachtet!

$$\text{Mittlere Intensität: } I_{\text{gem}} = \frac{1}{2} \cdot 4I_0 = 2I_0 \quad (\text{mit } (\cos \alpha)_{\text{gem}}^2 = 1/2)$$

$$\text{Inkohärente Wellen: } I = E_1^2 + E_2^2 = 2E_0^2 = 2I_0$$

\Rightarrow der Mittelwert aus 2 kohärenten Quellen ist
gleich der Intensität aus 2 inkohärenten Quellen

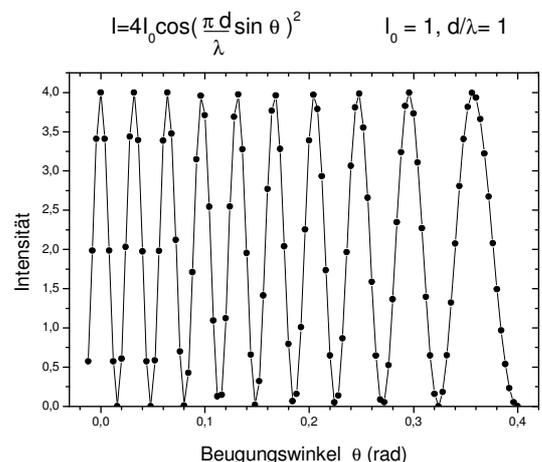
Tafelbild

Beachte: Interferenz kann Energie nicht schaffen
oder vernichten, nur umverteilen. Mittlere
Int. = $2I_0$. Interferenz nur bei konstanter Phasen-
differenz überlagernder Wellen (Kohärenz)

b) Interferenz-Intensität $I(\theta)$

von zwei kohärenten Wellen als Funktion des Richtungswinkels θ . Dies ist das Beugungsbild
des idealen Doppelspaltes mit $d \ll \lambda$

Exp. Laserinterferenz am Doppelspalt



3.3 Einzelspalt

Exp. Beugung am variablen Einzelspalt, hier Spaltbreite fest

Modell: Huygensche Elementarwellen in Spaltebene

Einteilung in 2 Hälften, Paare von Strahlen suchen

Max. im Zentrum: je 2 Strahlen gleicher Länge => pos. Interferenz

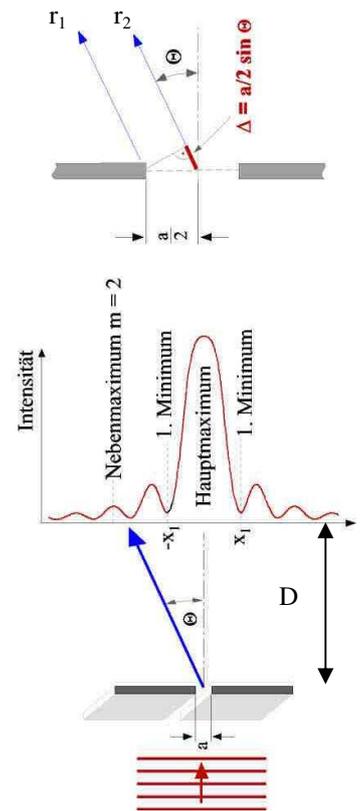
Nebenminimum: je 2 Strahlen mit $\Delta L = \frac{2m+1}{2} \lambda$

1. Paar: $\Delta L = r_2 - r_1$, $D \gg a \Rightarrow r_2, r_1$ parallel

$$\Delta L = \frac{a}{2} \sin \theta \Rightarrow \frac{\lambda}{2} = \frac{a}{2} \sin \theta$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\lambda = a \sin \theta}} \quad \text{1. Minimum}$$

2. Paar r_2, r_1 ein Wellenzentrum tiefer setzen,
Rechnung s.o. (r_1, r_2 parallel)



Was passiert mit dem Beugungsmuster, wenn der Spalt schmaler wird ?

Tafelbild

Exp. Beugung am variablen Einzelspalt, Spaltbreite ändern

Beobachtung: Zentralmaximum wird breiter mit fallender Spaltbreite a,
d.h. Beugungseffekt nimmt zu. Übergang Strahlen => Wellenoptik!

Deutung: $\lambda = a \sin \theta$, θ = Position des 1. Minimums

$$\frac{\lambda}{a} = \sin \theta \Rightarrow \text{wenn } a \Rightarrow \lambda \text{ dann } \theta \Rightarrow 90^\circ$$

=> 1. Min. wandert nach außen, d.h. Zentralmaximum verbreitert

Bsp.

Frage: Spalt wird mit Licht zweier Farben beleuchtet

Welche Wellenlänge erzeugt welches Muster?

Lsg.

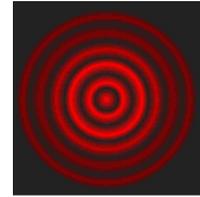
Exp. Beugung von weißem Licht am Einzelspalt

3.4 Pinhole & Auflösbarkeit

Beugung an einer Lochblende mit Durchmesser a , z.B. Linse, Apperturblende

Exp. Beugung an Lochblende

Beobachtung: Ringsystem statt rundem Fleck



1. Minimum $1,22 \cdot \lambda = a \sin \theta$, Faktor 1,22 durch Loch statt Spalt

Anwendung: Durchmesser kleinster Blenden bestimmen

Die Auflösung von Objekten durch optische Geräte ist durch Beugung des Lichtes begrenzt

Fernrohr: punktförmiger Stern => Beugung an Blende => Stern als Scheibe abgebildet

Breite der Scheibe = Breite des Zentralmaximums

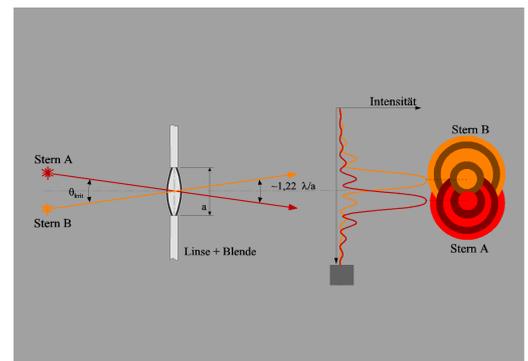
Trennung von 2 Sternen: wenn Max von Stern A auf 1. Min von Stern B, also:

$$\theta_R \geq \arcsin\left(\frac{1,22\lambda}{d}\right) \approx 1,22 \frac{\lambda}{a} \quad (\text{Rayleigh-Kriterium})$$

Faustformel: Auflösung optischer Geräte maximal $\sim \lambda$

Auflösung vergrößern durch:

- Blende d öffnen
- Licht mit kleinerem λ verwenden (Röntgen, $\lambda \sim 1 - 0.01 \text{ nm}$)
- Elektronenmikroskop (Materiewelle mit kleinem λ)



3.5 Realer Doppelspalt

idealer Doppelspalt: Spaltbreite $a \ll \lambda$

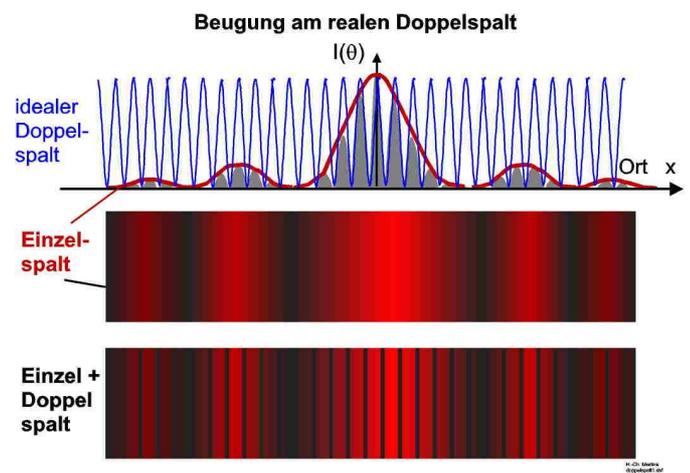
Realer Doppelspalt: $a \gg \lambda$

=> Beugung an jedem Einzelspalt + Beugung am Doppelspalt-Paar betrachten

$$\Rightarrow I(\theta) = I_{\text{Einzelspalt}} \times I_{\text{Doppelspalt}}$$

mit $\alpha = \frac{1}{2} \varphi$ Phasendifferenz

$$\Rightarrow I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$



3.6 Beugungsgitter

wie Doppelspalt, aber mehr Spalte, Anordnung von vielen kohärenten Lichtquellen (Spalten)

Tafelbild

3.6.1 Prinzip

Gitterkonstante: $d = \frac{w}{N}$ w: Gitterbreite (ausgeleuchtet)

Gitterstrichzahl: N, typisch $N \sim 100 - 3000$ Striche pro mm

Maximum: je 2 benachbarte Strahlen (parallel) mit

$$\Delta L = \lambda = d \sin \theta = \text{Weglängendifferenz}$$

$$\Rightarrow \underline{d \sin \theta = m \lambda} \quad (\text{wie Doppelspalt})$$

Was passiert, wenn $\Delta L \neq \lambda$? \Rightarrow

Minimum: 2 Strahlen mit $\Delta L = \frac{1}{4} \lambda \Rightarrow$ übernächster Strahl $\Delta L = \frac{1}{2} \lambda \Rightarrow$ Auslöschung

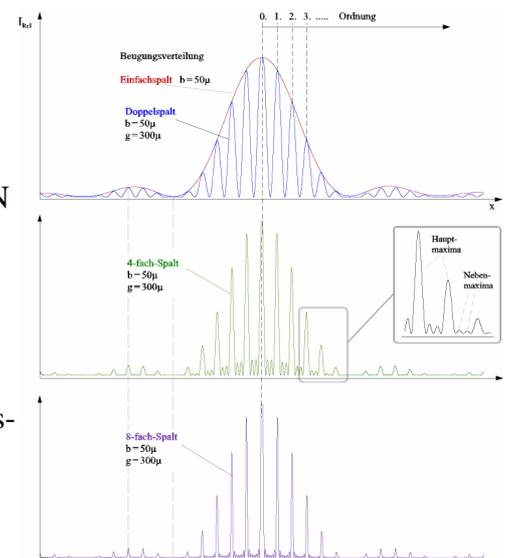
2 Strahlen mit $\Delta L = \frac{1}{6} \lambda \Rightarrow$ dritt-nächster Strahl $\Delta L = \frac{1}{2} \lambda \Rightarrow$ Auslöschung

usw.

Gitter

- es gibt mehr Strahl-Paarungen (Richtungen θ), die zu destruktiver, als zu konstruktiver Interferenz führen
- Lage der Hauptmax. nicht von Gitterstrichzahl N abhängig
- Maxima werden schmaler mit wachsender Gitterstrichzahl N
- Nutzbar zur Licht-Dispersion (Spektrometer)

Exp. Gitter beleuchten mit monochromatischem und weißem Licht, Wellenlängenmessung = Beugungswinkel der Linie und Ordnung m ermitteln
CD mit 500 nm breiten Rillen wirkt wie Gitter



3.6.2 Linienbreite

Großer Vorteil des Gitters gegenüber dem Doppelspalt: geringe Linienbreite der Maxima,

Linienbreite gibt an, wie scharf das Maxima räumlich lokalisiert sind.

Tafelbild

Auflösungsvermögen im Spektrometer wichtig, um Linien zu trennen:

Linienbreite: $\theta_{1/2}$ = Abstand Zentrum – 1. Minimum

Gesucht 2 Strahlen, die zum 1. Nebenminimum führen

$$\Rightarrow \text{Randstrahl} + \text{Mittelstrahl} \Delta = \lambda/2 \quad (\text{siehe Einzelspalt})$$

$$\sin \theta_{1/2} = \frac{\Delta}{Nd/2} = \frac{\lambda}{Nd} \quad (\text{Breite des } m=0\text{-ten Maximums})$$

$$\Rightarrow \theta_{1/2} = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta} \quad \text{Linienbreite beliebiger Linie in Richtung } \theta$$

(ohne Beweis)

$$\Rightarrow \text{Linienbreite } \underline{\theta_{1/2} \sim \lambda \sim 1/N} \quad (\theta_{1/2} \sim \sin \theta_{1/2} \text{ für kleine Winkel})$$

Ziel: Spektrometer mit schmaler Linienbreite => Gitter mit großem N verwenden

3.6.3 Auflösungsvermögen

Spektrometer nutzt Beugungsgitter zur Trennung der Spektrallinien bestimmter Wellenlängen

Exp. Linienspektrum der Hg-Lampe zeigen

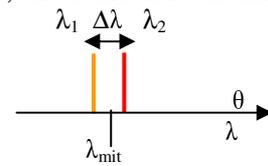
Problem: oft liegen die Linien eng beieinander und „verschmieren“

Frage: wie klein darf der Linienunterschied $\Delta\lambda$ sein, um die Linien λ_1, λ_2 trennen zu können?

$$\underline{R = \frac{\lambda_{mit}}{\Delta\lambda} = Nm}$$

Auflösungsvermögen

m: Beugungsordnung (ohne Beweis)



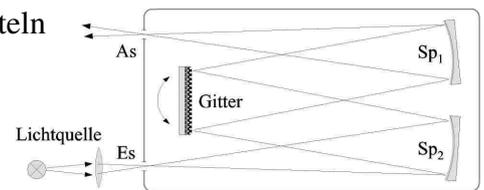
6.7.4 Gitterspektrometer

Ziel: Emissionswellenlängen von Lichtquellen ermitteln

Prinzip: Beugung am Strichgitter

Messung: Beugungswinkel θ (meist für Ordnung $m = 1$)

beachte: $m = 0 \Rightarrow$ weißes Licht



Optimierung: große Auflösung: $R = Nm$, gute Trennung der Linien, lichtstark

Gitter Reflexion, Transmissionsgitter

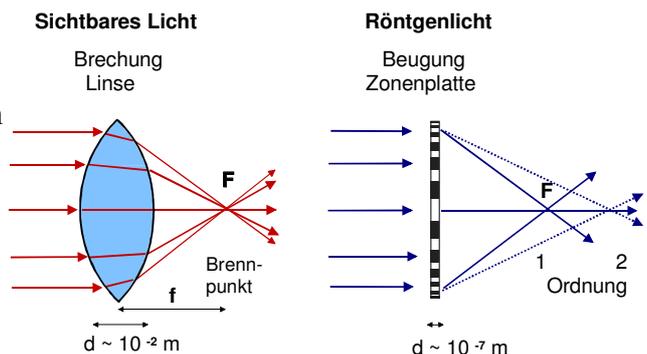
FOLIE AU-GITTER

Typisch 1000 Striche / mm

3.6.5 Fresnel-Zonenplatten

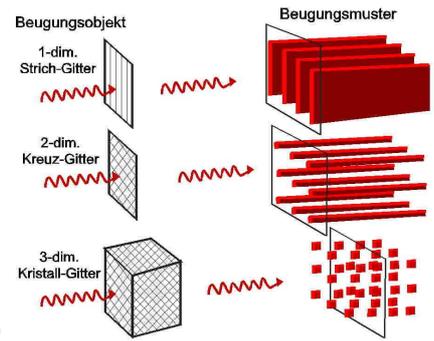
Fokussierung: durch Beugung (nicht verwechseln mit Fresnel-Linsen, Brechung)

Anwendung: Röntgenstrahlen, die in Linsen absorbiert werden würden



3.7 Beugung an Kreuz / Raumgitter

- Strichgitter: 1-dimensionale Anordnung von Wellenzentren
Beugungsbild: Platten im Raum (2-dimensional)
- Kreuzgitter: 2-dimensionale Anordnung
Beugungsbild: Stäbe im Raum (1-dimensional)
- Raumgitter: 3-dimensionale Anordnung
Beugungsbild: Punkte im Raum (0-dimensional)



Exp. Kreuzgitter

3.8 Röntgenbeugung

Röntgenstrahlung $0,01 \text{ nm} < \lambda < 1 \text{ nm}$, Wellenlänge \ll sichtbares Licht (400 – 750 nm)

Problem: Strichgitter nicht brauchbar,
Trennung der Beugungsordnungen nicht möglich

Bsp. $\lambda = 0,1 \text{ nm}$, Gitter $d = 1 \mu\text{m}$ (1000 Striche / mm)

$$\theta = \arcsin \frac{m\lambda}{d} = 0,006^\circ \Rightarrow \text{Abstand 1-ter von 0-ter Ordnung zu klein}$$

d.h. für $\Delta x = 1 \text{ mm} \Rightarrow$ Abstand Gitter / Schirm = 9,5 m kaum machbar

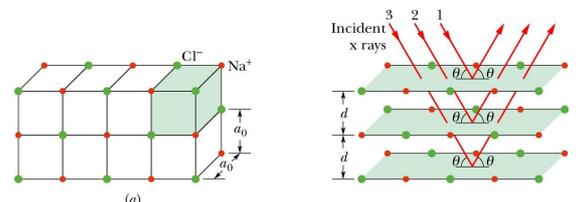
Gesucht Beugungsobjekt mit Gitterabstand $d \sim \lambda$ wünschenswert

Lösung Kristallgitter, Atomabstand $d \sim 0.3 \text{ nm}$

Beugung der Röntgenstrahlung an den Atomen führt zu Interferenz

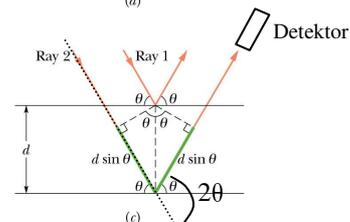
Beachte Beugung am 3-dim Kristall ist verschieden von Beugung am Strichgitter,
exakte Berechnung ist kompliziert

Modell Atome bilden parallele Kristallebenen
Kristallebenen „reflektieren“ Röntgenlicht



Gesucht Weglängendifferenz von 2 Strahlen

Lsg. - Reflexion, keine Brechung, da $n \sim 1$



$$\Rightarrow \underline{2d \sin\theta = m\lambda}$$

Bragg-Winkel θ

Bragg-Bedingung für Maxima der Ordnung m
gemessen zur Oberfläche !!

<u>Vergleich</u>	<u>1-dim. Strichgitter</u>	<u>3-dim Kristallgitter</u>
Einfallswinkel	unwichtig	Max nur für θ mit $2d \sin\theta = m\lambda$
Beugungswinkel	Max bei θ	Max bei 2θ
Gitterabstand	d	d abh. von Kristallorientierung

Anwendung: Kristallstrukturanalyse, Bestimmung von d, ausführlicher im Kapitel „Festkörperphysik“

Zusammenfassung: Prüfungstrainer Kapitel 5.3, Fragen 5.3.1 – 5.3.17.

QUANTENMECHANIK

Die Quantenmechanik beschäftigt sich mit der Mikrowelt, genauer der subatomaren Welt. Die Quantenmechanik beschreibt Dimensionen, in die wir im alltäglichen Leben nicht vorstoßen, also in der klassischen Physik nicht erfasst wurden. Allerdings basieren die meisten elektronischen / optischen / magnetischen Geräte auf den Erkenntnissen der Quantenmechanik (Transistor, Mikroelektronik, warum ist Cu elektrisch leitend und Glas nicht?) ebenso wie die Chemie, Biochemie, also Lebenswissenschaften oder die Astrophysik (warum leuchten Sterne)

FOLIE

1 Photonen

1.1 Quantisierung

Viele Größen sind ganzzahlige Vielfache einer nicht teilbaren Grundgröße (Quantum)

Ladung $q = ne$, $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$, $n \in \mathbb{Z}$

Bsp. Euro $W = nC$ $C = 1 \text{ Cent}$, Quantum = 1 Cent, $n \in \mathbb{N}$,
 $0,755 \text{ €} = 75,5 \cdot 1 \text{ Cent}$, $n = 75,5$ gibt es nicht

klassische Physik Quantisierungen sind kaum zu beobachten, da zu klein

1.2 Photon (Licht)

Bedeutung: ohne Licht kein Leben, Opto-Elektronik, Materialanalyse vorwiegend mit Licht, entscheidende Frage am Anfang der Quantenphysik war: wie funktioniert die Wechselwirkung von Licht und Materie

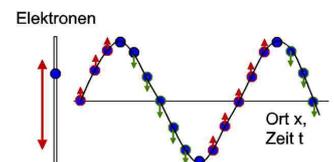
1.2.1 Klassisch: Licht-Welle

Welle $E(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)$ E-Feld der Lichtwelle

Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$, Frequenz $\omega = 2\pi f$, Phase φ , Geschw. $c = \lambda f$

Intensität $I = |E_0|^2$

WW-Materie Elektronen schwingen wie Hertzscher Dipol in der Materie
 Beliebige Anregung durch E-Feld der Lichtwelle möglich



hf

1.2.2 Quantenmechanik: Photon (Licht-Teilchen)

Frequenz f Verbindung zur klassischen Physik

Energie $\underline{E = hf}$ Energie eines Photons der Lichtwelle mit der Frequenz f

$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ Plancksches Wirkungsquantum (neue Naturkonstante)

Geschw. c

Intensität $I = nE/At$ Zahl der Photonen \times Energie pro Zeit u. Fläche



WW-Materie Absorption / Emission ganzer Photonen, d.h. vernichtet / erzeugt Energiepakete

Beachte: Photon ist keine fliegende Materie, die kinetische Energie trägt

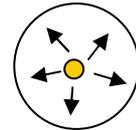
Bsp. Frage: Ordne nach wachsender Photonenenergie: gelbes Licht, radioaktive Gammastrahlung, Radiowelle einer Antenne

Lsg.

Bsp. Na-Lampe emittiert gelbes Licht ($\lambda = 590 \text{ nm}$) mit $P = 100 \text{ W}$ in Kugel

Frage: mit welcher Rate absorbiert die Kugel Photonen?

Lsg.



1.2.3 Photo-Effekt

Exp. Metallplatte elektrostatisch aufladen, mit UV-Licht entladen

Experiment: Licht kurzer Wellenlänge trifft auf eine Metallplatte und löst Elektronen aus.

Messung: i) Photoelektronen: Strom I
ii) E_{kin} als Funktion der Lichtfrequenz

Messung E_{kin} Gegenfeldmethode, Elektronen müssen elektr. Potenzial U_0 überwinden

$E_{\text{kin}} > eU_0 \Rightarrow$ Elektronen dieser Energie erreichen Drahtnetz, bilden Strom I

Stelle U_0 so ein, dass $I = 0$, dann $E_{\text{kin}} = eU_0$

Beobachtung:

a) Licht muss eine Mindestfrequenz f_{min} besitzen um Elektronen auszulösen

Tafelbild

b) E_{kin} der Elektronen steigt linear mit der Frequenz f des Lichtes:

$$E_{\text{kin}} \sim (f - f_{\text{min}})$$

c) E_{kin} der Elektronen hängt *nicht* von der Lichtintensität ab

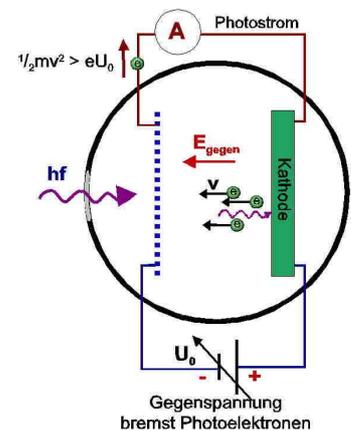
Deutungsversuche

1) klassisch:

Licht als elek.magn. Welle regt Elektronen im Metall zu Schwingungen an (Hertzscher Dipol)

\Rightarrow Schwingungs-Amplitude wächst \Rightarrow Elektronen lösen sich

\Rightarrow Amplitude \sim Intensität \Rightarrow freie Elektronen bei heller Lampe **Falsch!**



2) quantenmechanisch:

Energieabgabe Photon => Elektron gequantelt ($E = hf$) & vollständig

zu a) $hf \geq W_A = hf_{\min}$ Mindestfrequenz f_{\min} zur Ablösung der Elektronen nötig

zu b) $E_{\text{kin}} = hf - W_A$ Aufteilung in Ablöse-, Rest kin. Energie

zu c) $I = nE/At$ Intensität ~ Photonenzahl, irrelevant ob Prozeß statt findet

Int. ~ Zahl der abgelösten Elektronen falls $f > f_{\min}$

Neue Naturkonstante

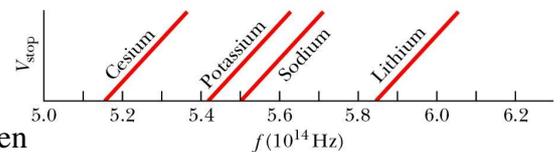
$$h = 4.1 \cdot 10^{-15} \text{ Vs} * 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

Deutung durch Einstein 1905, Basis: Planck's Quantenhypothese, Nobelpreis 1919

Bsp. Messkurven $U_g(f)$ für verschiedene Metalle.

Frage Ordne die Metalle nach ihrer Austrittsarbeit

Frage Ordne Kurven nach dem Wert, den sie für h ergeben



Anwendung: Photomultiplier

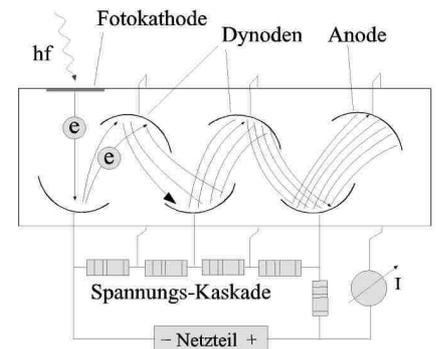
Prinzip: 1 Photon löst 1 Elektron aus,

=> Elektron wird auf Dynode beschleunigt, löst 2 Elektronen aus

=> Beschleunigung auf weitere Dynoden

=> e-Kaskade => Strommessung

=> Verstärkung: bis 10^{10} -fach, Nachweis einzelner Photonen



1.2.4 Photonen-Masse

nach der Relativitätstheorie sind Energie und Masse korreliert

$$E = mc^2 = hf$$

=> $m = \frac{hf}{c^2}$ Photonenmasse, beachte: es gibt keine Ruhemasse des Photons

wenn Photonen Masse besitzen, dann kostet es Energie, sie im Gravitationsfeld zu bewegen

Bewegung $r_1 \Rightarrow r_2$

$$\text{Potenzial} \quad \Phi(r) = \frac{G m_{\text{Erde}}}{r}, \quad G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

$$\Delta\Phi = \Phi(r_2) - \Phi(r_1) \quad \text{Potenzialdifferenz im Gravitationsfeld}$$

$$\text{Arbeit} \quad W = m\Delta\Phi = \frac{hf}{c^2} (\Phi(r_2) - \Phi(r_1))$$

Energieerhaltung bedeutet Frequenzänderung, also

$$f_2 = f_1 \left(1 + \frac{\Delta\Phi}{c^2} \right) \Rightarrow \frac{f_2 - f_1}{f_1} = \frac{\Delta\Phi}{c^2}$$

=> Energieverlust, wenn Photonen gegen die Erdanziehung fliegen müssen

=> Rotverschiebung des Lichtes

Bsp. Lichtquelle sendet (sichtbare) Photonen in Erdnähe 20 m hoch aus

$$\Rightarrow \frac{\Delta f}{f} = 2,5 \times 10^{-15} \quad (\text{gemessen Pound, Rebka 1960 über Mößbauereffekt})$$

Bsp. Licht von der Sonne bis zur Erde: nur Gravitationsfeld der Sonne betrachten

$$\Rightarrow \frac{\Delta f}{f} = 5 \times 10^{-7} \quad \text{mit Interferometer leicht messbar}$$

1.2.5 Photonenimpuls

Einstein postuliert 1916: Photonen haben einen Impuls, Konsequenz aus Teilchenbild,

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad \text{Photonenimpuls, } \lambda: \text{ Lichtwellenlänge}$$

W.W. Licht / Materie wie Stoß behandeln: a) Energieübertrag , b) Impuls Übertrag

$$\begin{aligned} \text{Idee: } p = mv &= \frac{2}{v} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = \frac{2}{v} E \quad \text{Teilchen in klassischer Mechanik } v \ll c \\ &= E/v \quad \text{wenn } v \approx c \text{ relativistisch rechnen} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{c} hf = \frac{1}{c} \frac{hc}{\lambda} = \frac{h}{\lambda} \quad \text{Licht-Impuls}$$

Compton-Effekt (1923)

Exeriment. Streuung von Röntgenphotonen an leicht gebundenen Elektronen von Kohlenstoff. Monochromatisches, einfallendes Röntgenlicht $\lambda_{\text{Rön-in}} = 71 \text{ pm}$

Messung: Wellenlänge und Intensität der gestreuten Photonen als Funktion des Winkels.

Beobachtung:

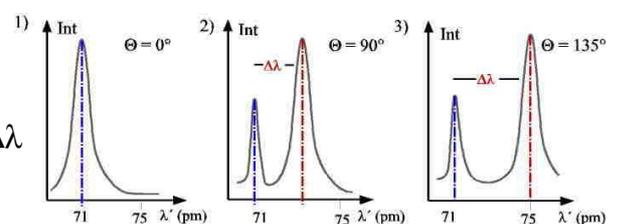
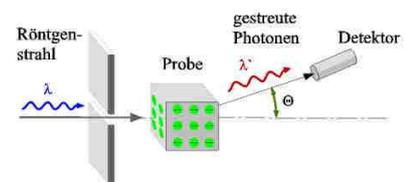
1) Streulicht mit 2 Wellenlängen:

a) $\lambda_{\text{Rön-in}}$, b) $(\lambda_{\text{Rön-in}} + \Delta\lambda)$

$\Delta\lambda = \text{Comptonverschiebung}$

2) mit steigendem Streuwinkel wächst $\Delta\lambda$

Frage: woher kommt die neue Wellenlänge?



Deutung klassisch:

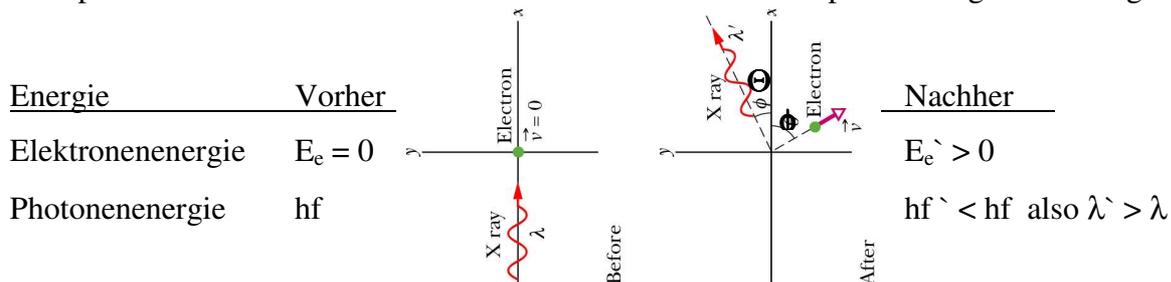
$f_{\text{Elek}} = f_{\text{Rönt-in}}$ Lichtwelle regt Elektron zu Schwingung an

$f_{\text{Rön-out}} = f_{\text{Elek}} = f_{\text{Rön-in}}$ Elektron strahlt wie Hertz-Dipol Welle ab

=> Streustrahlung dürfte nur eine Frequenz besitzen **Falsch**

Deutung quantenmechanisch:

Stossprozess zwischen den Teilchen Photon und Elektron & Impuls / Energie Erhaltungssätze



a) Energieerhaltung: $hf = hf' + E_e'$

Da Rückstoß des Elektrons ~ Lichtgeschwindigkeit => relativistisch rechnen

Elektron $E_e' = mc^2(\gamma - 1), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad v = \text{Elektronengeschw.}$

$hf = hf' + mc^2(\gamma - 1), \quad \text{mit } f = c/\lambda$

$h/\lambda = h/\lambda' + mc(\gamma - 1),$

b) Impulserhaltung: $p_{\text{phot}} + p_e = p_{\text{phot}'} + p_e'$

Photon $p = h/\lambda \quad (\text{Einstein's Postulat})$

Elektron $p_e' = \gamma mv, \quad \text{relativistisch}$

x-Richtung $h/\lambda = h/\lambda' \cos\theta + \gamma mv \cos\phi$

y-Richtung $0 = h/\lambda' \sin\theta + \gamma mv \sin\phi \quad \text{ohne Bew. folgt}$

=>
$$\underline{\underline{\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)}} \quad \text{Comptonverschiebung}$$

Comptonwellenlänge $\lambda_C \equiv h/mc$ hängt nur von Masse des streuenden Teilchens ab

Ursprung der beiden Wellenlängen:

$(\lambda_{\text{Rön-in}} + \Delta\lambda)$:Streuung an leichten Elektronen $\Delta\lambda_e = h/m_e c$

$(\lambda_{\text{Rön-in}})$: Streuung an schweren C-Atomen $\Delta\lambda_A = \Delta\lambda_e / (22000 \times m_e) \sim 0$

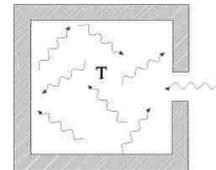
Bsp. wie groß ist die Comptonverschiebung für sichtbares Licht $\lambda = 550 \text{ nm}$ an Elektronen?

Lsg

1.2.6 Schwarzer Strahler

Temperaturstrahler, Hohlraumstrahler,

Historischer Ausgangspunkt der Quantentheorie durch Max Planck



a) idealer Absorber:

- Hohlraum mit kleinem Loch

- absorbiert Strahlung ohne Bevorzugung der Wellenlänge, daher schwarz

b) Temperaturstrahler:

- aus Loch tritt Strahlung aus deren

spektrale Intensitätsverteilung von der Temperatur abhängt

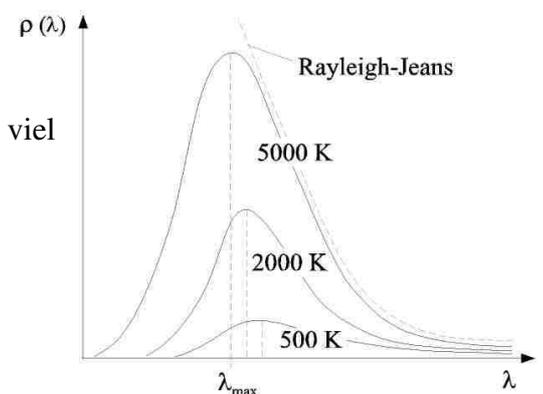
- im thermischen Gleichgewicht wird von den Wänden gleich viel

Energie emittiert wie absorbiert

$\rho(\lambda)$: spektrale Strahlungsdichte =

Energie im Frequenzintervall $(f, f+df)$ pro cm^3

- Fläche unter der Kurve = abgestrahlte Gesamtintensität



Planck's Quantenhypothese:

Problem: Kurve $\rho(\lambda)$ konnte durch klassische Physik nicht erklärt werden

Klassische Vorstellung: Energieaustausch Wand – Strahlungsfeld durch beliebige Energiemengen möglich, erlaubt aber keine Deutung

Lösung: Quantenhypothese: „Monochromatisches Licht der Frequenz f tritt bei Absorptions / Emissionsprozessen nur in ganzen Energiequanten $E = hf$ auf“

$$\underline{\underline{\rho(f, T) df = \frac{4\pi h f^3}{c^3 \cdot (\exp\{hf/kT\} - 1)} df}}}$$

Mit steigender Temperatur:

- a) wächst $\rho(\lambda)$, also die Intensität
- b) schiebt das Maximum von $\rho(\lambda)$ zu größerer Energie

$$\lambda_{\max} = \frac{2,898 \text{ mm} \cdot \text{K}}{T} \quad \text{Wiensches Verschiebungsgesetz}$$

Anwendung: kontaktlose Temperaturbestimmung durch Messung von $\rho(\lambda)$ u. λ_{\max}
Thermographie

Bsp. a) $\rho_{\text{Sonne}} \gg \rho_{\text{Herd}}$ \Rightarrow Sonne ist heller als Herdplatte

b) Sonne $T = 5800 \text{ K}$ $\Rightarrow \lambda_{\max} = 500 \text{ nm}$ grün

Herdplatte $T = 800 \text{ K}$ $\Rightarrow \lambda_{\max} = 5000$ infrarot

Exp. glühender Metalldraht mit Thermosensor unter Vakuumglocke

Rayleigh-Jeans-Gesetz = Grenzfall kleiner Energie $hf \ll kT$:

$$\rho(f, T) \sim f^2 T \quad (\text{Exponentialfunktion. In Reihe entwickeln})$$

Problem: Ultraviolett-Katastrophe, d.h. mit steigender Frequenz läuft $\rho(\lambda) \rightarrow \infty$

Stefan-Boltzmann Gesetz

Abgestrahlte Leistung eines Körpers

$$\underline{P = \varepsilon \sigma A T^4} \quad (\text{Stefan-Boltzmann-Gesetz})$$

mit $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K}^4)$ Stefan-Boltzmann-Konstante.

A strahlende Fläche des Körpers

ε Emissionsgrad, bzw. der Absorptionsgrad mit $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

Eigenschaft der Oberfläche Körpers, idealen schwarzen Strahlers $\varepsilon = 1$

Beachte: Wärmetransfer von Körper 1 nach 2 durch Wärmeleitung: $P \sim T_2 - T_1$

Strahlung $P \sim T_2^4 - T_1^4$

Zusammenfassung: Prüfungstrainer Kapitel 6.1, Fragen 6.1.1 – 6.1.12.

2 Materiewellen

De Broglie's Symmetriebetrachtung Welle - Teilchen (1924), Licht tauscht an lokalen Orten über Photonen Energie u. Impuls mit Materie aus

$$\text{Photonenimpuls} \quad p = \frac{h}{\lambda} \Leftrightarrow \text{Materiewelle} \quad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

Beachte: Materiewelle nur sinnvoll bei bewegter Materie $p \neq 0$

Beweis: Interferenzerscheinung 1927 (Davisson, Germer, Thomson), Elektronen, Atome, Teilchen müssten als Materiewelle Beugungserscheinungen zeigen

2.1 Elektronenwellen

Experiment I: Elektronen fallen durch einen Doppelspalt auf einen Leuchtschirm

Beobachtung: Streifen auf Leuchtschirm

FOLIE

Deutung: Interferenzstreifen, Elektronenstrahl verhält sich wie eine Welle

Experiment II: Elektronen werden durch Al-Kristallpulver geschossen

Beobachtung: Kreise um Zentrum auf Leuchtschirm, Radius abhängig von Spannung U

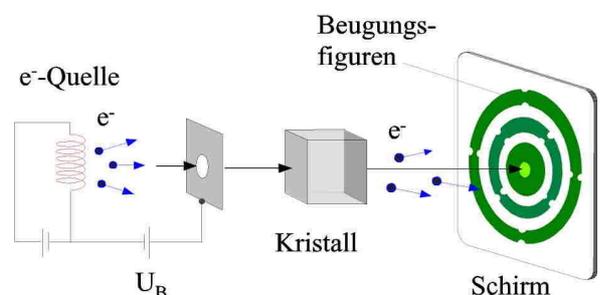
Deutung: Interferenz der Elektronenwelle an Kristallstruktur

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

$$eU = E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{m2eU}}$$

$$\Rightarrow \lambda \sim \frac{1}{\sqrt{U}} \Rightarrow \text{Wellenlänge durch Beschleunigungsspannung einstellbar}$$



Bsp. Elektronen werden in Fernsehöhre beschleunigt mit $U = 100 \text{ V}$

Frage Materiewellenlänge ?

Lsg

Exp. Elektronenbeugung an C-Film

Anwendung: Oberflächenanalyse in Halbleitertechnologie, Kristallanalyse (LEED, RHEED)

Vorteil gegen Röntgen: einfach handhabbar, λ einfach einstellbar, oberflächensensitiv

Bsp. Elektron u. Proton haben je gleiche a) Impuls, b) kin. Energie, c) Geschwindigkeit

Frage Wer hat die größere De-Broglie Wellenlänge?

Lsg.

2.2 Interferenz von Atomen

Zum Nachweis der Materiewelle benötigt man ein Beugungsobjekt (Spalt, Gitter) in der Größenordnung der Wellenlänge. Mit wachsender Masse der Teilchen wird der Nachweis immer schwieriger, da $\lambda = h/mv$.

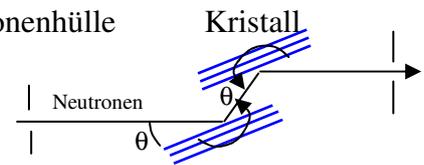
Bisher gelungen bei: - Protonen, Neutronen, Heliumatome

- Fullerene (C-60 Kugeln)

Neutronenspektrometer

Anwendung: Materialanalyse, Kristallstruktur, magnetische Materialien

Vorteil: keine Ladung => keine Abbremsung durch Elektronenhülle der Atome wie für Elektr., Protonen, WW mit den Kernen selbst



Ziel Geschw. / Impuls der Neutronen muss einstellbar sein

Lsg. Kristallgitter-Monochromator für Neutronenwellen

Funktion Bragg-Reflexion der Neutronenwellen an Kristall ähnlich dem Röntgenlicht

$$2d \sin\theta = n\lambda, \quad \lambda = \frac{h}{mv} \quad m: \text{Masse, } n: \text{Beugungsordnung}$$

$$\Rightarrow v = \frac{h}{2d n m \sin\theta} \quad \text{Geschw. durch Kristallwinkel einstellen}$$

Bsp Neutronen sollen an einem Gitter mit $d = 0,25 \text{ nm}$ gebeugt werden

Frage wie schnell müssen sie sein, wenn die erste Beugungsordnung bei $\theta = 10^\circ$ auftritt?

Lsg

Frage was heißt „thermische“ Neutronen?

Lsg

3 Licht als Wahrscheinlichkeitswelle

Grundlegendes Problem: welches Modell stimmt – Welle oder Teilchen ?

Modell	Licht-Welle	Licht-Teilchen
Größen	Frequenz f , Wellenlänge λ $c = f\lambda$	Impuls $p = h/\lambda$ Energie $E = hf$
Beweis	Interferenz	Photoeffekt, Comptoneffekt

Interferenzexperimente:

Frage: wie können Teilchen (Photonen, Elektronen) Interferenzmuster bilden?

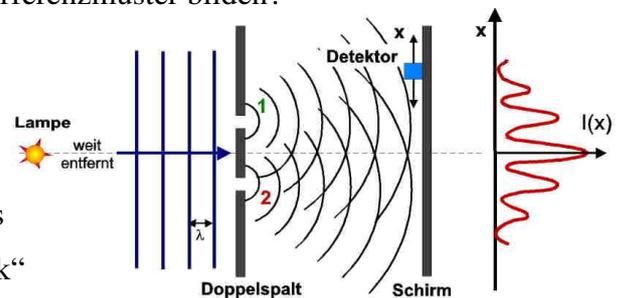
Experiment A)

Experiment: Licht- bzw. e-Beugung an Doppelspalt

Messung: Detektor bewegt sich entlang des Schirms

Detektor: Messung einzelner Photonen durch „Klick“

„Klick“ = Energieübertrag von Welle auf Detektor = Absorption eines Photons



Beobachtung: zeitlich statistisch verteilte Folge von Klicks

Räumliches Interferenzmuster entlang des Schirmes

exakter Ort u. Zeitpunkt des Photoneneinschlags nicht vorhersagbar

nur Wahrscheinlichkeitsverteilung $W(x) = I(x)$ berechenbar

Neue Beschreibung: Wahrscheinlichkeitswelle:

ordne jedem Punkt x der Lichtwelle eine Wahrscheinlichkeit $W(x)$ zu, in einer kleinen Umgebung dx pro Zeit dt ein Photon zu detektieren.

Wahrscheinlichkeit (pro Zeit): $W \sim A^2$, A = Lichtwellenamplitude

Experiment B)

Messung: es befindet sich je nur ein einzelnes Photon im Aufbau

sehr schwache Lichtquelle benutzen, Exp. dauert Monate, (Taylor 1909)

Beobachtung: Interferenzstreifen bilden sich aus

FOLIE

Fragen: Durch welchen Spalt tritt das Photon ?

ELEKTRONENBEUGUNG

Kann es mit sich selbst interferieren?

Woher weiß das Photon vom zweiten Spalt, den es für Interferenz braucht ?

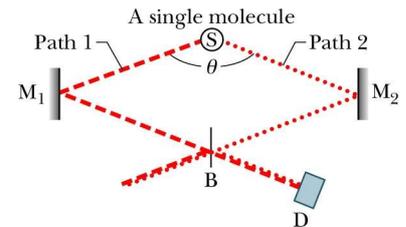
Beachte: wir messen nur die WW von Licht mit Materie am Schirm, Vorgang dazwischen ist unbekannt

Deutung: Lichtausbreitung von Quelle zu Schirm durch Wahrscheinlichkeitswelle
 Interferenzmuster = Wahrscheinlichkeits-Verteilung der Welle am Schirm

Experiment C)

Frage: Photon als Wellenpaket, das sich am Doppelspalt trennt und mit sich selbst interferiert?

Experiment: Lichtquelle enthält Moleküle, die in großen Zeitabständen Licht emittieren,
 => immer nur ein Photon unterwegs,
 Strahlteiler verschieben (Lai, Diels 1992)



Beobachtung: Interferenz

Deutung a) klassisch: nicht möglich, Photon kann nur einen Weg nehmen, welchen?
 b) Quantenphysik: bei Lichtemission breitet sich Wahrscheinlichkeitswelle in alle Richtungen aus, also entlang beider Wege

Deutung für alle Experimente

- 1) Licht wird in Quelle als Photonen erzeugt
- 2) Licht wird am Detektor als Photon absorbiert
- 3) Lichtausbreitung von Quelle zum Detektor durch Wahrscheinlichkeitswelle

3.2 Schrödingergleichung

Alle bisherigen Wellen wurden durch eine Größe beschrieben, die sich zeitl. & räumlich ändert. Seilwelle – Seilelement, Schallwelle – Gasdichte, Elektromagnetische Welle E, B,
 Welche Größe ist es bei der Wahrscheinlichkeitswelle?

Wellengleichung $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$ $c = f \lambda$ Phasengeschwindigkeit

Welle: $y(x, t) = y_0 \cos(kx - \omega t)$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = 2\pi f$, $y_0 = \text{Amplitude}$

Stationäre Welle: $\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)e^{-i\omega t}$, Raum- u. Zeitvariablen trennbar
 vereinfachte Situation: Impuls u. E_{kin} unabhängig von der Zeit t

1.Dim. stationär $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\omega t} = (Ae^{ikx} + Be^{-ikx})e^{-i\omega t} = Ae^{i(kx - \omega t)} + Be^{-i(kx + \omega t)}$

beachte: Cosinus- & Exp.-Darstellung sind gleichwertig, denn

mit $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$, mit $i^2 = -1$

$$\Rightarrow 2 \cos \alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}$$

gesucht: Beschreibung für quantenmechanisches Teilchen

Impuls $\lambda = \frac{h}{mv} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{h} p$

Energie $E_{kin} = E = hf = \frac{h\omega}{2\pi} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{h} E_{kin}$

Welle $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\omega t} = \psi_0 e^{ikx} e^{-i\omega t} = \psi_0 e^{\frac{i2\pi}{h}(px - E_{kin}t)}$ mit $A = \psi_0, B = 0$

Einsetzen in Wellengleichung und nur Ortsfunktion betrachten (Separation von Ort und Zeit)

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = -k^2 \psi(x) = -\frac{8\pi^2 m}{h^2} E_{kin} \psi(x)$$

bewegt sich das Teilchen im konservativen Kraftfeld, so gibt es potenzielle Energie E_{pot}

$$\Rightarrow E = E_{kin} + E_{pot} = \text{konstant} \quad (\text{freies Teilchen: } E_{pot} = 0)$$

$$\Rightarrow \frac{-h^2}{8\pi^2 m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + E_{pot} \psi(x) = E \psi(x) \quad \text{Schrödingergleichung,}$$

stationär, für 1-dim Ortsfunktion

Beachte Schrödingergleichung ist gefunden, nicht abgeleitet worden, nur motiviert
Fundamentale Gleichung wie z.B. das Gravitationsgesetz

3.3 Wahrscheinlichkeitsdichte

Anfangsfrage: was beschreibt die Wahrscheinlichkeitswelle?

Wellenfunktion $\psi(x)$ komplex

WS-Dichte $|\psi(x)|^2$ immer reell

ist proportional zur Wahrscheinlichkeit (WS) ein Teilchen im kleinen Bereich dx um den Ort $x \pm dx$ in einer Zeit dt nachzuweisen.

Wahrscheinlichkeit W , ein Teilchen in einem Bereich nachzuweisen (detektieren) ist

Bereich x_1 bis x_2 $W(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx$

Irgendwo $W(-\infty, +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$ (Normierungsbedingung)

vergleiche $Masse$ $m = \int_0^V \rho(V) dV$

4 Heisenbergsche Unschärfe-Relation

FOLIENSATZ

Vergleich: Klassische / Quantenmechanik

Klassisch	Quantenmechanik
Makrokosmos	Mikrokosmos
Welle oder Teilchen	Wahrscheinlichkeitswelle führt Teilchen
Licht = Welle	Licht = Teilchen (Photon)
Teilchen = Massepunkt	Teilchen = Wellengruppe
Wellengleichung	Schrödingergleichung
Wellenintensität $I \sim E ^2$	Wahrscheinlichkeits-Dichte $ \psi(x,t) ^2$
Vorhersage von Ereignissen möglich	Berechnung von Wahrscheinlichkeiten
Teilchenbahn $x(t)$	Wahrscheinlichkeits-Dichte $ \psi(x,t) ^2$
Startwerte x_0, p_0 bekannt	$x_0 \pm \Delta x, p_0 \pm \Delta p$ unscharf
$x(t)$ exakt berechenbar	Bahn $x(t)$ im Unschärfebereich
$\Delta x, \Delta p$ unabhängig	$\Delta x \Delta p > h/2\pi$ gekoppelt
Messprozess ohne Einfluss auf System	Messprozess ändert Zustand des Systems

Quantenmechanische Beschreibung eines Experimentes:

ψ : Amplitude der Wahrscheinlichkeitswelle

$P = |\psi(x)|^2$ Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses am Ort x (Detektion des Photons)

Experiment a) Kann das Ereignis auf verschiedenen Wegen 1, 2 eintreten, dann Interferenz

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

$$P = |\psi_1 + \psi_2|^2$$

Experiment b) Gibt es Entscheidung, welcher Weg gewählt wurde, dann keine Interferenz

$$P = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = P_1 + P_2$$

Zusammenfassung: Prüfungstrainer Kapitel 6.2, Fragen 6.2.1 – 6.2.10.

5 Tunneleffekt

Sie schlagen einen Squashball immer wieder an die Wand. Irgendwann durchdringt er diese ohne diese zu zerstören, er ist durch getunnelt. In der klassischen Physik der makroskopischen Teilchen-Welt unmöglich, in der Quantenphysik der mikroskopischen Welt schon.

Statt Ball, fliegt ein Elektron gegen Wand (Potenzialbarriere zu), z.B. elektr. Gegenfeld U

$$\text{Elektronenenergie} \quad E_{\text{kin}} = E$$

$$\text{Potenzialbarriere} \quad U(x) = U_0 \text{ für } 0 < x < L, \text{ sonst } U = 0$$

$$\Rightarrow \text{Kraft} \quad F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

Klassische Physik für Teilchen:

$$\text{a) Transmission für } E > eU_0 \quad T = 100\%$$

$$\text{b) Reflexion für } E < eU_0 \quad R = 100\%$$

Quantenmechanik: De Broglie-Welle statt Teilchen

\Rightarrow Wellenfunktion $\psi(x)$ ermitteln,

Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\psi(x)|^2$ des Elektrons berechnen

\Rightarrow Lösung der Schrödingergleichung für

$$\text{i) } x < 0 \quad \Rightarrow \quad P = |\psi(x)|^2 \text{ stehende Welle}$$

$$\text{ii) } 0 < x < L \quad \Rightarrow \quad |\psi(x)|^2 \neq 0, \text{ Welle klingt ab NEU!}$$

$$\text{iii) } x > L \quad \Rightarrow \quad |\psi(x)|^2 \neq 0, \text{ wenn } L \text{ nicht zu groß NEU!}$$

\Rightarrow Transmission der Welle (Teilchen) möglich, Tunneleffekt

$$\text{Transmission } T \approx e^{-2kL}, \quad k = \sqrt{\frac{8\pi^2 m(eU_0 - E)}{h^2}}$$

Beachte: sei $T = 0.05$ dann tunneln von 100 Elektronen 5 durch die Barriere

Aber nicht 5% des einen Elektrons tunnelt, Teilchen werden nicht geteilt! Ganz oder gar nicht!

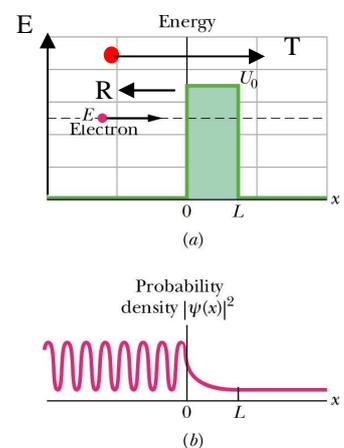
Transmission T groß für kleine: Masse m , Potenzialbarriere L , Energiedifferenz ($U_0 - E$)

\Rightarrow Elektron tunnelt eher als Tennisball

Effekt bekannt aus der Wellenoptik: Welle dringt aus opt. dichtem in optisch dünneres Medium ein und wird reflektiert,

Anwendung: attenuated total reflection (ATR), Nahfeldmikroskopie

FOLIE



Anwendung

Erklärung des α -Zerfalls, Feldemission von Elektronen aus Metallen, Tunnelmikroskop
 SQUID- Josephson Tunnelkontakt, Magnetfeldmessung

Raster-Tunnelmikroskop (Binning, Rohrer 1984, Nobelpreis 1986)

Messung: Oberfläche von elektrisch leitenden Festkörpern

Auflösung: atomar, d.h. größer als optisches oder Elektronenmikroskop

Prinzip: feine Metallspitze im Abstand $L \sim 1$ nm über der Probenoberfläche

Spannung $U \sim 0,01 - 1V$ zwischen Spitze (-) / Probe (+)

Feldemission der Elektronen aus Spitze

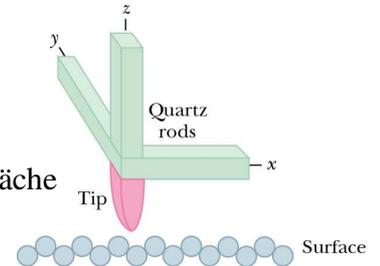
Elektronen tunneln durch Luftbarriere von Oberfläche in Spitze

=> Tunnelstrom abh. von Abstand $L \quad I \sim T \approx e^{-2kL}$

Rastern Spitze sitzt an x-y-z-Piezo-Verschiebevorrichtung

Spitze wird über Probe verfahren, so dass der Tunnelstrom konstant bleibt

=> Abstand L gibt Karte der Oberfläche



FOLIE Si 7x7

6. Elektronen im Potenzialtopf

Elektronen können durch Materiewellen beschrieben werden. Sie zeigen daher auch Eigenschaften wie fortlaufende oder stehende Wellen. Daher beschreiben wir nun Seilwellen mit Begriffen der Quantenmechanik.

6.1 Stehende Seilwellen

Seillänge $L = \infty$: Welle jeder Frequenz kann sich ausbreiten

$L \neq \infty$: nur stehende Wellen können sich ausbilden

Bewegungsform der Welle ist quantisiert

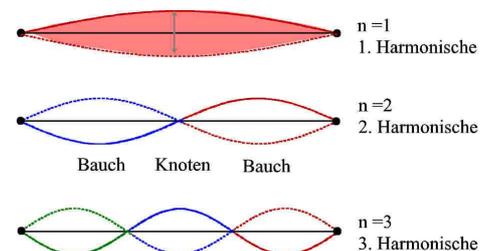
Nur diskrete Wellenlängen / Frequenzen zugelassen

Quantisierungsbdg. $L = \frac{n\lambda}{2}$ Schwingungsmoden

Quantenzahl $n \in N$ Knoten bei $x = 0, L$

Amplitude $y_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad k = \frac{n\pi}{L}$

(siehe Kapitel Wellen)



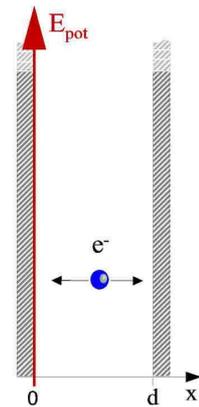
6.2 Materiewelle in Elektronenfalle

eine Elektronenfalle schränkt die Bewegung des Elektrons räumlich ein so wie ein gespanntes Seil endlicher Länge die Bewegung der Seilwelle einschränkt. Es bildet sich eine stehende Materiewelle (Elektronenwelle) aus.

freies Elektron	∞ langes Seil	=> jede Energie möglich
gebundenes Elektron	endlich langes Seil	=> Energie ist quantisiert

Unendlich hohes Kastenpotenzial:

- Elektron ist im Metallzylinder gefangen
- links / rechts Potenzial $U = -\infty$, $L = \infty$
- Elektron im Mittelzylinder mit $U = 0$, Länge = L wird von ∞ hohen Potenzialwänden immer in die Mitte zurückreflektiert, zur Überwindung wäre Energie $E_{\text{pot}} = eU = \infty$ nötig (im Bild $d = L$)



Tafelbild

Stehende Materiewelle bildet sich aus mit Energie:

Knoten bei $x = 0, x = L$

Wellenlänge $\lambda = h/p$ (De Broglie)

Impuls $p = \sqrt{2mE}$

Quantisierung $L = \frac{n\lambda}{2}$ der stehenden Welle

$$\Rightarrow E = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m} \frac{1}{\lambda^2} = \frac{h^2}{2m} \frac{n^2}{4L^2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E_n = \left(\frac{h^2}{8mL^2} \right) n^2}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ nicht } 0 !$$

Quantenmechanik: gebundenes Elektron ist stehende Welle => Energie E_n ist quantisiert
=> nimmt nur die möglichen Energien E_n an, aber keine Zwischenwerte

klassisch: Elektron ist freies Teilchen => kann jede Energie annehmen

6.3 Übergänge

Grundzustand $n = 1$: gebundenes Elektron hält sich im Grundzustand auf,
d.h. bei kleinster Energie (siehe 2. HS der Thermodynamik)

angeregter Zustand $n > 1$ nur einnehmbar, wenn von außen Energie zugeführt wird

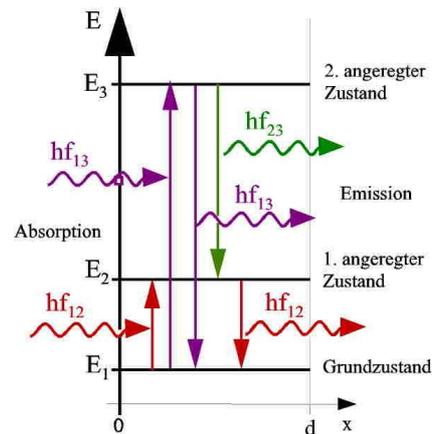
Quantensprung

$$\Delta E = E_{\text{hoch}} - E_{\text{tief}}$$

Absorption Ein gebundenes Elektron absorbiert ein Photon, wenn Photonenenergie und Energiedifferenz der Zustände gleich sind

$$hf = \Delta E$$

Emission Emittiert ein gebundenes Elektron ein Photon, so ist die Photonenenergie gleich der Differenz zwischen dem Übergang vom höherem angeregten Zustand des Elektrons in den tieferem Zustand: $hf = \Delta E$



Beachte: Photonenabsorption / Emission verläuft bei realen

an Tafel zeichnen

1-dim. Elektronenfallen etwas anders, Drehimpuls muss mit berücksichtigt werden.

6.4 Wellenfunktion des gebundenen Elektrons

unendlich hohes Kastenpotenzial, Schrödingergleichung lösen =>

für $x < 0, x > L$ $\psi(x) = 0$

für $0 < x < L$ $\psi_n(x) = A \sin\left(\frac{n \pi}{L} x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$ A später

Wellenfunktion $\psi_n(x)$ nicht messbar

Wahrscheinl.dichte $\psi_n^2(x)$ messbar

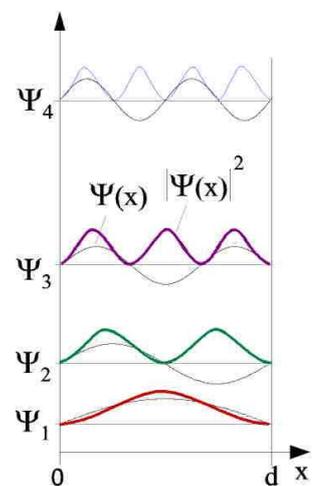
=> $\psi_n^2(x) = A^2 \sin^2\left(\frac{n \pi}{L} x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$

Wahrscheinlichkeit, Elektron bei x im Intervall dx nachzuweisen

$$W(x, dx) = \psi_n^2(x) dx$$

Nachweis-WS für das Elektron im Bereich zwischen x_1 und x_2

$$W(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} A^2 \sin^2\left(\frac{n \pi}{L} x\right) dx$$



klassische Physik: Nachweis des Elektrons für alle Orte x im Kasten mit gleicher Wahrscheinlichkeit, also $\psi^2(x) = \text{konst}$

Quantenmechanik: $\psi_n^2(x)$ ortsabhängig, z.B. für $n = 2$: Nachweis-WS $W(x)$ maximal bei $x = 0,25d, 0,75d$, $W(x) = 0$ bei $x = 0, d$

Korrespondenzprinzip:

je höher der angeregte Zustand n , desto homogener ist die Verteilung $p(x)$

$n \Rightarrow \infty$ Quantenmechanik \Rightarrow Klassische Physik

Nullpunktsenergie

Grundzustand $n = 1$ Warum beginnen die Zustände nicht bei $n = 0$?

$$\psi_{n=0}^2(x) = A^2 \sin^2\left(\frac{0 \pi}{L} x\right) = 0 \quad \text{für alle } x$$

\Rightarrow für $n = 0$ gäbe es kein Elektron im Kasten, Widerspruch zu unserer Annahme

\Rightarrow Systeme in endlichem Volumen haben immer Nullpunktsenergie $E_1 > 0$

\Rightarrow Grund für $T > 0$ ($T \neq 0$), folgt aus $kT = E > 0$

Korrespondenzprinzip: Quantenmechanik \Rightarrow klassische Physik

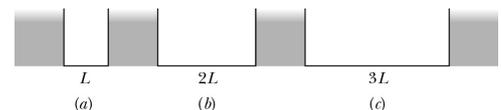
$$L \Rightarrow \infty$$

$$E_1 = \left(\frac{h^2}{8mL^2}\right) 1^2 \Rightarrow 0 \quad \text{Nullpunktsenergie} = 0$$

Bsp. Ordne für die Kastenpotenziale für Zustand $n = 10$ nach

a) Zahl der Maxima

b) Größe der Energie $E_{n=10}$

**6.4.6 Endliches Kastenpotenzial U_0**

Ein unendliches Potenzial gibt es für reale Materialoberflächen, Halbleiterbauelement, Nanostrukturen usw. nicht

Klassische Physik $U_0 < \infty \Rightarrow$ keine vollständige Reflexion der Seilwelle bei $x = 0, L$
 \Rightarrow keine perfekten Knoten für stehende Welle bei $x = 0, L$

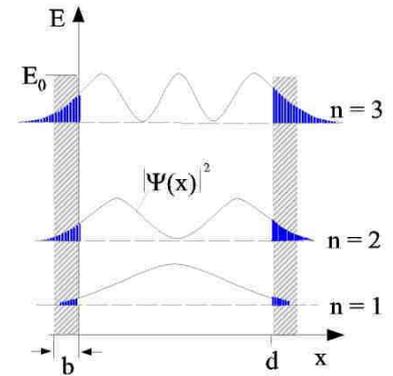
Quantenmechanik \Rightarrow " Materiewelle des Elektrons
 \Rightarrow Materiewelle des Elektrons dringt in die Wand ein
 \Rightarrow Tunneleffekt

Tunneleffekt nimmt mit Quantenzahl n zu, d.h. mit der Elektronenenergie E_n

Betrachte zusätzlich Kastenwand endlicher Dicke:

=> e^- tunnelt durch, d.h. WS, das Elektron außerhalb des Kastens zu finden ist:

$$W(x_1, \infty) = \int_{x_1}^{\infty} A^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx > 0$$

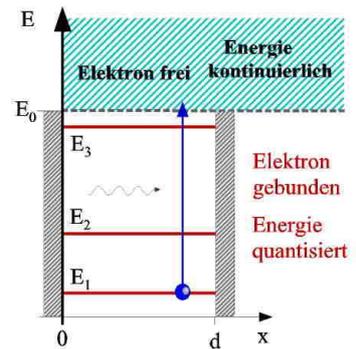


Energie

- Wellenfunktion dringt in Wand ein => L effektiv größer
- Energieterme E_n ändern sich leicht, aber in erster Näherung

$$E_n = \left(\frac{h^2}{8mL^2}\right)n^2$$

- neu: kontinuierliche Energieverteilung möglich, wenn Elektron frei, also $E > eU_0$



Nanokristallite

Einfachste Form der Potenzialbarriere für Elektronen: kleine Kristalle im nm-Bereich

Elektronen sind im Kastenpotential des Kristalls gefangen

Energieniveaus $E_n = \left(\frac{h^2}{8mL^2}\right)n^2$ einstellbar durch Kristallgröße L

Lichtabsorption Anregung von $n = 1 \Rightarrow n = 2$

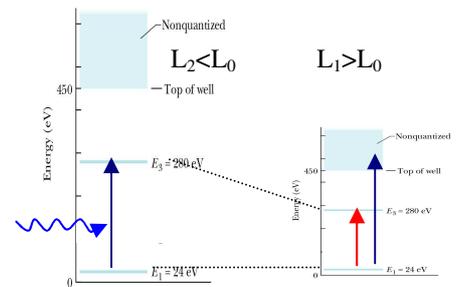
$$hf = \Delta E = E_2 - E_1 = \left(\frac{h^2}{8mL^2}\right)(n_2^2 - n_1^2),$$

=> $hf \sim \frac{1}{L^2}$ kleinste absorbierbare Lichtenergie

=> kleine Kristallite absorbieren höhere Energie

=> große Kristallite absorbieren kleine & große Energien

Wenn $L_3 > L_1 \Rightarrow$ Kristallit = schwarz, d.h. alle Farben werden absorbiert



Quanten-Punkte, -Filme, -Drähte

Elektronen sind eingesperrt in Systemen mit Schichtdicken von wenigen Atomlagen

=> Halbleiterlaser, Leuchtdioden

Rote Kirchenfenster: Farbe Rot kommt durch Streuung an nm-großen Goldkörnchen

Zusammenfassung: Prüfungstrainer Kapitel 6.3, Fragen 6.3.1 – 6.3.8

ATOMPHYSIK

1. Wasserstoffatom

Betrachte einfaches H-Atom. Es stellt eine Elektronenfalle dar, denn der Kern hält durch die Coulombkraft das Elektron auf bestimmtem Raumgebiet gefangen => wir erwarten diskrete Energiezustände. Hier nicht die Herleitung des Bohrschen Atommodells

1.1 Schrödingergleichung

betrachte potenzielle elektrische Energie eines Zweiteilchensystems (siehe Elektrodynamik)

Ladungen $q_1 = q_2 = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ (Kern, Elektron) *Tafelbild*

Potenzial $U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r}$

Pot. Energie $E_{pot} = eU(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$ des Elektr. im Pot. $U(r)$ des Kerns

Nullpunkt: $r = \infty$, $r = \text{Abstand Elektron - Kern}$

Beschreibe Elektron durch Materiewelle im Potenzial $U(r)$ des Kerns durch 3-dimensionale Schrödinger-Gleichung

$$-\left(\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + E_{pot}(\vec{r})\right) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}), \quad m = \text{Masse des } e, \hbar = \frac{h}{2\pi}, \nabla : \text{Gradient}$$

Lösung: a) Energien E_n
 b) Wellenfunktionen $\psi_n(r)$ beides ist gequantelt, typisch für stehende Welle

1.2 Energie

Energie: $E_n = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} = -13,6 \text{ eV} \frac{1}{n^2}$ *Tafelbild*

Quantenzahl $n = 1, 2, 3, \dots$

$E_n < 0$ bedeutet gebundene Elektronen

Grundzustand $n = 1$

$E_1 = -13,6 \text{ eV}$, tiefste Energie des e-

Angeregte Zustände: $n > 1$ instabil, kurze Lebensdauer $t \sim 10^{-9} \text{ s}$

Höchster Zustand $E_\infty = 0$, $n = \infty$

Ionisiert $E > 0$ bedeutet freies Elektron, d.h.
 Elektron nicht gefangen im Kernpot.

=> kontinuierliche Energieverteilung

Übergänge: i) Lichtabsorption: $hf = E_m - E_n$, $m > n$ *Tafelbild*
 ii) Emission $m < n$
 => diskrete Linien, da E_n gequantelt

Spektrum: alle möglichen Übergänge

Serie: Übergänge aus allen möglichen Niveaus m in
 das Niveau n

Spektralanalyse:

Tafelbild

=> Atomphysik opt. Spektralanalyse

=> Elementzuordnung eindeutig, da jedes Element sein charakteristisches Termschema besitzt

Exp. Wasserstoffspektrum mit Gitter

1.3 Wellenfunktionen

Die Schrödingergleichung wird erfüllt mit a) diskreten Energien E_n b) dazugehörigen Wellenfunktionen. Nicht alle Wellenfunktionen machen Sinn, sie müssen Randbdg. erfüllen

Randbdg. $\Psi(r = \infty) = 0$ Elektron darf nicht ∞ weit weg vom Kern sein, sonst frei

Grundzustand $\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^{3/2}}} e^{-r/a}$ $n = 1$

Bohrscher Radius $a = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m e^2} = 5,29 \cdot 10^{-11} m = 52,9 pm$

Interpretation $P(r)dV = \psi^2(r)dV$ Wahrscheinlichkeit das Teilchen im Abstand r
 vom Kern im Volumen dV nachzuweisen

Da ψ nur abh. vom Abstand r zwischen Elektron – Kern, nutzen wir die Kugelsymmetrie und betrachten Kugelschalen der Dicke dr

mit $dV = (4\pi r^2)dr$, $\psi^2(r) = \frac{1}{\pi a^3} e^{-2r/a}$ =Wahrscheinlichkeitsdichte

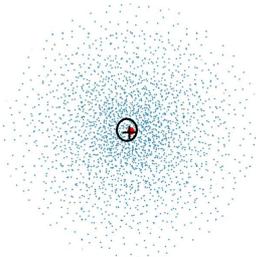
$$\Rightarrow P(r)dr = \psi^2(r)dV = \frac{4}{a^3} e^{-2r/a} r^2 dr$$

beachte $\psi^2 \neq$ Radiale Dichte $P(r)$, aber $P(r)dr$ leichter zu interpretieren

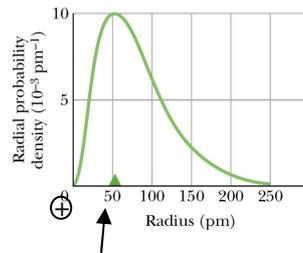
Wahrscheinlichkeitsdichte Radiale WS-Dichte Altes Bohrsches Modell

$$\psi^2(r) = \frac{1}{\pi a^3} e^{-2r/a}$$

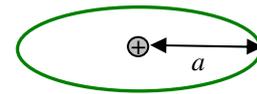
$$P(r) = 4\pi \psi^2 \cdot r^2$$



Elektronenwolke statt Bahn



Bohrscher Radius a



Elektronen-Bahn

Punktdichte = WS-Dichte $\psi^2 dV$, nicht aber radialer Dichte Pdr

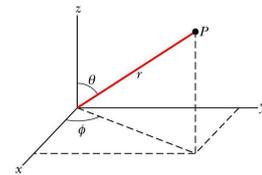
Beachte: Frage lautet nicht wann befindet sich das Elektron an einem bestimmten Ort, sondern, mit welcher WS kann ich das Elektron am Ort r im Volumen dV finden?

1.4 Angeregte Zustände

Das Atom ist ein kugelsymmetrisches Problem, so dass man zu Kugelkoordinaten übergeht

Ortsvektor $\vec{r}(x, y, z) \Rightarrow \vec{r}(r, \theta, \phi)$

Normierter radius $\rho = \frac{2r}{a}$, $a =$ Bohrscher Radius



$$\psi_{n,l,m}(\vec{r}) = -\sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} \underbrace{\rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} L_{n+l}^{2l+1}(\rho)}_{\text{Ortsanteil}} \underbrace{Y_{l,m}(\theta, \phi)}_{\text{Kugelwellenfunktion}}$$

Quantenzahlen

Name	Symbol	mögliche Werte	Bedeutung
Hauptquantenzahl	n	1, 2, 3, ...	Energie E_n , Abstand vom Kern
Bahndrehimpulsqu.	l	0, 1, 2 ... (n-1)	Drehimpuls, Orbital
magnet. Quantenzahl	m_l	$-l, -(l-1), \dots, +(l-1), +l$	Bahn-Orientierung bzgl. B_{extern}
Spin	m_s	$\pm 1/2$	Spin z-Komponente bzgl. Achse

3-fache Quantelung da 3-dim-Problem

Ortsanteil $\rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} L_{n+l}^{2l+1}(\rho)$

Beschreibt Verteilung als Fkt. Des Abstandes vom Kern

Klingt exponentiell ab: $\sim e^{-\rho}$, d.h. gebundenes Elek. ist nicht beliebig weit vom Kern entfernt

Quantenzahlen n, l , d.h. räumliche Verteilung

Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}(\theta, \phi)$

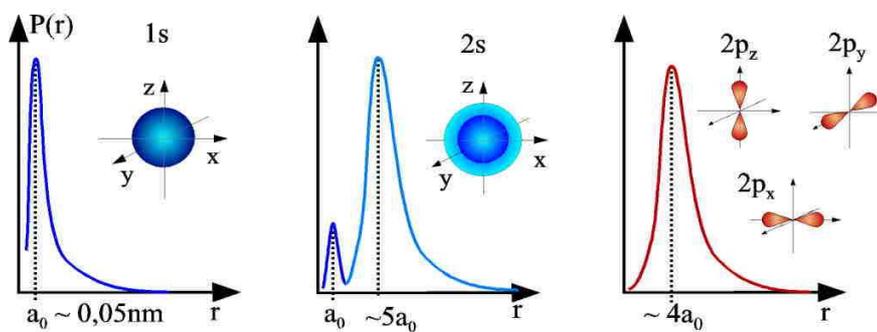
Beschreibt Winkelverteilung, d.h. Wert als Fkt. der Winkel (θ, ϕ)

Abhängig vom Drehimpuls

Erfasst Ausrichtung bzgl. einer externen Achse, Magnetfeld oder elektrisches Feld

Orbitale

Drehimpuls	Name	Symmetrie	Zahl	Deutung: alle P-Orbitale ergeben in der Summe den Drehimpuls $\Sigma m = -1 + 0 + 1 = 0 \Rightarrow$ und sind somit kugelsymmetrisch
$l = 0$	S	Kugel	1	
$l = 1$	P	Keule	3	Aufenthalt 1/3 der Zeit in p_x , 1/3 in p_y 1/3 in p_z
$l = 2$	D	Kreuz	5	



Zusammenfassung: Prüfungstrainer Kapitel 7.1, Fragen 7.1.1 – 7.1.11

2. Drehimpuls & Spin des Elektrons

2.1 Bahndrehimpuls klassische Vorstellung:

Elektron auf Kreisbahn um Kern

Tafelbild

=> Kreisstrom erzeugt magnetisches Moment

$$\mu = NIA \quad \text{N: Windungen, Strom: I, Kreisfläche A,}$$

$$\text{mit } I = \frac{e}{t} = \frac{e}{2\pi r/v}, \quad A = \pi r^2, \quad N = 1 \quad \text{und)}$$

mit $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$ Drehimpuls des Elektrons

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{\mu}_L = \frac{-e}{2m} \vec{L}}} \quad \text{Bahnmoment des Elektrons}$$

Einstein- De Haas Experiment

Ziel: Klärung der Kopplung zwischen Drehimpuls L und magnetischem Moment (1915)

Aufbau: Eisenzylinder hängt an Faden in Magnetspule

Exp. a) Eisen in Ruhe => $L_a = 0$

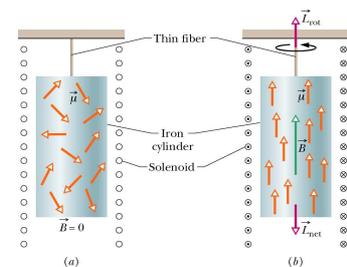
entmagnetisiert => $\vec{\mu}_L = \sum \vec{\mu}_i = 0$, statistisch verteilt

b) Eisen wird durch Spule magnetisiert => $\mu_L \neq 0$

$$\Rightarrow \vec{L} = \frac{-2m}{e} \vec{\mu}_L \neq 0 \quad \text{Drehimpuls durch magn. Moment}$$

=> $L_b = -L$ Drehimpulserhaltungssatz => Eisenzylinder rotiert

genaue Betrachtung: Spin ist Ursache des Ferromagnetismus, nicht Bahndrehimpuls)



Exp. Einstein-De Haas

2.2 Quantenmechanische Vorstellung

Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons durch Orbital gegeben

Drehimpuls quantisiert, nimmt nur diskrete Werte an

$$|\vec{L}| = L = \sqrt{l(l+1)}\hbar, \quad l = 0, 1, 2, \dots (n-1)$$

$$\mu_L = \frac{e}{2m} \sqrt{l(l+1)}\hbar, \quad \text{auch das magnetische Moment ist quantisiert}$$

Beachte: $\vec{L}, \vec{\mu}_L$ können nicht gemessen werden, nur ihre Ausrichtung zu einer Referenzachse, z.B. einem externen B-Feld in z-Richtung

$\Rightarrow \mu_{L,z} = -m_l \mu_{Bohr}$ messbar

$\mu_{Bohr} = \frac{eh}{4\pi m} = 9,27 \cdot 10^{-24} \frac{J}{T}$ Bohrsches Magneton

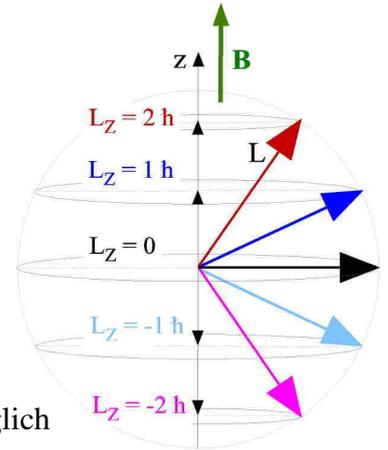
$\Rightarrow L_z = m_l \hbar$ $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm l$

Komponente des Drehimpulses

Beachte: - Abb. rechts ist nur Hilfestellung zur Interpretation

Winkel zwischen L und z-Achse nicht wirklich messbar

- klassisch wäre jedes L_z zwischen $\pm L = \pm \sqrt{l(l+1)}\hbar$ möglich



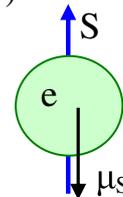
Exp. hängendes, präzedierendes Fahrrad

2.3 Spin

Spin ist eine intrinsische Eigenschaft des Elektrons, ähnlich Ladung (Uhlenbeck, Goudsmit)

Folgt aus Dirac-Gleichung, der relativistischen Schrödingergleichung (1929)

Interpretation: Eigendrehung des Elektrons (aber falsch)



$\vec{S} = \sum \vec{s}_i$ Spin

$s = 1/2$ Spinquantenzahl für alle Teilchen Elektron, Proton, Neutron

$m_S = \pm 1/2$ magnetische Spinquantenzahl, Ausrichtung \vec{S} bzgl. externer Achse

$\underline{\underline{\underline{\mu_s = \frac{-e}{m} \vec{S}}}}}$ magnetisches Moment, durch Spin erzeugt

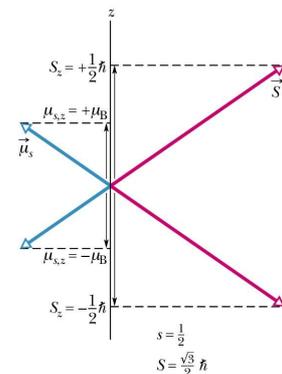
$|\vec{S}| = S = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)}\hbar = 0,87\hbar$

Wie bei dem Drehimpuls können auch hier Spin und Moment nicht gemessen werden sondern nur die Projektion bzgl. einer Achse

$S_z = m_s \hbar$

$\mu_{s,z} = -2m_s \mu_{Bohr}$

$m_S = \pm 1/2$ Spin up / down



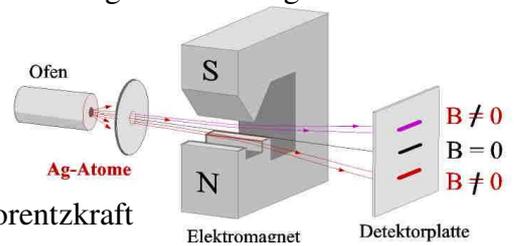
Stern-Gerlach

Ziel: Beweis der Existenz des Spins durch Otto Stern, Walter Gerlach 1922

Exp. Strahl Silberatome (elektr. neutral) werden durch inhomogenes B-Feld geschossen

Ablenkung der Atome im B-Feld

Messung: Strahlprofil hinter dem Magneten



Kräfte: a) $\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} = 0$, da $q = 0 \Rightarrow$ keine Lorentzkraft

b) Betrachte potenzielle Energie des Dipols im B-Feld

$$U_{mag} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{F} = -\nabla U_{mag}$$

Gradient hier am stärksten in z-Richtung

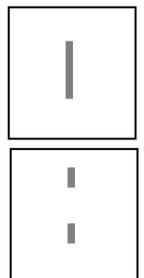
$$\Rightarrow F_z = -\frac{dU_{mag}}{dz} = \mu_z \frac{dB}{dz}$$

wenn B homogen $\Rightarrow F = 0$, inhom. Feld nötig

Erwartet nach klassischer Physik:

langer vertikaler Streifen der Ag-Atome, da

$$-\mu_0 \leq \mu_z \leq +\mu_0 \quad \text{kontinuierliche Einstellung des magn. Momentes}$$



Beobachtung tatsächlich (Quantenmechanisch)

2 Zustände / Spots aber kontinuierliche Verteilung der Ag-Atome

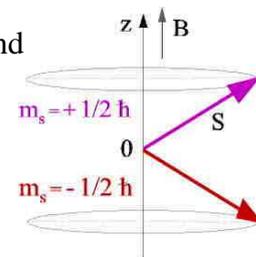
Deutung nur 2 Werte für μ_z erlaubt, aber welche?

Elektronen von Ag kompensieren ihre Drehimpulse und

Spins komplett, bis auf einen Spin eines Elektrons

$$\Rightarrow \mu_z = \pm 2m_S \mu_{Bohr} = \pm \mu_{Bohr}$$

Hierfür gibt es nur zwei Einstellungen im B-Feld



2.4 Kernspinresonanz

Betrachte nicht Elektronen der Atomhülle, sondern Protonen oder Neutronen im Atomkern

Kernspin $S_K = S_P + S_N$ Spins der Protonen, Neutronen

Magn. Moment μ_K z-Komponente auf B-Feld

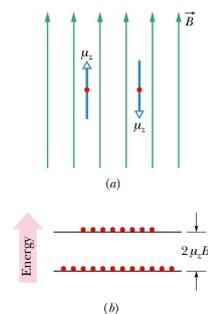
2 Einstellung $\uparrow \downarrow$ zum externen B-Feld

Energie $E = \pm \mu_K B$ im externen B-Feld

Spin-Flip (Umklapp) $\Delta E = 2\mu_K B$ kostet Energie ΔE

$$\Rightarrow hf = 2\mu_K B \quad \text{Absorption elektromagnetischer Strahlung}$$

Kernspinresonanz Messung der Spin-Flip Energie $\Delta E = hf$



- Exp.** Stabmagneten auf Drehachse im B-Feld per Hand umklappen
 Rotierende Billiardkugel mit Magneten auf Luftkissen umklappen lassen

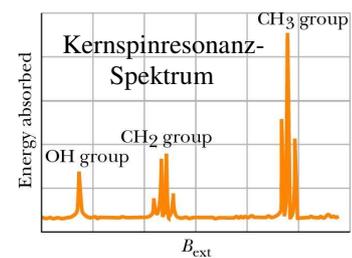
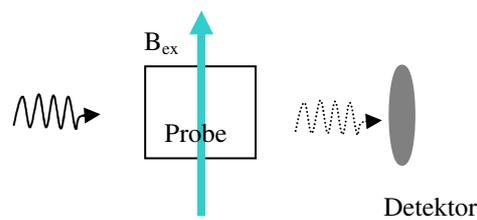
Praktische Messung

Untersuchungsobjekt: Kernspin von H₂O Wassertropfen im Magnetfeld

- i) konstantes B_{ext}-Feld => Ausrichtung der Kernspins parallel oder antiparallel zu B
- ii) Strahlungsquelle, Frequenz f => Umklappen der Spins durch
 Absorption von Photonenenergie hf
- iii) genauer: $B = B_{\text{ext}} + \text{Magnetfeld } B_{\text{lokal}}$ der Elektronen in Atomhülle
 => Kern spürt die Konstellation der Elektronen und damit die chemische Bindung
 => $hf = 2\mu_K (B_{\text{ext}} + B_{\text{lokal}})$ (biolog. Info steckt in B_{lokal})

Messung: $f = \text{konstant}$ und B_{ext} variieren bis Absorption auftritt

Empfindlichkeit: $\Delta B_{\text{ext}} \ll \text{Erdfeld}$



$\Delta B_{\text{ext}} < 10^{-4} \text{ T}$

Bsp. sei Kernspin $S = 1$

Frage welche Lichtwellenlänge wird absorbiert?

Lsg.

Kernspintomographie NMRT

(nuklear magnetic resonance tomography), Magnetresonanz, paramagn. Kernspinresonanz

Messung des Einflusses des Gewebes (chemische Umgebung) auf Kernspin

Umgebung = Summe des von den Bindungselektronen produzierten Magnetfeldes B_{lokal}

Zukunftspreis 2006: He³-Kernspins ausgerichtet mit Laser, einatmen, NMR-Lungenbild der He³-Kern-Spins

3 Periodensystem

3.1 Pauliprinzip

Ursache des Pauliprinzips ist die Symmetrie der Gesamtwellenfunktion Ψ eines Atoms mit mehreren Elektronen. Werden zwei Elektronen vertauscht, so ist Ψ antisymmetrisch:

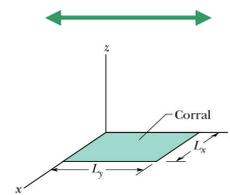
„Ein durch 4 Quantenzahlen (n, l, m_l, m_s) beschriebener Zustand eines Atoms kann höchstens von einem Elektron besetzt werden.“

Ohne Pauliprinzip wären alle Elemente chemisch gleich, denn alle Elektronen würden sich auf dem energetisch tiefsten Niveau befinden. Die chemische Bindung wird aber gerade von den äußeren Elektronen, den Bindungselektronen, bestimmt.

3.2 Mehrere Elektronen im 2-dim. Potenzialkasten

Die Wellenfunktionen sind quantisiert. Die Zahl der Quantisierungen (Quantenzahlen) hängt von der räumlichen Dimension des Potentials ab, d.h. von den Freiheitsgraden des gebundenen Elektrons

Kasten	1-dim: n	Hauptquantenzahl
		$m_s = \pm 1/2$ Spinquantenzahl
	2-dim: n_x, n_y	$m_s = \pm 1/2$
	3-dim: n_x, n_y, n_z	$m_s = \pm 1/2$
Atom	3-dim: n, l, m_l, m_s	4 Quantenzahlen



3.2.1 Besetzung

Besetzung heißt die erlaubten Zustände des Kastens mit Elektronen von unten her aufzufüllen

Woher bekomme ich die erlaubten Zustände? => Wellenfunktionen bestimmen

Coulombwechselwirkungen der Elektronen untereinander vernachlässigen => Ein-Elektronenmodell anwendbar

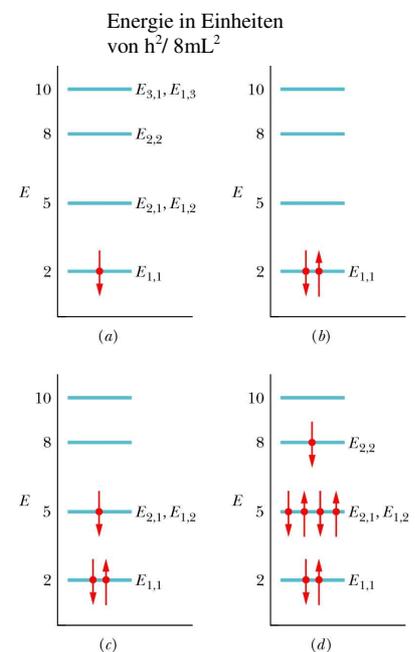
Kastenpotenzial	$U_0 = -\infty$
Dimensionen	$L_x = L_y = L$
=> Energie	$E_{n_x, n_y} = \frac{h^2}{8mL^2} (n_x^2 + n_y^2), n_x, n_y = 1, 2, 3, \dots$
Quantenzahlen	$n_x, n_y, m_s = \pm 1/2$

a) 1. Kriterium: minimale Energie => 1. Elektr.

b) 2. Kriterium: Pauli-Prinzip => 2. Elektr.

d.h. jeden Platz nur einfach besetzen

welche Plätze stehen aber zur Verfügung?



Zustand:	n_x, n_y, m_s	Energie	Plätze
1	1, 1 $\pm 1/2$	E_{11}	2
2	1,2 1,2 $\pm 1/2$	$E_{12} = E_{21}$	4
3		E_{22}	2

beachte: ohne Pauliprinzip wären alle Elektronen in E_{11}

Grundzustand: alle verfügbaren Elektronen sind auf die freien Plätze verteilt

Grundzustands-Energie Summe aller Elektronenenergien $E_G = 2E_{11} + 4E_{12} + 2E_{22} + \dots$

Licht-Absorption / Emission

Tafelbild

Übergänge nur von besetzten in unbesetzte Zustände

3.3 Periodensystem der Elemente

das reale Mehrelektronen-Atom ist viel komplizierter als das Kastenpotenzial, denn das gebundene Elektron sieht nicht nur das Kernpotenzial, sondern auch das Pot. der Nachbarerlektronen

=> Schrödingergleichung für Mehrelektronenproblem numerisch (PC) lösen

=> Problem: geeignetes Potenzial finden

Elemente

klassifiziert durch chemisches Verhalten

definiert durch Ordnungszahl Z = Elektronenzahl = Protonenzahl

besetzte Zustände Z Stück

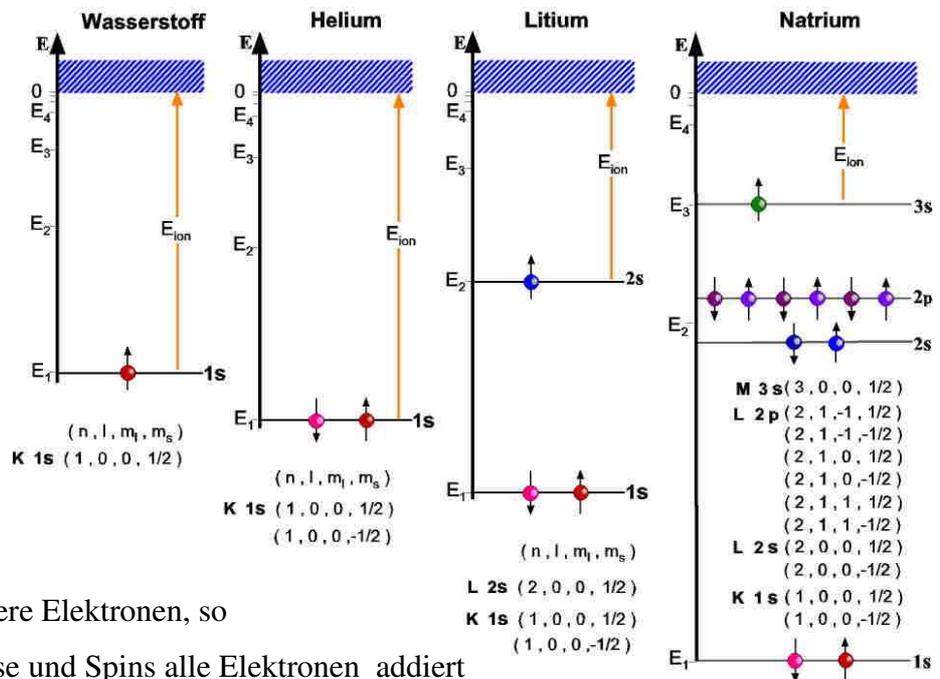
Quantenzahlen: n, l, m_l, m_s

Hauptschale: n gibt Energie E_n K: $n = 1$, L: $n = 2$, M: $n = 3$,

Unterschale: l entartet $E_{nl} \sim$ identisch $l = 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ \dots \ n$

s p d f g ..

Unterschale m_l $l(l+1)$ Stück, m_s 2 Stück

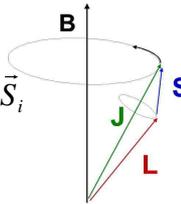


Kopplung

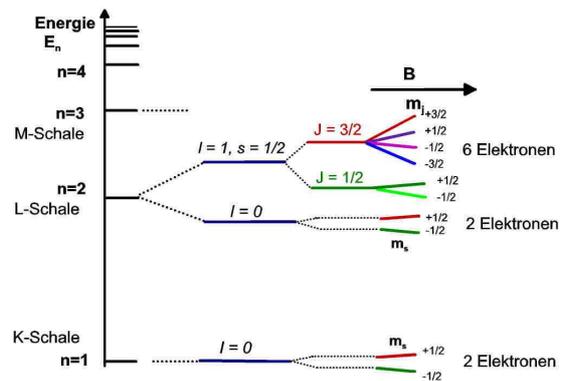
Besitzt ein Atom mehrere Elektronen, so müssen die Drehimpulse und Spins alle Elektronen addiert werden, um den Gesamt Impuls J und damit das magn. Moment zu erhalten

Gesamtmoment

$$J = \sum_i \vec{L}_i + \sum_i \vec{S}_i$$



Exp. Zeeman-Effekt



Zusammenfassung: Prüfungstrainer Kapitel 7.2, Fragen 7.2.1 – 7.2.8

4 Röntgenstrahlung - X-Ray

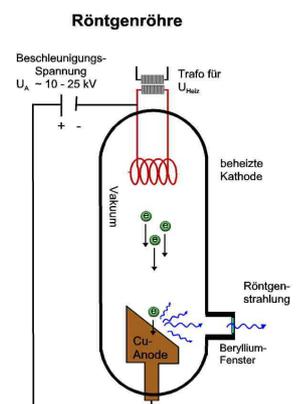
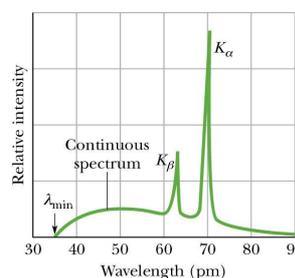
Röntgenstrahlung ist elektromagn. Strahlung. Sie ist durch die Lage im Spektrum definiert

Bereich: Extreme-UV bis γ -Strahlung, $100 \text{ eV} < E < 100 \text{ keV}$
 $10 \text{ nm} > \lambda > 0,01 \text{ nm}$

Erzeugung hochenergetische Elektronen werden auf Materie geschossen

U_A : Beschleunigungsspannung

Röntgenspektrum 1) Bremspektrum
 2) charakteristisches Spektrum



4.1 Bremspektrum

beschleunigte Elektronen werden im Coulombfeld der Materie-Elektronen abgebremst

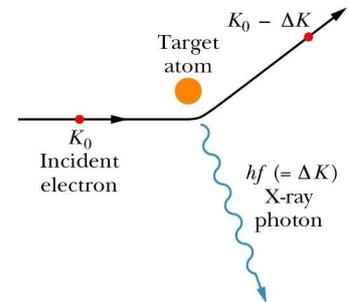
$E_{kin} \Rightarrow hf$ Energieumwandlung nach den Gesetzen der Elektrodynamik

Energieabgabe in Teilschritten oder einmalig

Maximale Photonenenergie:

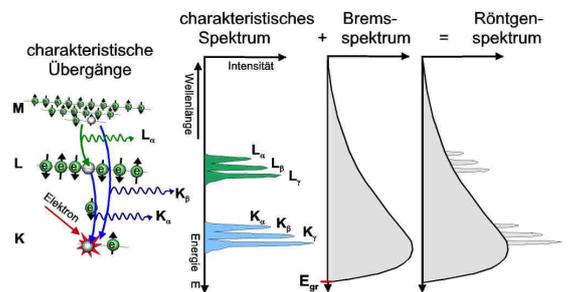
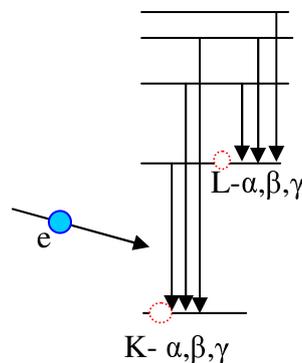
$$E_{kin} = eU_A = E_{gr} = hf_{gr} = \frac{hc}{\lambda_{gr}}$$

λ_{gr} : Grenzwellenlänge, unabhängig vom Anodenmaterial



4.2 Charakteristisches Spektrum

1. Stoßionisation: beschleunigte Elektronen schießen ein tief gebundenes Elektron des Anodenmaterials heraus, erzeugen Loch in tiefer Schale
2. Rekombination: gebundenes Elektron springt aus höhere Schale m in Loch der tieferen Schale n
3. X-Rays $\Rightarrow \Delta E = E_n - E_m = hf$ abhängig vom Anodenmaterial



Bezeichnung: K, L, M, Schale des erzeugten Lochs
 α, β, γ Schalenabstand des rekombinierenden Elektrons

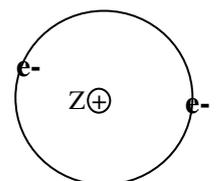
4.3 Moseley-Gesetz

Für Elemente mit der Kernladungszahl Z berechnet man die tieferen Energieniveaus E_n nach

$$E_n = -13,6eV \frac{(Z - S)^2}{n^2} \quad S: \text{Abschirmkonstante}$$

K-Schale: $S \sim 1$, denn Elektron sieht Kern (Z^+) und weiteres 1s-Elektron (1^-)
 L-Schale: $S \sim 9$, denn Abschirmung durch $2 \times 1s, 2 \times 2s, 5 \times 2p = 9$ Elektronen

Anwendung: Röntgenfluoreszenzanalyse, Z-Bestimmung aus $K\alpha$ -Linien



4.4 Absorption

Die anfängliche Intensität I_0 von Röntgenstrahlung klingt beim Durchdringen von Materie der Dicke x wegen Streuung & Absorption der Photonen ab:

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x} = \text{Intensität}$$

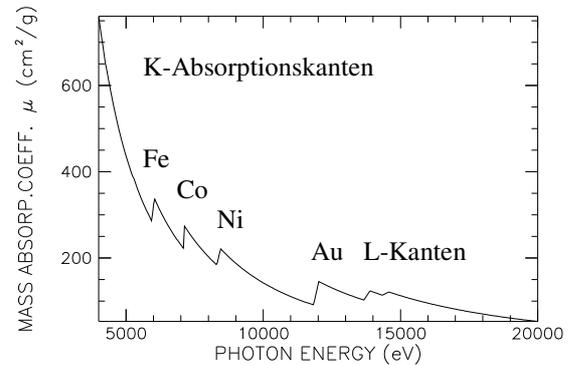
$$\mu(E) = \text{Absorptionskoeffizient}$$

Energieabhängig $\mu(E)$

- Tendenz $\mu \sim 1/E$
- starker Anstieg bei Übergängen aus K-, L-Schalen

Elementabhängigkeit $\mu(Z)$

- steigt mit Ordnungszahl Z , da mehr Elektronen vorhanden, die Photonen absorbieren



Bsp.

Frage Welches Element würde man zur Abschirmung von Röntgenstrahlung nutzen
Kohlenstoff, Eisen, Gold?

Lsg

Bsp.

Frage wie funktioniert die Röntgenabbildung von Knochenbrüchen?

Lsg

Zusammenfassung: Prüfungstrainer Kapitel 7.3, Fragen 7.3.1 – 7.3.15

5 Laser

Laser = **L**ight **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation

Typischerweise entsteht Licht in Glühlampen oder Leuchtstoffröhren durch spontane Emission einzelner Atome. Beim Laser ist die Emission ein kollektives Verhalten vieler Atome

Maimann 1960 erster Laser, Idee 1917, Einstein, Theorie: Schawlow & Townes 1958

5.1 Eigenschaften von Laserlicht

1. monochromatisch, d.h. $\Delta\lambda/\lambda$ sehr klein
2. kohärent, Wellenzuglänge ~ 100 km, Glühbirne < 1 m
3. parallel, Aufweitung des Strahls im wesentlichen durch Beugung am Austritt
4. scharfe Bündelung möglich \Rightarrow hohe Flächendichten $I \sim 10^{17} \text{W/cm}^2$ (Pulse)

Ursache: paralleler Strahl, (Vergleich: Schweißbrenner-Flamme 10^3W/m^2)

(höhere Divergenz der Glühbirne durch Drahtdurchmesser)

Größe a) ~ 1 mm (Festkörperlaser), Leistung < 100 mW, Anwendung Datenübertragung, CD

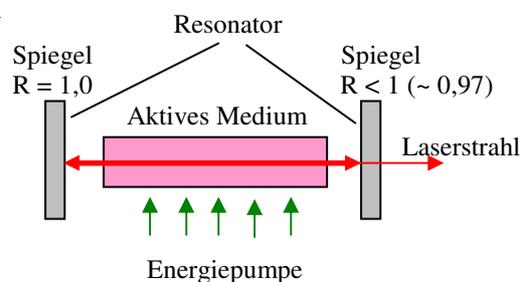
b) ~ 10 m, Leistung $\sim 10^{14}$ W, Anwendung: Kernfusion, Militär Astronomie

5.2 Funktionsprinzip

5.2.1 Aufbau

ein Laser besteht im wesentlichen aus 3 Komponenten

- aktives Lasermedium (Lasingprozess)
- Energiepumpe
- optischer Resonator



5.2.2. Emissionsprozess

- a) Absorption durch WW mit äußerem Strahlungsfeld

$$hf = E_n - E_0$$

- b) Spontane Emission ohne WW mit äußerem Strahlungsfeld

$$hf = E_0 - E_n$$

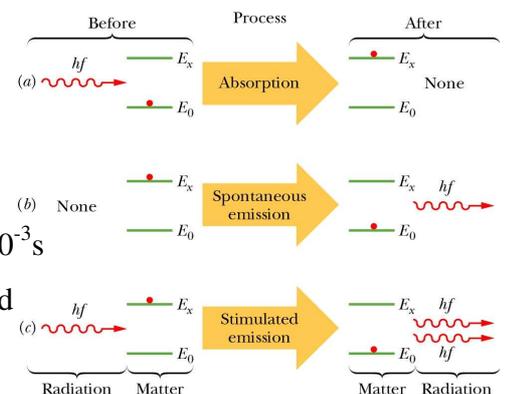
Lebensdauer typisch $\tau \sim 10^{-9}$ s, metastabile Zustände $\tau \sim 10^{-3}$ s

- c) induzierte Emission wenn WW mit äußerem Strahlungsfeld

$$hf = E_0 - E_n$$

Emission wird durch ein
äußeres Photon ausgelöst

FOLIE



=> beide Photonen haben gleiche

- Energie
- Phase
- Polarisation
- Ausbreitungsrichtung

} Laserlicht

Übergangswahrscheinlichkeiten sind gleich für Absorption / Emission

=> Laser-Verstärkung durch induzierte Emission tritt nur auf, wenn mehr Atome im angeregten Zustand als im Grundzustand sind (sonst wird das emittierte Photon wieder absorbiert).

5.2.3 Besetzungsinversion

Problem: meisten Atome sind im Grundzustand

	Grundzustand:	angeregter Zustand
Energie	E_0	E_n
Atomzahl	N_0	$N_n = N_0 \exp\{-\frac{E_n - E_0}{kT}\}$ (Boltzmannverteilung), T: Temperatur

weil $E_n > E_0 \Rightarrow \exp\{-\frac{E_n - E_0}{kT}\} < 1 \Rightarrow N_n < N_0 \Rightarrow$ es sind immer mehr Atome im Grundzustand als im angeregten Zustand

Ziel: Besetzungsinversion, d.h. viel mehr Atome im angeregten als im Grundzustand

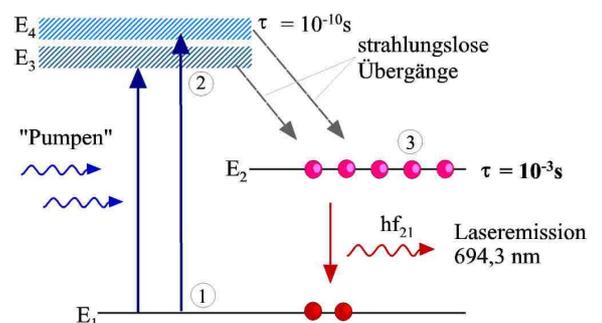
Methode: Energie pumpen *Tafelbild*

5.3 Drei-Niveau-Laser (Rubinlaser)

aktives Medium: $Al_2O_3:Cr^{3+}$ (Saphir-Stab, Cr-dotiert)

Pumpen mit Blitzlampe, weißes Licht,

- 1) Grundniveau E_0
- 2) Pumpniveau E_1, E_2 verbreitert im Festkörper
Lebensdauer $\tau = 10^{-10}s$,
Relaxation durch Gitterschwingung
- 3) Inversionsniveau E_i , metastabil $\tau \sim 10^{-6}s$
hier werden die Elektronen angesammelt und warten auf die induzierte Emission (τ groß)



Laservoraussetzung: Besetzungsinversion zwischen E_0 und E_i ist erreicht

also E_0 leer, E_i voll

daher 3 Niveaus notwendig!, 2 Niveaus reichen nicht aus

Resonator

Lasingprozess: Einsatz durch spontane Emission ($E_i \Rightarrow E_0$)

Verstärkung: Kettenreaktion

Spiegelreflexion hält Photonen im aktiven Medium, viele Atome müssen getroffen werden

Auskopplung nur kleiner Anteil macht Laserstrahl aus

5.4 Vier-Niveau-Laser

Aktives Medium He 80%, Ne 20%

Pumpen Elektronstoß mit He-Atomen

1) Grundniveau E_0 , He, Ne

2) Pumpniveau höher Zustände in He

He relaxiert in 2 metastabile Zustände $\tau = 20\text{ms}, 600\text{s}$

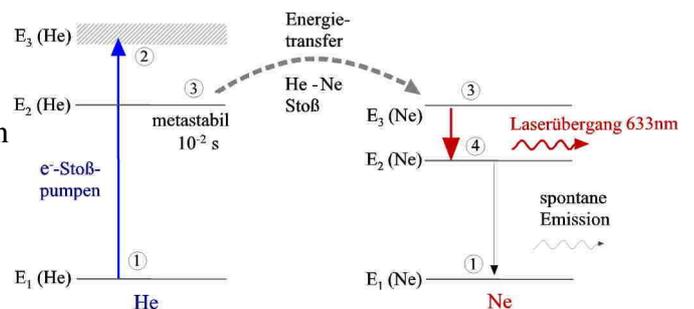
3) Inversionsniveau E_2 im Ne

Energieübertrag von He auf Ne durch Stöße der Atome

4) Lasergrundniveau E_1 im Ne

Laserübergang $E_2 \Rightarrow E_1$ $\lambda = 632,8\text{ nm}$

nach Lasingprozess relaxieren Elektronen schnell in Grundniveau E_0



Vorteil 4-Niveau-Laser gegenüber 3-Niveau-Laser

E_1 ist immer leer

E_1 immer teilweise besetzt

Angeregte Atome 10^{-6}

angeregte Atome 50%

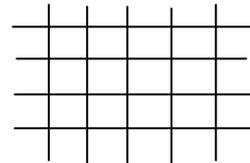
Zusammenfassung: Prüfungstrainer Kapitel 7.4, Fragen 7.4.1 – 7.4.5

FESTKÖRPERPHYSIK

Materialkunde bedeutet Festkörperphysik, denn alle Baustoffe sind Festkörper. Man kann die Festkörper klassifizieren nach ihren Eigenschaften: optisch, elektronisch, Festigkeit, Wärmeleitfähigkeit, räumlichen Struktur

1. Gitterstruktur

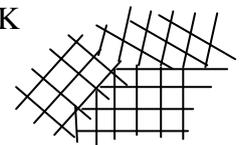
a) Einkristalle: Orte der Atome werden durch periodisches Gitter beschrieben, hohe Fernordnung



b) Polykristalline FK: viele kleine, statistisch verteilte Einkristalle bilden den FK

c) Amorpher FK: Atome statistisch verteilt, keine Fernordnung (Glas)

d) Flüssigkristall: orientierte Flüssigkeit, meist durch externes E-Feld



1.1 Einkristalle

Exp. Kristallgitter zeigen, echte Kristalle

Raumgitter an jedem Eckpunkt des Gitters sitzt ein Atom

Koordinaten Ursprung in einem Atom

Basisvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ zeigen zu den 3 Nachbaratomen
(müssen nicht rechtwinklig sein)

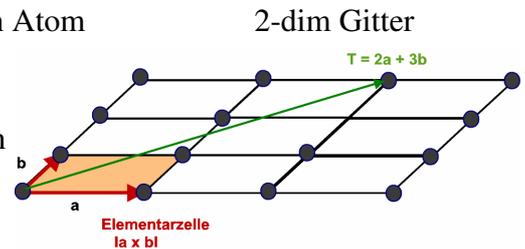
Gitterkonstanten $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|$

Translationsvektor $\vec{T} = m_1\vec{a} + m_2\vec{b} + m_3\vec{c}$ zeigt zu beliebigem Gitterpunkt

Elementarzelle gegeben durch Basisvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad \text{Volumen} = \text{Spatprodukt}$$

=> gesamte Gitter lässt sich durch Translation der Elementarzelle aufbauen



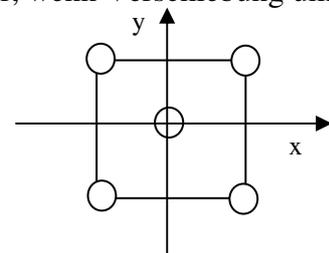
1.3 Symmetrien

wie viele unterschiedliche Kristallgitter kann es überhaupt geben? => Symmetrie betrachten!

1) Translation Ein unendlich großer Kristall geht in sich selbst über, wenn Verschiebung um

$$\vec{T} = m_1\vec{a} + m_2\vec{b} + m_3\vec{c}$$

2) Inversion am Ursprung $x \Rightarrow -x, y \Rightarrow -y, z \Rightarrow -z$



3) Spiegelung an Ebenen

FOLIE

4) Drehung um Symmetrieachsen C_n , n-zählig mit $\varphi = 2\pi / n$

$$n = 2, 3, 4, 6$$

aber $n \neq 5, n \leq 6$

denn man kann eine Fläche nicht vollständig mit 5-Ecken oder 7-Ecken ausfüllen !

Bravaisgitter

FOLIE

alle möglichen Kristallgitter können nach Symmetrie geordnet werden

=> 7 mögliche Gittertypen (nur einer Atomsorte pro Einheitszelle)

=> 14 Gitter, wenn verschiedene Atome pro Einheitszelle

1.4 Gitterebenen

Definition: durch drei nicht auf einer Gerade liegenden Atome (Gitterpunkte)

Orientierung: durch Schnittpunkte Ebene / Kristallachsen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$S_1 : m_1 \vec{a}, S_2 : m_2 \vec{b}, S_3 : m_3 \vec{c}$$

multipliziere reziproke Werte $1/m$ mit Zahl p , so dass teilerfremde, ganze Zahlen entstehen

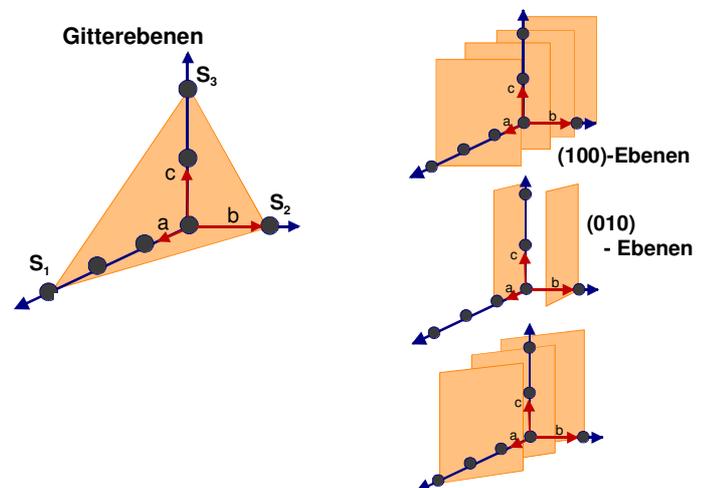
$$\Rightarrow h = \frac{p}{m_1}, k = \frac{p}{m_2}, l = \frac{p}{m_3}$$

Miller-Indizes (h, k, l) Jedes Tripel definiert parallele Netzebenen

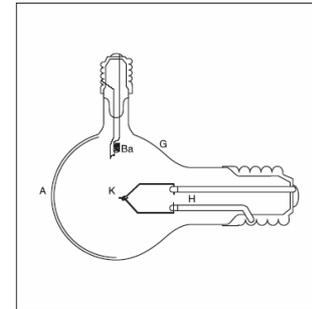
Bsp.

Frage Millerindices und Netzebenenabstand für $m_1 = 3, m_2 = 1, m_3 = 2,$

Lsg



Exp. Feldemissionsmikroskop



1.5 Reziprokes Gitter

für die Auswertung von Röntgen-Beugungsexperimenten zur Strukturbestimmung von Kristallen benötigt man das reziproke Gitter

$$\vec{a}^* = \frac{2\pi}{V_E} (\vec{b} \times \vec{c}) \quad \text{mit } V_E = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \quad \text{Volumen der Einheitszelle}$$

$$\vec{b}^* = \frac{2\pi}{V_E} (\vec{c} \times \vec{a}) \quad \text{was ist reziprok? } \Rightarrow \text{Die Einheit } [\vec{a}] = m, [\vec{a}^*] = 1/m$$

$$\vec{c}^* = \frac{2\pi}{V_E} (\vec{a} \times \vec{b}) \quad \text{(teilen durch Volumen)}$$

Realer Gittervektor $\vec{T} = m_1 \vec{a} + m_2 \vec{b} + m_3 \vec{c}$

Reziproker 1) $\vec{G}^* = h \cdot \vec{a}^* + k \cdot \vec{b}^* + l \cdot \vec{c}^*$ siehe 1.4: $h = p/m_1, \dots$

Steht senkrecht auf Gitterebene (hkl)

2) $|\vec{G}^*| = \frac{2\pi}{d_{hkl}}$ d_{hkl} = Abstand der Gitterebenen (hkl)

\Rightarrow Gitterabstände experimentell bestimmen (Laue, Bragg Röntgenbeug.)

$$\Rightarrow d_{hkl} = \frac{1}{\sqrt{(h/a)^2 + (k/b)^2 + (l/c)^2}}$$

1.6 Röntgenbeugung

1.6.1 Bragg-Streuung

monochromatischer Röntgen / Neutronen-

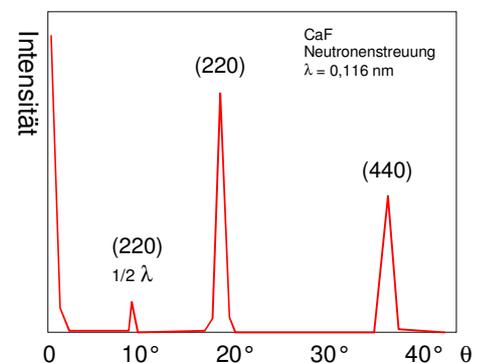
Strahl fällt unter Winkel θ auf Kristall

$$\underline{\underline{m\lambda = 2d_{hkl} \sin \theta}}$$

θ bezieht sich nicht auf Kristalloberfläche,

sondern auf Kristallebene.

Die Kristalloberfläche ist nur zu einer bestimmten Ebenenschar parallel



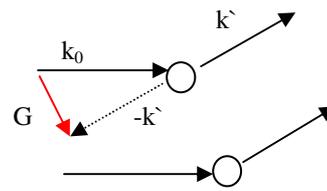
H.-Ch. Mertins
www.guest.gwdg.de

1.6.2 Laue-Streuung

weißes Röntgenlicht (nicht-monochromatisch)

$$\vec{k}_0 = 2\pi/\lambda \quad \text{einfallender Wellenvektor}$$

$$\vec{k}' = 2\pi/\lambda' \quad \text{gestreuter Wellenvektor}$$

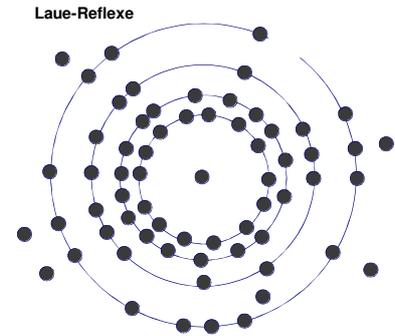


es gibt nur positive Interferenz, wenn die Laue Gleichung erfüllt ist

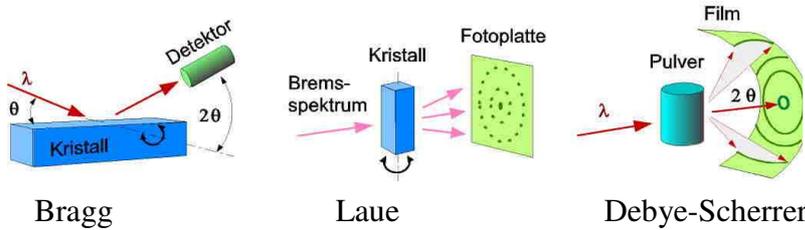
$$\vec{k}_0 - \vec{k}' = \vec{G}$$

=> Messung des reziproken Gitters

=> Berechnung des realen Gitters mit Fourier-Transformation



Zusammenfassung: Streutechniken



2 Kristallbindungen

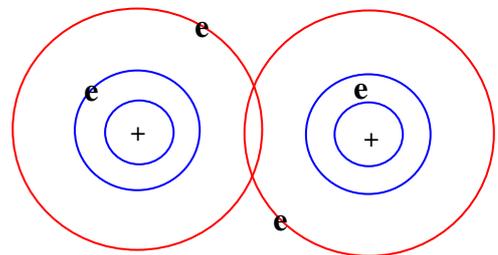
Welche Kräfte halten die Atome im Kristall zusammen ? Welche Bindungen gibt es ?

Im wesentlichen sind es elektrostatische Kräfte mit unterschiedlicher Reichweite.

Valenzelektronen: - Elektronen der äußeren, teilweise gefüllten Schalen stehen in WW

- machen die chemische Bindungen

Core-Elektronen: - innere, vollständig gefüllte Schalen



2.1 Ionenkristalle

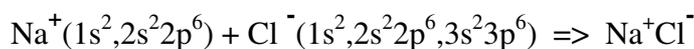
Meist Alkaliatome + Halogene (Salze)

Alkali gibt äußeres Elektron ab => volle Schale

einfach positiv

Halogen nimmt Elektron auf => volle Schale

einfach negativ geladen



=> elektrost. Anziehung beider Ionen bis sich Elektronen berühren und abstoßen

=> Gleichgewichtsabstand = Gitterabstand im Kristallgitter

Bindungsenergie beider Ionen:

Abschätzung $E_{Bind} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} = 5,1eV$,

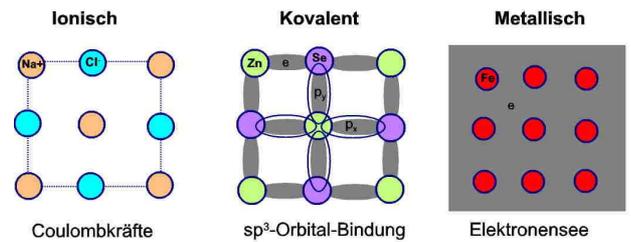
Gitterabstand $R = 0,281$ nm aus Röntgenbeugung

Experiment $E_{Bind} = 8,2$ eV

Bedeutung der hohen Bindungsenergie

=> hohe Schmelztemperatur, harte Materialien

=> schlechter elektr. Leiter, da Elektronen in abgeschlossenen Schalen gebunden



2.2 Metalle

- mehrere „frei“ bewegliche Elektronen, keine feste Zuordnung zu einem Atom

=> guter Leiter

- Modell: Elektronengas als See, in dem die pos. geladenen Atome sitzen FOLIE

- Bindungsenergie der Metallatome im Gitter:

~ 1 eV Alkali => weiches Material, geringe Schmelztemp. $T \sim 30^\circ - 190^\circ$ C

~ 4 eV 3d-Metalle (Fe, Co, Ni) => mittlere Schmelztemp. $T \sim 1000^\circ - 2000^\circ$ C

~ 8 eV W => harte Materialien, hohe Schmelztemp. $T \sim 3400^\circ$ C

2.3 Kovalente Bindung

räumliche Umverteilung der Valenzelektronen, gerichtet zwischen Atomen

Typ. Vertreter: C, Si, Ge,

mit je gleich vielen Valenzelektronen (äußere Elektronen)

sp^3 -Orbitalbindungen: 4 Nachbarn erhalten je 1 Elektron, Diamantstruktur

BN, SiC: harte, spröde Materialien, hohe Schmelztemp. wegen gerichteter Bindungen

Übersicht Bindungen

FOLIE

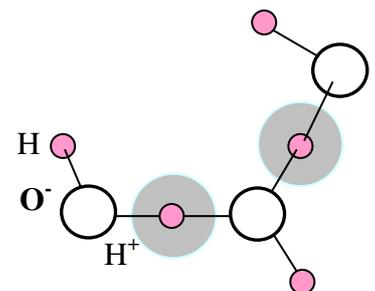
Welche Substanzen machen welche Bindung? => Siehe Periodentafel FOLIE

2.4 Wasserstoffbrücken

H-Atom zwischen zwei elektronegativen Atomen (Halogen, O)

Elektron wird gerecht „verteilt“, d.h. H bildet Brücke zwischen den O^-

=> Eisbildung, Polymerisation von CH-Molekülen



Zusammenfassung: Prüfungstrainer Kapitel 8.1, Fragen 8.1.1 – 8.1.8

3 Elektronische Struktur

3.1 Freies Elektronengas

Dieses Modell passt gut zu Metallen, die sie quasi-frei bewegliche Elektronen besitzen.

Aber: Elektronengas - ist kein „klassisches“ Gas, für das die Maxwell-Boltzmann-Statistik gilt

- ist quantenmechanisches System, für das die Fermi-Dirac-Statistik gilt

Elektronengas im 3-dim-Potenzialkasten (Länge L), Schrödingergleichung lösen

$$\Rightarrow E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{h^2}{8mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

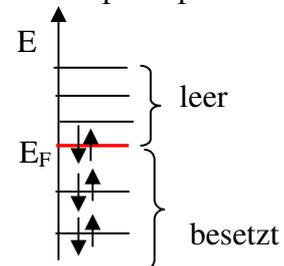
fülle alle Zustände mit N Elektronen auf, unter Berücksichtigung des Pauliprinzips

Fermi-Energie:

E_F = Energie des höchsten besetzten Zustandes

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n_e)^{2/3}$$

$$n_e = \frac{N}{V}, \quad V = L^3 \quad \text{Elektronendichte typisch } n \approx 10^{22} \text{ cm}^{-3}$$

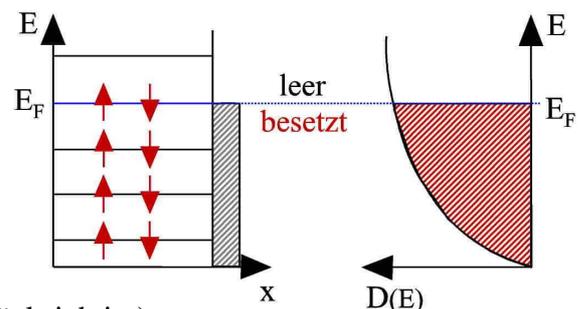


In realen Festkörpern mit Ausdehnungen $L \gg \text{nm}$ gibt es sehr viele eng beieinander liegende Zustände, d.h. es gibt eine quasikontinuierlichen Verteilung (Zustandsdichte).

Zustandsdichte $D(E)$

Wegen der quasikontinuierlichen Verteilung fragt man nach der Zahl Z der Zustände pro Energiebreite dE und pro Volumen V

$$D(E) = \frac{dZ}{dE} \frac{1}{V} = \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E}$$



Gesamtenergie aller N Elektronen

$$E_{total} = \int_0^{E_F} E \cdot D(E) dE \quad (\text{Spinartung berücksichtigt})$$

$$\Rightarrow E_{total} = \frac{3}{5} N \cdot E_F$$

$$\Rightarrow \bar{E}_{kin} = \frac{1}{N} E_{total} = \frac{3}{5} E_F \quad \text{mittlere kinetische Energie eines Elektrons}$$

Fermi-Dirac-Funktion

Bisher haben wir die Zustandsdichte, die Zahl der Zustände und die Energie berechnet – offen ist aber die Frage: welche Zustände sind überhaupt besetzt?

Wovon hängt die Besetzungswahrscheinlichkeit ab ? => von der Temperatur

T = 0 K Alle Zustände unterhalb E_F sind besetzt

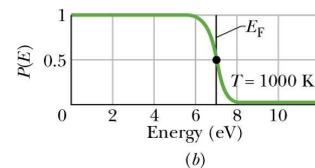
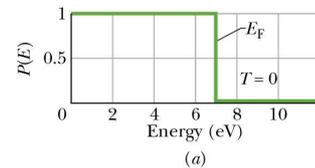
„ Oberhalb E_F sind frei

T > 0 K Elektronen besitzen kin. Energie kT

=> können Zustände mit $E > E_F$ besetzen

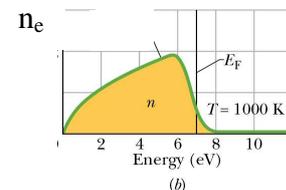
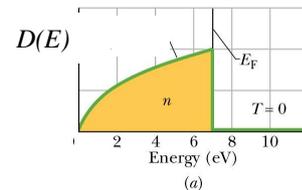
Fermi-Funktion
$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}$$

=> Besetzungswahrscheinlichkeit für Zustand der Energie E bei Temperatur T



Typische Werte

$E \gg E_F$	$f(E) = 0$
$E \ll E_F$	$f(E) = 1$
$E = E_F$	$f(E) = 1/2$



Elektronendichte im Bereich dE für $T > 0 K$

=>
$$n_e dE = D(E) \cdot f(E) dE$$

Wichtig für Leitfähigkeit von Halbleitern (s.u.) !

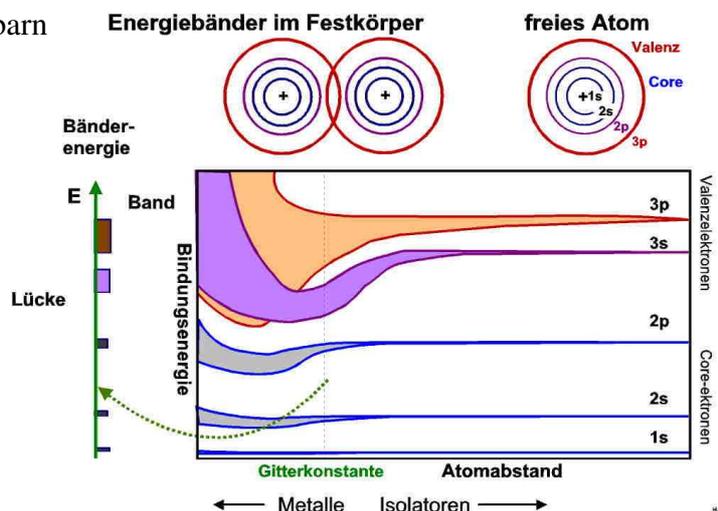
3.2 Energiebänder

3.2.1 Elektronen im periodischen Potenzial

3.2.2 Bänder im atomaren Modell

betrachte freie Atome, die zu einem Festkörper zusammen geschoben werden:

- => Valenzelektronen spüren Nachbarn
- => Orbitale überlappen
- => Elektronen tunneln zum Nachbaratom
- => aus N einzelnen Atomen wird neues N-Atom-System mit doppelter Elektronenzahl



Bindung:	bedeutet Energieabsenkung im Festkörper gegenüber freiem Atom
Gitterkonstante:	Gleichgewichtsabstand der Atome im Festkörper
Bänder:	Energiezustände für Elektronen breiter als atomare Niveaus
Bandlücke:	verbotener Energiebereich für Elektronen
Core-Zustände:	enge Bindung der Elektronen an Kern, lokalisierte Elektronen => Energie kaum verändert gegenüber freiem Atom
höhere Bänder:	Elektronen sind delokalisiert, tunneln von Atom zu Atom Elektronen sind keinem Atom fest zugeordnet
Band-Besetzung:	N Atome mit Kernladungszahl Z bilden Festkörper => Elektronenzahl: $N \times Z$ $N \sim 10^{24}$ Bandelektronenzahl = $N \times$ Elektronen pro Atomzustand

3.2.3 Isolatoren & Leiter

Die elektrische Leitfähigkeit von Festkörpern wird anhand der Bandstruktur gedeutet. Design von modernen Werkstoffen, Chips, Magneten bedeutet heute Design von Bandstrukturen.

Kriterium, ob Leiter oder Isolator:

wie sind die Bänder mit Elektronen gefüllt, d.h. wo liegt die Fermienergie?

Isolator

Betrachte ionischen Kristall Na^+Cl^-

Na^+ : $1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^0$ 3s leer, da Elektron an Cl abgegeben

Cl^- : $1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^2, 3p^6, 4s^0$ 3p voll, da Elektron von Na erhalten

=> Zustände komplett gefüllt oder komplett leer,
kein teilweise gefüllter Zustand / Band

elektrische Leitung:

lege außen elektrische Spannung U an

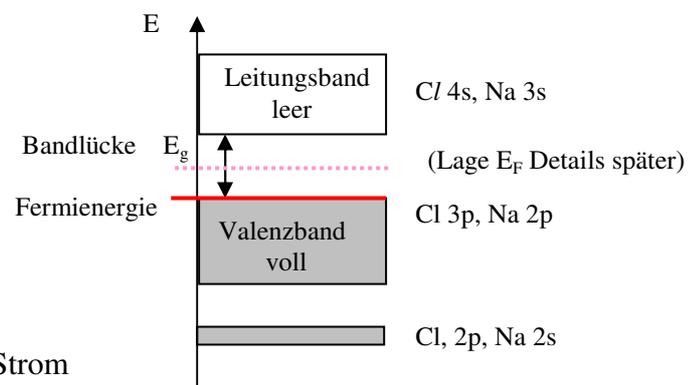
=> Energieaufnahme der Elektronen $E_{\text{kin}} = eU$ => Strom

Voraussetzung: freie Zustände höherer Energie für Elektronen nicht gegeben

Isolator: $E_{\text{kin}} \ll E_g$ keine Zustände in Bandlücke vorhanden (einzeichnen)

Anschaulich: keine freien Plätze, auf die die Elektronen springen können

=> keine elektrische Leitung



Leiter Fe-Kristall Fe: $1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^2, 3p^6, 3d^6, 4s^2$

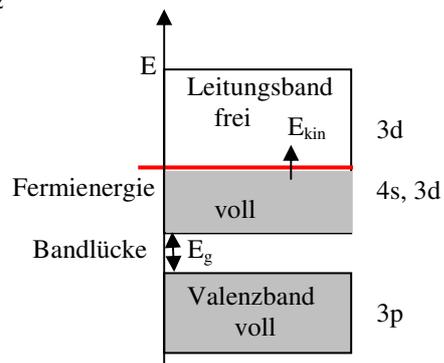
3d-Schale nur teilweise gefüllt

=> Fermienergie liegt im Leitungsband

Bandlücke $E_g = 0$ auch möglich, irrelevant

Energieaufnahme E_{kin} möglich

=> elektrische Leitung möglich (einzeichnen)



Valenzband: immer voll

Leitungsband: teilweise gefüllt oder leer, Elektr. verhalten sich (fast) wie im freien Elektr. Gas

4 Halbleiter

4.1.1 Intrinsische Halbleiter

Materialien: Elementhalbleiter (Si, Ge, ...)

Verbindungshalbleiter (GaAs, InP, ...)

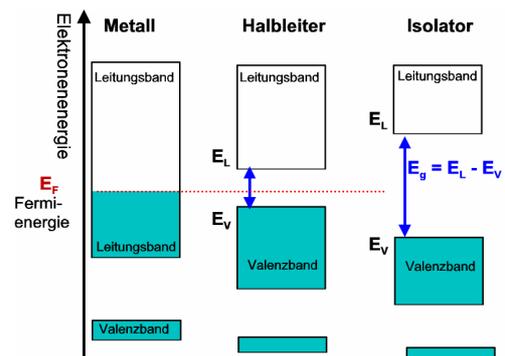
Isolator: Gap E_g groß LB leer ($T \geq 0$ K)

Halbleiter: Gap E_g klein LB leer nur bei $T = 0$

=> Temperaturabhängige Leitfähigkeit

=> Nichtleiter bei $T = 0$ K

FOLIE Periodentafel



4.1.2 Temperaturabhängigkeit

Bandlücke E_g ist kleiner als im Isolator

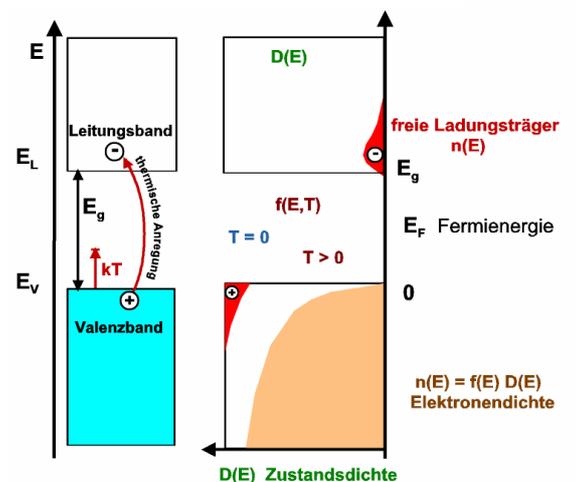
=> Ausläufer der Fermiverteilung reicht bis in's

Leitungsband wenn $T > 0$ K

=> Elektrische Leitung wird durch thermische Anregung wahrscheinlicher, da freie Ladungsträger: Freie Elektronen im LB, Löcher im VB

beachte: thermische Anregung obwohl ($kT < E_g$)

möglich wegen „verschmierter“ Fermiverteilung!



Zustandsdichte im LB
$$D(E) = \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E - E_L} \quad (\sqrt{E} \text{ da Elektronengas})$$

Elektronenzahl im LB $n_e(E) = \int_{E_L}^{\infty} D(E) f(E) dE = n_0 e^{\frac{-(E_L - E_F)}{kT}}$

$$\underline{\underline{n_e(E) = n_0 e^{\frac{-(E_L - E_F)}{kT}}}}, \quad n_0 = 2 \left(\frac{m_e^* kT}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2}$$

Löcherzahl im VB $\underline{\underline{n_p(E) = p_0 e^{\frac{-(E_F - E_V)}{kT}}}}, \quad p_0 = 2 \left(\frac{m_p^* kT}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2}$

Ladungsträgerdichte: $n_i = \sqrt{n_e \cdot n_p} = \sqrt{n_0 p_0} e^{\frac{-E_g}{2kT}}$ (intrinsische Dichte undotierter HL)

Berechnung benötigt nicht die Fermienergie !

Deutung: $p_0, n_0 =$ Dichte der Zustände in VB, LB

Bsp. Si, T = 300 K $n_0 = 2,73 \cdot 10^{19} 1/cm^3, p_0 = 1,08 \cdot 10^{19} 1/cm^3$ ($m_e^* \neq m_p^*$)

4.1.3 Leitfähigkeit intrinsischer Halbleiter

Stromdichte $j = \sigma \cdot E$ mit $\rho = \frac{1}{\sigma}$ spezifischer Widerstand

Leitfähigkeit $\sigma = n_e \cdot e^2 \cdot \frac{\tau_e}{m_e^*} + n_p \cdot e^2 \cdot \frac{\tau_p}{m_p^*}$

τ : freie Flugzeit zwischen 2 Stößen für Elektronen, Löcher

$n_{e,p}$: intrinsische Ladungsträgerdichte (identisch für Elektronen und Löcher)

Temperaturabhängigkeit

a) τ : sinkt mit wachsendem T (bestimmend für Metalle)

b) $n_{e,p}$: wächst mit T (bestimmend für Halbleiter) exponentiell

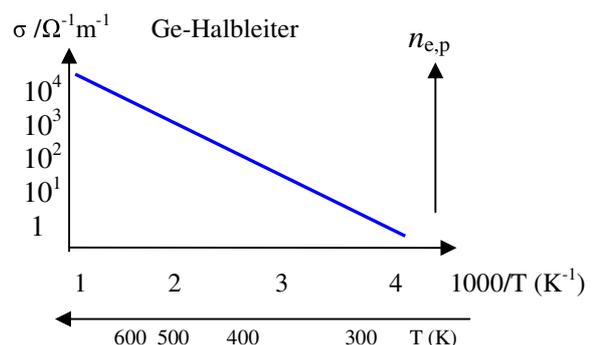
$\Rightarrow \sigma = X(T) \cdot e^{\frac{-E_g}{2kT}}$, $X(T)$ leicht temperaturabhängig

\Rightarrow Leitfähigkeit eines HL:

- steigt exponentiell mit Temperatur

- hängt ab von E_g

(rechts: Arrhenius-Darstellung)



- Exp.** 1) Stromkreis mit Widerstandsdraht über einer Flamme, U fest, I messen
 2) Halbleiter, dotiertes Si

Zusammenfassung: Prüfungstrainer Kapitel 8.2, Fragen 8.2.1 – 8.1.11

4.2 Dotierte Halbleiter

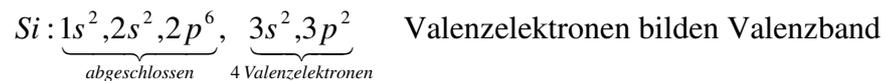
Für elektronische Anwendungen ist die gezielte Einstellung der Leitfähigkeit wichtig, unabhängig von der Temperatur, woher erhält man zusätzliche Ladungsträger?

Idee: - Wirtskristall (Si, Ge) dotieren mit Fremdatomen

Lösung: - Ionen-Implantation (Beschuss mit 100 eV – keV), Diffusion aus heißem Dampf machbar: - Fremdionenkonzentration $10^{-8} - 10^{-4}$

4.2.1 Donatoren und n-Halbleiter

Wirtskristall: sei 4-wertig (Si, Ge) (hier nur ein Beispiel für 4-wertigen Wirt)



Wertigkeit: Zahl der Valenzelektronen, d.h. Z minus Elektronen in abgeschl. Schalen

Dotierung: 5-wertig (P, As, Sb, Hauptgruppe V)

Donator: 1 Elektron zu viel für Kristallbindung
 extra Elektron kann leicht abgegeben werden

n-Halbleiter: negative Überschussladung

Leitung: Elektronen = Majoritätsträger, Minoritätsträger: Löcher

Bindung: Donatorelektron im Coulombfeld des Donatorions

Reduzierte Bindung durch Polarisation der Si-Valenzelektronen skaliert mit ϵ

Energie Donatorelektron wie im H-Atom, aber skaliert mit

$$E_n^{Donator} = -13,6 eV \frac{1}{n^2} \left(\frac{m_e^*}{m_e \epsilon^2} \right)$$

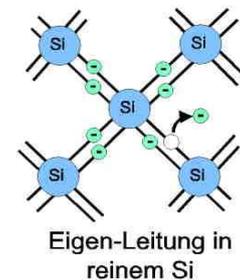
Radius $r_n = r_{Bohr-n} \cdot \epsilon \cdot \frac{m_e}{m_e^*}$

Bsp. für Si gilt $\epsilon \approx 12$, $m_e/m_e^* \approx 3$

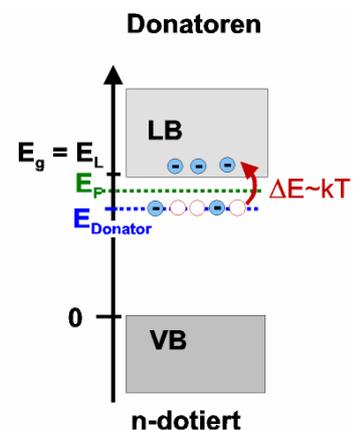
$\Rightarrow E_1^{Donator} = -40 meV$, sehr schwach gebunden, Ionisierungsenergie $\sim kT$

$\Rightarrow r_1 = 2 nm$ also delokalisiertes Elektron, ca. 10-facher Atomabstand

\Rightarrow quasi-freies Donatorelektron im LB



Eigen-Leitung in reinem Si



Dichte freier Donatorelektronen:

Allgemeine Formel $n = n_D^+ = \frac{N_D}{2e^{(E_F - E_D)/kT} + 1}$, $N_D = \text{Donatordichte}$

$$E_F = \frac{E_D + E_L}{2} + \frac{kT}{2} \ln\left(\frac{N_D}{n_0}\right)$$

Typ. Fälle:

- a) Tiefe Temperatur $kT \ll |E_F - E_D| \Rightarrow n_D^+ = 0$
- b) mittlere Temperaturen $n_D^+ \approx 0,1 \cdot N_D$ groß, da $(E_F - E_D) \sim kT$
- c) Zimmertemperatur $n_D^+ \approx N_D$ nahezu alle Donatoren sind ionisiert
- d) hohe Temperaturen $kT \gg E_g \quad n = n_i = \sqrt{n_0 p_0} e^{\frac{-E_g}{2kT}}$ intrinsische Leitung
unerwünscht für Anwendung, bei großem T wähle HL mit größerem E_g Ge < Si < GaAs < GaN

4.2.2 Akzeptoren und p-Halbleiter

Wirtskristall: sei 4-wertiges Si

Dotierung: 3-wertig (Al, Ga, Hauptgruppe III)

Akzeptor: 1 Elektron fehlt für Kristallbindung
extra Loch kann leicht aufgefüllt werden

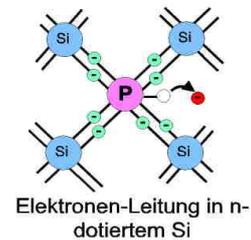
p-Halbleiter: positive Überschussladung

Leitung: Löcher = Majoritätsträger, Minoritätsträger: Elektronen

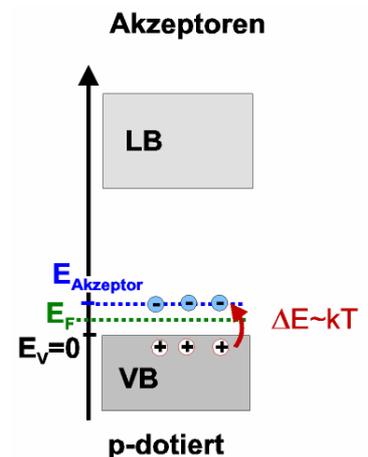
Bindung: 3-wertiges Akzeptorion hat kleinere Bindungsenergie für extra Elektron im Vergleich zu Si-Ionen => Akzeptorniveaus liegen oberhalb des VB

Valenzband: Bindungsenergie der Si-Valenzelektronen

Akzeptorzustände: $E_A \sim kT$



FOLIE Periodentafel



4.2.3 Absorption in Festkörpern

Wie kann man Energiezustände in dotierten ermitteln ? => Spektroskopie

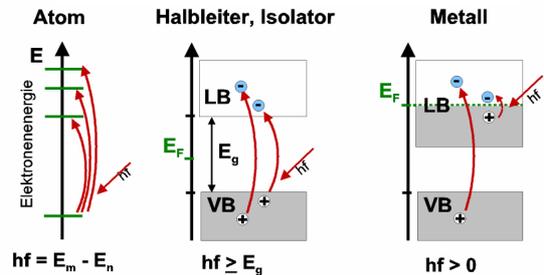
Absorption nur durch Übergang von besetztes in unbesetztes Niveau

Atom: $hf = E_m - E_n$, => diskretes Spektrum

Isolator: $hf \geq E_g$, => Kantenspektrum

Metall: $hf > 0$, => Absorption von Licht mit jeder Frequenz

Dotierter HL: $hf \geq (E_g - E_{D,A}), \geq E_{A,D}$



Bsp. Zeichne die Absorptionsspektren

Tafelbild

Exp UV-Anregung von Leuchtstoffen ZnS:Cu, ZnS:Ag, YSO₂:Eu

Exp leitfähiges Glas ITO

4.3 Halbleiterbauelemente

Die wichtigsten elektronischen Bauelemente bestehen aus dotierten Halbleitern

4.3.1 p-n-Kontakt

Bilde Kontakt aus p- & n-Halbleiter und betrachte Kontaktfläche

Diffusion: Elektronen strömen aus n- in p-Bereich I_{Diff} und rekombinieren mit Löchern im p-Bereich

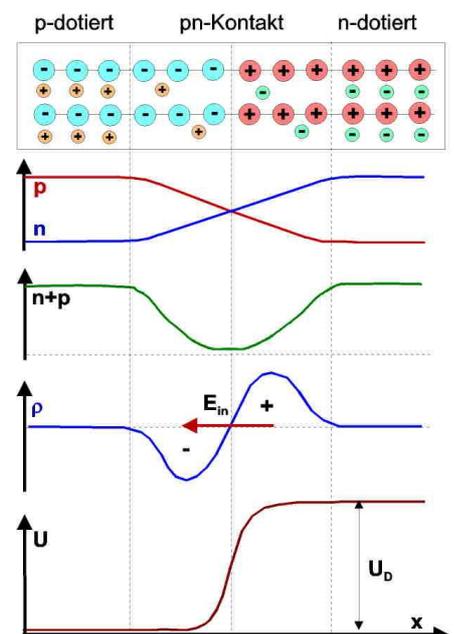
Ursache: Ladungsträgergradient an n-p-Grenze

Folge: Verarmungsschicht, keine freien Ladungsträger
Raumladungszone (Grenzbereich) ist nicht neutral
ortsfeste Ladungsträger:

p: neg, da e^- am Akzeptor gebunden

n: pos, da e^- dem Donator fehlt

Folge inneres Gegenfeld E_{in} bremst Diffusionsstrom
durch Feldstrom I_{Feld} Kontaktspannung U_D

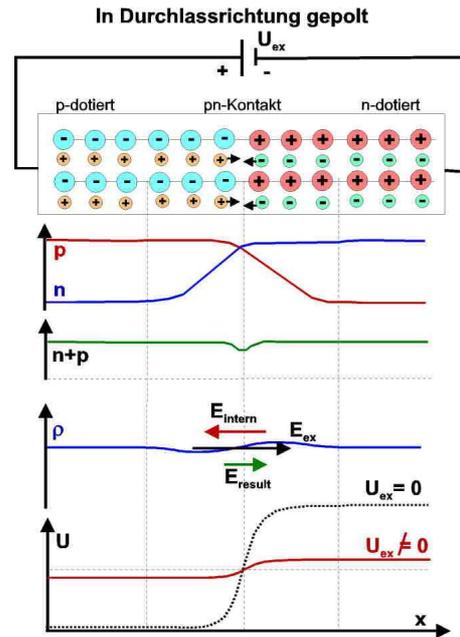


Durchlassrichtung

Externe Spannungsquelle U_{ex} so anschließen, dass

Polung: p-Bereich: plus-Pol
 n-Bereich: minus-Pol

Folge: E_{ex} kompensiert E_{in} => innere Barriere verschwindet, Raumladungszone wird verkleinert, mehr freie Ladungen
 Majoritätsträger-Strom fließt



Sperrrichtung

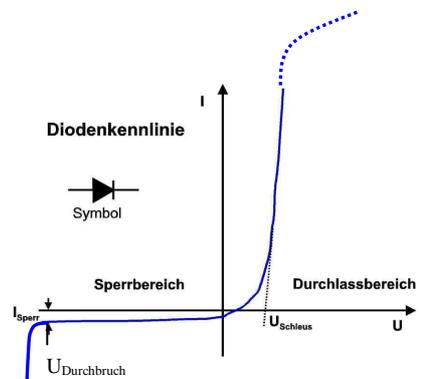
Polung: n-Bereich: plus-Pol
 p-Bereich: minus-Pol

Folge: E_{ex} verstärkt E_{in} => innere Barriere wächst, Raumladungszone wächst, Zahl freier Ladungen sinkt => Widerstand wächst,
 Sperrstrom I_S : nur Minoritätsträger-Strom fließt, also e^- auf p-Seite, Löcher auf n-Seite
 Antrieb durch $(E_{ex} + E_{in})$

Gleichrichter

Gesamte Stromdichte als Funktion der externen Spannung

$$j = j_S \left(e^{\frac{eU_{ex}}{kT}} - 1 \right), \quad j_S: \text{Sperrstromdichte}$$



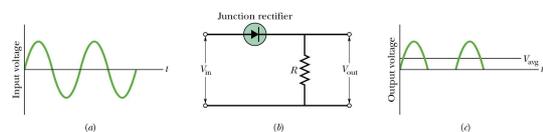
Fälle: $U_{ex} > 0$ => exponentieller Anstieg ($I = 0,1 - 20 \text{ A}$)

$U_{ex} \geq U_D$ linearer Anstieg, alle freien Ladungsträger nehmen am Strom teil

$U_{ex} < 0$ $e^{\frac{eU_{ex}}{kT}} \sim 0$, ($I \sim \mu\text{A}$)

$U_{ex} < U_{Durchbruch}$ Tunnelstrom setzt ein, da Bandverbiegung am p-n-Kontakt so stark, dass p-Valenzband höher liegt als n-Leitungsband
 ($U_{Durchbruch} \text{ } 50 \text{ V} - 2000 \text{ V}$)

- Exp. A) Diodenkennlinie,
- B) Sinusspannung auf Gleichrichterdiode



4.3.2 LED, Laser

Light Emitting Diodes haben fast überall konventionelle Glühlampen ersetzt. Basis für viele Sender z.B. Fernbedienung Fernseher (infrarot)

Prinzip: Lichtemission durch Elektronenübergang vom LB => VB

$$E_g \approx hf$$

Material: GaAs, ZnSe, GaN, ... emittiert Licht
Ge, Si, ... wandeln Energie nur in Wärme um

Nötig: viele Elektron-Loch-Paare müssen rekombinieren

Lösung: p-n-Kontakt, - Halbleiter allein hat zu wenig Ladungsträger,
- einfach dotierter HL hat nur eine Sorte (Löcher oder Elektr.)
- meist GaAs, dotiert mit Al oder In

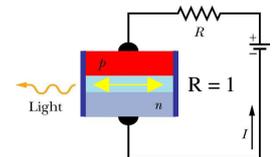
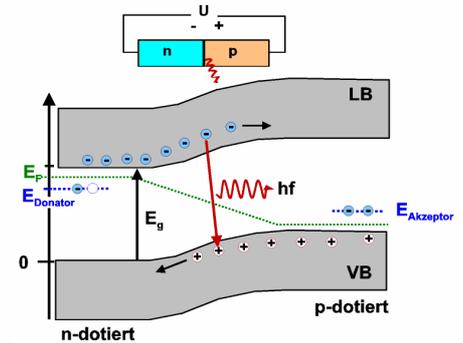
Schaltung: Durchlassrichtung

HL-Laser: Besetzungsinversion durch p-n-Kontakt gegeben

Resonator: Stirnflächen plan und verspiegelt $R=1 / 0,95$

Probleme: meist strahlungslose Rekombinationen an Defekten u. Störstellen

Light Emitting Diode



4.3.3 Photodiode & Solarzelle

Prinzip:

a) Lichtabsorption erzeugt freie Ladungsträger, wenn

$$hf > E_g$$

b) inneres Feld E_{in} trennt die Ladungsträger am p-n-Kontakt

wichtig: Lichtabsorption nahe der p-n-Grenze, da nur hier E_{in} wirkt

=> Elektronen laufen in n-Bereich, Löcher laufen in p-Bereich

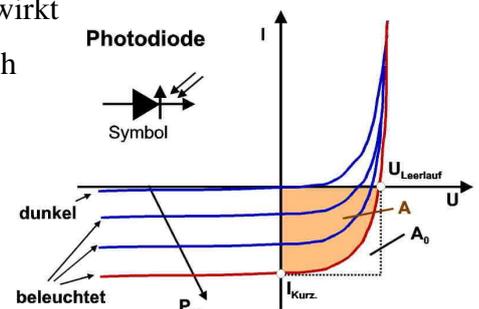
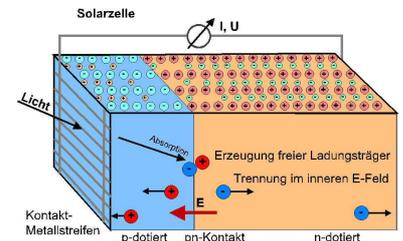
Kurzschlußstrom: $I_K(U=0) \sim P_{Op}$ (Lichtleistung)

Leerlaufspannung: $U_L(I=0) \sim \ln(P_{Op})$

$$FF = \frac{A}{A_0} = \frac{\int I dU}{U_L I_K}$$

Arbeitsbereich: 4. Quadrant, wähle Arbeitswiderstand so, dass $P_{max} = U_A \cdot I_A$

Typische Werte: $E_g \approx 1 - 2eV$, $U_L = 0,5 - 1V$, Deckschichtdicke $\sim \mu m$



Exp. Diode, Festkörper-Laser, siehe auch Praktikum, Solarzelle treibt Motor an, H2O-Auto

Zusammenfassung: Prüfungstrainer Kapitel 8.3, Fragen 8.3.1 – 8.3.8

KERNPHYSIK

1 Atomkern

1.1 Rutherfordmodell

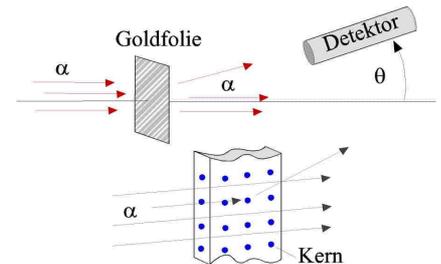
Altes Thomson-Modell: gesamte Masse der Materie gleichmäßig verteilt wie Pudding

Elektronen sitzen wie Rosinen im Pudding

Neues Rutherford-Modell: gesamte Masse im Atomkern konzentriert

Elektronen (fast masselos) sitzen zwischen den Kernen

Test: Streuung schwerer α -Teilchen (He^{2+}) an dünner Goldfolie



Alpha-Quelle: Radongas in Glasröhre

Messung: Zahl der α -Teilchen als Funktion des Streuwinkels

Ergebnis: a) die meisten α -Teilchen werden nicht abgelenkt

b) einige α -Teilchen werden um 180° zurückgestreut

Deutung: Antwort auf Frage: wer streut die α -Teilchen?

altes Modell i) Elektronen nicht, da $m_\alpha / m_e = 7500$

(werfe einen Stein in einen Mückenschwarm)

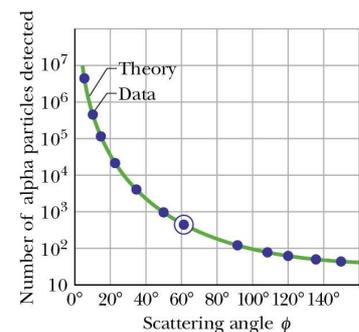
ii) Masseverteilung wie im Pudding: Ablenkung um max. 1° erwartet

(mit Gewehr auf Schneemann schießen)

Rutherford b) Rückstreuung nur möglich, wenn große Kräfte wirken

=> große Konzentration der Masse in kleinem Kern nötig

a) großer Kernabstand, Füllung mit leichten Elektronen ohne Streuwirkung



1.2 Kernaufbau

Atomkerne bestehen aus Nukleonen: Neutronen & Protonen

Protonenzahl Z : Kernladung $Z \cdot e$, Ordnungszahl

Neutronenzahl N (neutral)

Massezahl: $A = Z + N$

Bezeichnung: ${}^A_Z X$ Bsp. ${}^7_3 \text{Li}$, $A = 7 = 3 + 4$

Element: X , gegeben durch Z

Isotope: Elemente mit verschiedenem N , $A = N + Z$ (gleiches Z , chemisch gleich)

1.2.2 Radien

Kernform: Kugel bis Ellipsoid

Untersuchung: Streuung hochenergetischer Elektr. ($E > 200 \text{ MeV}$), deBroglie Wellenlänge

Radius: $r \approx r_0 A^{\frac{1}{3}}$, $r_0 = 1,2 \text{ fm} = 1,2 \times 10^{-15} \text{ m}$

Volumen: $V \sim r^3 \sim A$ aus Nucleonen wie aus Bausteinen zusammengesetzt

1.2.3 Masse

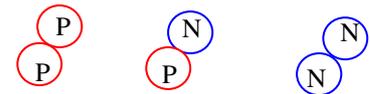
beachte Kernmasse ungleich Atommasse wegen Bindungsenergie der Nucleonen (siehe 1.3.2)

Proton: $m_p = 1,0073 \text{ u}$

Neutron: $m_n = 1,0087 \text{ u}$ $1 \text{ u} = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ $1/12$ der Atommasse von ^{12}C

1.2.4 Kernkräfte

- haben extrem kurze Reichweite (wie Klebstoff, nur im Kontakt der Nucleonen)
- wirken unabhängig von der Nucleonenart
- sind keine Gravitations- oder elektromagn. Kräfte

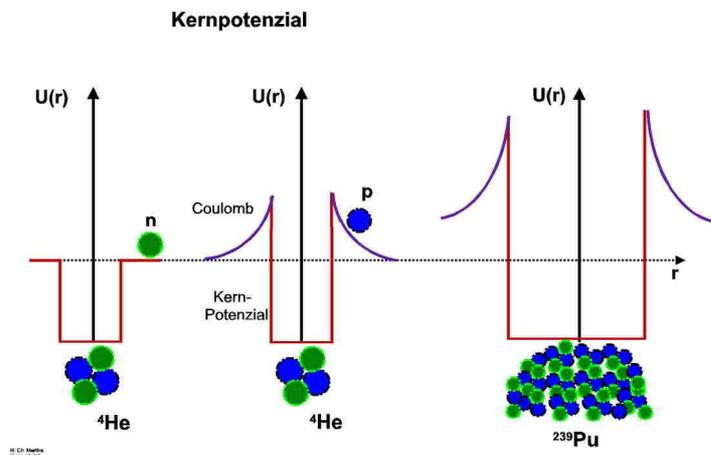


Potenzial des Kerns:

d.h. welche Arbeit muss man verrichten, um Nucleon in Kern zu bringen?

Kernkraft: $F = -\frac{dU}{dx}$

ist extrem groß am steilen Rand

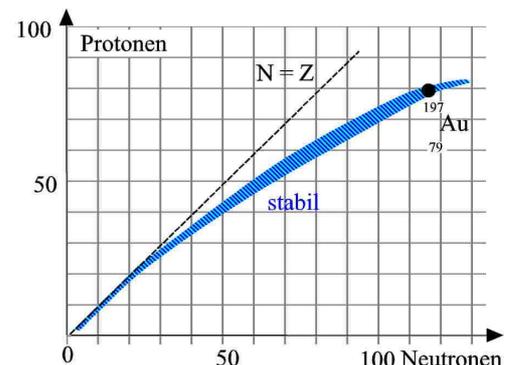


1.2.5 Radionuklide

Die meisten Isotope sind nicht stabil, sondern wandeln sich unter Emission von Teilchen und Energie in andere Elemente um (radioaktiver Zerfall)

Stabile Elemente sind:

- a) Leichte Elemente $N = P$
 - b) schwere Elemente $N > P$
- z.B. Gold $^{197}_{79}\text{Au}$ $Z = 79$, $N = 118$
 => Überschuss von 39 N



1.3 Kernenergie

1.3.1 Masse & Energie

gemäß Relativitätstheorie hängen Masse m und Energie E zusammen

$$E = mc^2$$

$\Delta E = \Delta mc^2 \Rightarrow$ Änderung der Masse bei Kernreaktionen bedeutet Energietransfer

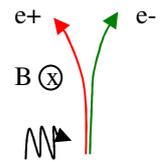
Paarbildung

Wird in der Nähe eines Atomkerns ein γ -Quant absorbiert so wird aus Energie Masse erzeugt

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+ \quad \text{Elektron - Positron-Paar}$$

$$2 \cdot 0,51 \text{ MeV} \rightarrow m_e \cdot c^2 + m_e \cdot c^2 \quad \text{Atomkern sorgt für Impulserhaltung}$$

$$(2 \cdot 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg} (3 \cdot 10^8 \text{ m})^2 / 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})$$



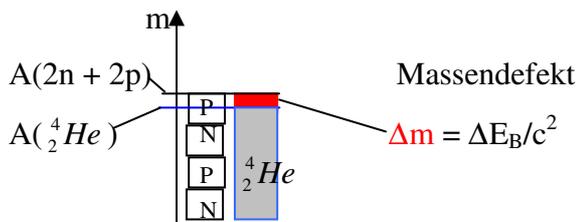
Zerstrahlung

Treffen Elektron und Positron zusammen, so zerstrahlen sie in zwei γ -Quanten die in 180° auseinander fliegen (Impulserhaltung)

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$$

1.3.2 Bindungsenergie

Die Masse eines Kerns ist kleiner als die Summe der Massen der einzelnen Nukleonen (Proton, Neutron). Das macht die Bindungsenergie aus



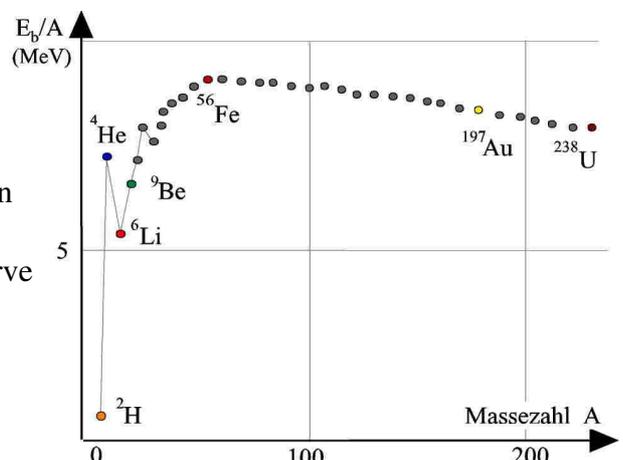
$$\Delta E_B = \sum mc^2 - Mc^2 \quad \text{Bindungsenergie}$$

M: Kernmasse, $m = u$: Nukleonenmasse

$$\Delta E_{BN} = \frac{\Delta E_B}{A} \quad \text{Bindungsenergie pro Nukleon}$$

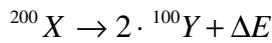
stärkste Bindung: Kerne im Maximum der Kurve

schwächere Bindung: leichte und schwere Kerne

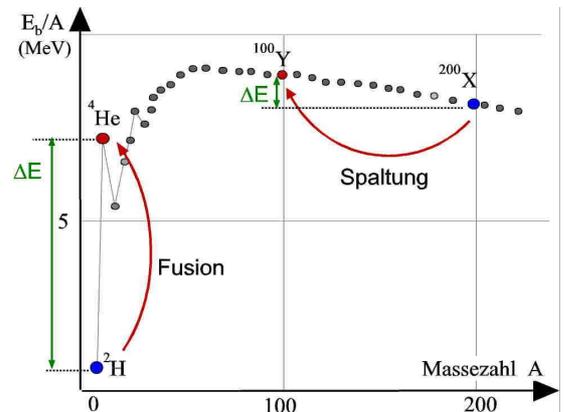
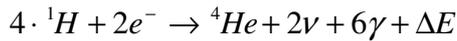


Mit dieser Kurve erklärt man Kernspaltung und Fusion!

Spaltung: Kerne auf rechter Seite wären fester gebunden, wenn in 2 Teile gespalten
 Daher spontane Spaltung schwerer Elemente



Fusion Kerne auf linker Seite wären fester gebunden, wenn sie fusionieren würden



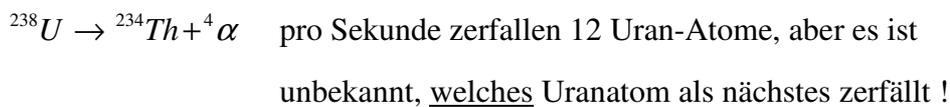
Energiegewinn pro Nukleon bei He-Fusion:

$$4 \times 1\text{MeV} \Rightarrow 4 \times 7\text{MeV} \quad 28\text{MeV} - 4\text{MeV} = 24 \text{ MeV}$$

2 Radioaktiver Zerfall

2.1 Zerfallsgesetz

radioaktiver Zerfall ist ein statistischer Prozess, betrachte Zerfall einer Uranprobe



Gesucht: Funktion $N(t)$ = Zahl der noch nicht zerfallenen, radioaktiven Atome zur Zeit t

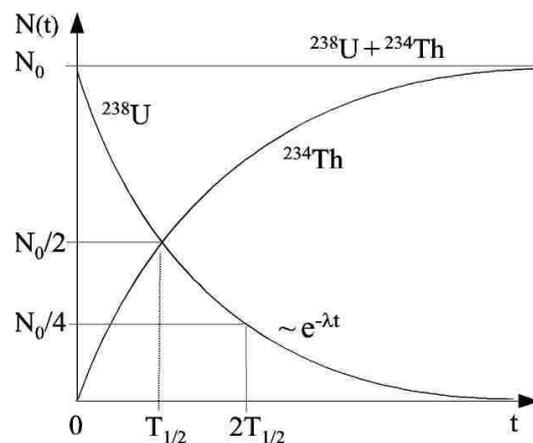
Experimentell beobachtet wird:

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N \quad \lambda: \text{Zerfallskonstante, charakteristisch für jedes Isotop}$$

$$\Rightarrow \int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_{t_0}^t dt$$

$$\Rightarrow \ln N - \ln N_0 = -\lambda(t - t_0) = \ln \frac{N}{N_0}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{N(t) = N_0 e^{-\lambda t}}}$$



Tafelbild

Zerfallsrate $R = -\frac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$

- gibt Zerfälle pro Sekunde an,
z.B. Strom der α -Teilchen im Uranzerfall
- wichtig für Dosisberechnung bei Bestrahlungstherapie
- R wird gemessen, um $T_{1/2}$, λ zu ermitteln

Aktivität: 1 Bequerel = 1Bq = 1 Zerfall pro Sekunde

1 Curie = 1 Ci = $3,7 \times 10^{10}$ Bq

Lebensdauer τ $e^{-1} R_0 = R_0 e^{-\lambda \tau}$ auf 1/e abgefallen $\Rightarrow \tau = \frac{1}{\lambda}$

Halbwertszeit $T_{1/2}$ $\frac{1}{2} R_0 = R_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$ auf die Hälfte abgefallen

$\Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$

2.2 Alpha-Zerfall

ist jede Umwandlung eines Kerns in einen anderen unter Aussendung von α -Teilchen



$\Delta E = 4,25 \text{ MeV}$

$T_{1/2} = 4,5 \times 10^9$ Jahre warum so lange, d.h. warum so unwahrscheinlich?

Zerfallsmodell

Schon vor dem Zerfall ist α -Teilchen eigenständiges Teilchen im Urankern

Gesucht: potenzielle Energie des Systems α -Teilchen - ^{234}Th -Kern

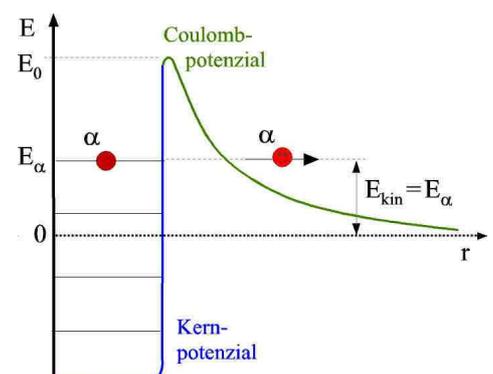
- Kräfte: i) Coulombkraft abstoßend, große Reichweite
ii) starke Kernkraft anziehend, kurze Reichweite

$r \leq r_0 A^{1/3}$ Wirkungsbereich im Kern

Potenzial: Rechteck im Kern, $U \sim 1/r$ außerhalb

Energie: $E = 4,25 \text{ MeV}$, angeregter Zustand vor Zerfall

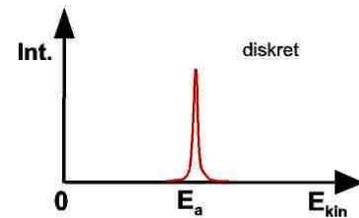
Emission: Tunnelprozess des α -Teilchens



Zerfallsrate: hängt von Energie und Barrierenbreite ab (Tunnelwahrscheinlichkeit)

Vergleich: ^{228}U : $E = 6,81 \text{ MeV}$, $T_{1/2} = 9,1 \text{ min}$

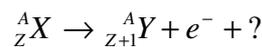
Spektrum: diskret



2.3 Beta-Zerfall

Umwandlung eines Kerns in einen anderen unter Aussendung von Elektronen / Positronen

Problem: mehrere Erhaltungssätze schienen verletzt zu sein

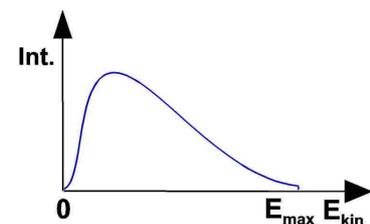


Masse $A \Rightarrow A + 0$ Masse ok

Ladung $Ze \Rightarrow (Z+1)e - e$ Kernladung ok

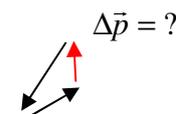
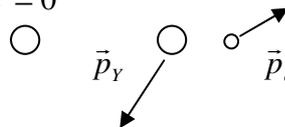
Spin $1 \Rightarrow 0 + 1/2$ verletzt, $S = 1/2$ fehlt

Spektrum kontinuierliche Energieverteilung der Elektronen
Wo bleibt ΔE ? Nur einige e^- haben gesamte Energie



Impuls wer trägt Δp ?

$$\vec{p}_x = 0$$



Neutrino ν , Anti-Neutrino $\bar{\nu}$

Nötig um Erhaltungssätze zu erfüllen: Impuls, Energie, Spin

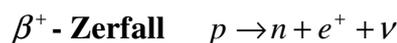
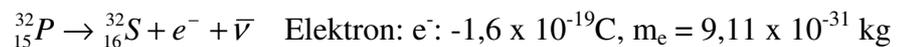
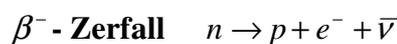
Ladung 0

Masse ~ 0 , extrem klein

Spin $1/2$

Chiralität unterschiedlich für $\nu, \bar{\nu}$, ist eine neue quantenmechanische Eigenschaft

Wirkungsquerschnitt klein, freie Weglänge in Wasser ~ 1000 Lichtjahre, kaum nachzuweisen



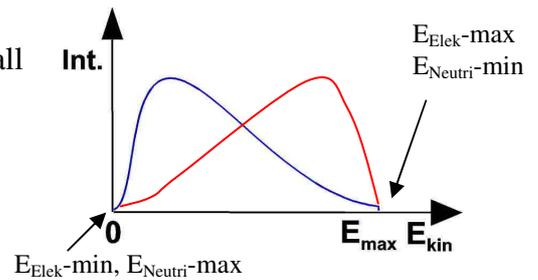
Ursprung der e^- / e^+ im β^- -Zerfall:

- werden im Kern erzeugt, sind nicht „gelagert“ ebenso wenig wie Photonen in Hülle
- kommen nicht aus der Elektronenhülle des Atoms!

Spektrum: kontinuierlich, nicht diskret wie bei α -Zerfall

Ursache: Elektron und Neutrino teilen sich E_{kin}

$$\Delta E = E_{kin}^{Elektron} + E_{kin}^{Neutrino}$$



2.4 Gamma-Strahlung

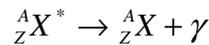
Atom: System aus gebundenen Elektronen

Kern: System aus gebundenen Nukleonen

=> quantisierte Energiewerte des Kerns

wie in Elektronenhülle für Atom, aber MeV statt eV

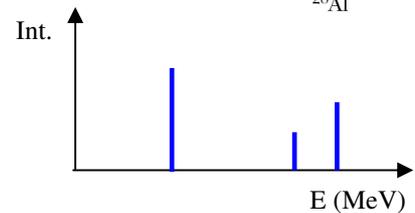
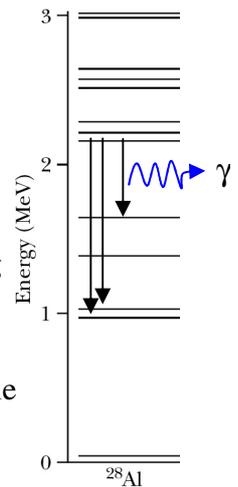
γ -Strahlung: innerer Übergang im Kern emittiert elektromagnetische Strahlung



Energie: ~ MeV, viel höher als Röntgenstrahlung (keV) der Elektronenhülle

Spektrum: diskret, da diskrete Zustände des Kerns

Tafelbild



Exp: Gamma-Strahler mit verschiedenen Abschirmungen

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad I: \text{Intensität hinter Abschirmung, } I_0: \text{einfallende Intensität}$$

x: Dicke der Abschirmung

=> μ Absorptionskonstante der Abschirmung für Gamma-Strahlung

FOLIE Zerfallskette

2.5 Datierung mit ${}^{14}\text{C}$ -Methode

Der radioaktive Zerfall macht ein Isotop zur Uhr mit der Halbwertszeit als „Maßstab“

Zerfall: ${}^{14}_6\text{C} \rightarrow {}^{14}_7\text{N} + e^- + \bar{\nu}$, $T_{1/2} = 5730$ Jahre, β^- -Strahler

Entstehung: ${}^{14}_7\text{N} + n \rightarrow {}^{14}_6\text{C} + n + e^+ + \nu$ Beschuss mit Neutronen in oberer Atmosphäre

Erdnähe: vermischt sich mit stabilem ${}^{12}\text{C}$ (als CO_2),

wird in Organismus bis Lebensende eingebaut: Verhältnis ${}^{14}\text{C}/{}^{12}\text{C} = 1,2 \cdot 10^{-12}$

nach Tod schwindet ${}^{14}\text{C}$ -Anteil durch Zerfall, Anteil von ${}^{12}\text{C}$ bleibt konstant

Altersbestimmung: Messung des Verhältnisses ${}^{14}\text{C}/{}^{12}\text{C}$

3 Kernspaltung

Physik	Chemische Verbrennung	Kernprozesse
Umordnung zu stabileren Systemen	in Elektronenhülle	Neukleonen im Kern
Reaktionsprinzip	$C + O + O \Rightarrow CO_2 + \Delta E$	$^{200}X \rightarrow 2 \cdot ^{100}Y + \Delta E$
Energie	$\Delta E \sim eV$	$\Delta E \sim MeV$

1932 J. Chadwick: durch Beschuss mit Neutronen können Elemente radioaktiv werden

1939 Hahn, Meitner, Strasser: Spaltung von ^{235}U durch Beschuss mit thermischen Neutronen

3.1 Spaltungsprozess

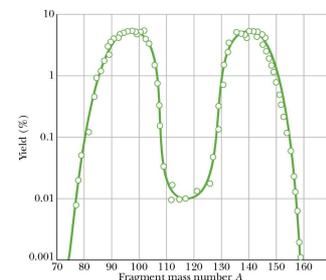
Spaltmaterial: ^{235}U

Spaltprozess: Beschuss mit thermischen Neutronen,
hoher Wirkungsquerschnitt für Spaltung

$$E_{kin} = 3/2 kT \sim 40 \text{ meV}$$

Reaktion: $^{235}U + n \rightarrow ^{236}U \rightarrow ^{140}Xe + ^{94}Sr + 2n$

Spaltprodukte: Verteilung der Massen
Produkte sind radioaktiv



Produkte: a) $^{140}_{54}Xe \rightarrow ^{140}_{55}Cs \rightarrow ^{140}_{56}Ba \rightarrow ^{140}_{57}La \rightarrow ^{140}_{58}Ce$

β^- -Zerfälle, Masse A bleibt, Z wächst

$T_{1/2}$ 14s \Rightarrow 64s \Rightarrow 13d \Rightarrow 40h \Rightarrow stabil

b) $^{94}_{38}Sr \rightarrow ^{94}_{39}Y \rightarrow ^{94}_{40}Zr$ β^- -Zerfälle

$T_{1/2}$ 75s \Rightarrow 19min \Rightarrow stabil

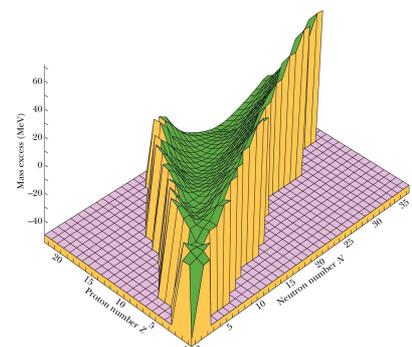
Warum Beta-Zerfälle der Spaltprodukte?

Stabil wenn Verhältnis Neutronen / Protonen $\sim 1,3$

\Rightarrow es gibt zu viele Neutronen

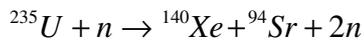
2 Neutronen werden sofort emittiert (s.o.)

weitere Neutronenumwandlung durch β^- Zerfall

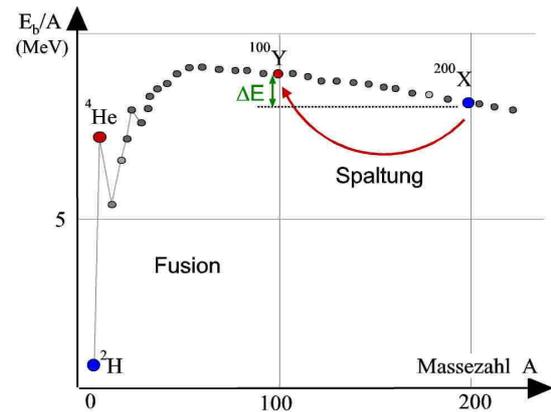


3.2 Freigesetzte Energie

berechne Massenenergie vor / nach der Spaltung



Energie $E(A) = \left(\frac{E_B}{A}\right) \cdot A$



Vorher: $^{235}\text{U} : E(A=235) = 7,5 \text{ MeV} \times 235 = 1762,6 \text{ MeV}$

Nachher: $^{140}\text{Xe} : E(A=140) = 8,3 \text{ MeV} \times 140 = 1162 \text{ MeV}$

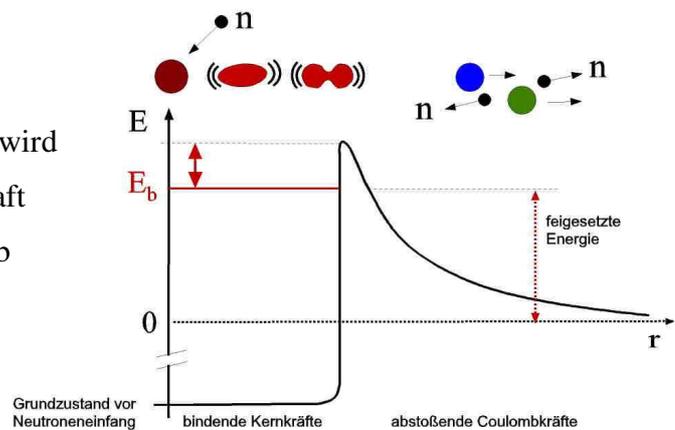
$^{94}\text{Sr} : E(A=94) = 8,6 \text{ MeV} \times 94 = 808,4 \text{ MeV}$

Gewinn: $\Delta E = E(^{235}\text{U}) - E(^{140}\text{Xe}) - E(^{94}\text{Sr}) = 208 \text{ MeV}$ pro Uran-Atom !!!

3.3 Tröpfchenmodell

Kern als elektrisch positiv geladenes Tröpfchen (Bohr, Wheeler)

1. Einfang eines therm. Neutrons
2. Anregung des Tropfens zu Schwingungen
3. Spaltung, wenn Tröpfchen zur Hantelform wird und wenn Coulombkraft größer als Kernkraft
4. zwei pos. geladene Tröpfchen stoßen sich ab



Potenzialbarriere E_b des Materials entscheidet, ob Neutronenenergie zur Spaltung ausreicht

Material	Energie nach Anregung	Barriere	Spaltung
$^{235}\text{U} + n$	6,5 MeV	5,2 MeV	ja
$^{238}\text{U} + n$	4,8 MeV	5,7 MeV	nein
$^{239}\text{Pu} + n$	6,4 MeV	4,8 MeV	ja

3.3 Kernreaktor

Spaltmaterial: 3% ^{235}U (angereichert, natürlich: 0,7% ^{235}U , 99,3% ^{238}U)

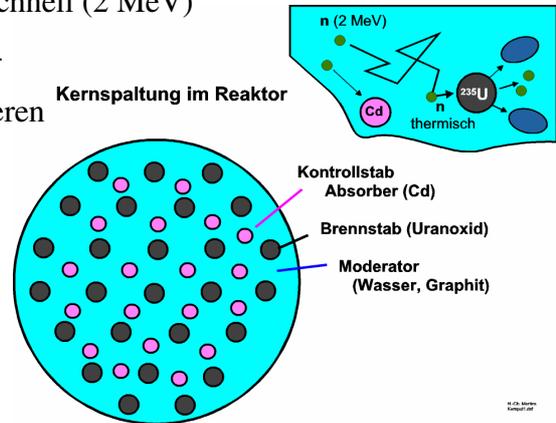
Prozess: Einfang thermischer Neutronen $E \sim 40 \text{ meV}$

Kettenreaktion: Ziel: jedes erzeugte Neutron löst mehrere neue Spaltungen aus

Problem: erzeugte Neutronen sind zu schnell (2 MeV)

Moderator: bremst Neutronen durch elastische Stöße ohne zu absorbieren

H_2O , C, Stoß mit Protonen



Exp. Stoss gleicher Kugeln in Kette,

Absorption: Problem: ^{238}U absorbiert Neutronen mit $1\text{eV} < E < 100 \text{ eV}$, γ -Zerfall

Lsg.: Brennstäbe und Moderatoren werden getrennt, nicht gemischt

Multiplikation: $k = \frac{\text{Neutronenzahl vor Spaltung}}{\text{Neutronen nach Spaltung}}$ (thermische Neutronen)

$k = 1 \Rightarrow$ konstante Leistung „kritisch“ normaler Reaktorbetrieb

$k > 1 \Rightarrow$ Leistung wächst „überkritisch“ echtes Problem!

Kontrollstäbe: absorbieren Neutronen, werden in Reaktor eingefahren \Rightarrow regeln k

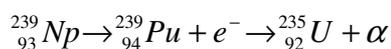
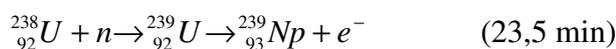
Material: meist Cd

Druckwasserreaktor: FOLIE

Schneller Brüter

Erhöht die Ausnutzung des Uranbrennstoffs durch Spaltung mit schnellen Neutronen

- Energiegewinnung aus ^{238}U , Erzeugung von Spaltneutronen
- Kein Moderator nötig, da schnelle Neutronen benutzt
- Kühlung mit Na statt Wasser da Wasser schnelle Neutronen bremst



2,4d $2,4 \times 10^4 \text{ a}$

Anhang / Exkurs

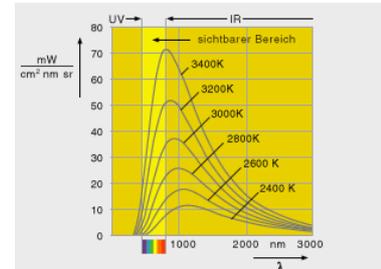
1. Lichtquellen

Welche Lichtquellen eignen sich für Raumbelichtung, Displaybeleuchtung oder Fernseh-techniken und liefern die gewünschte Farbtemperatur?

1.1 Farbtemperatur

Definition:

Die Farbtemperatur von Licht entspricht der Farbe eines schwarzen Strahlers mit der entsprechenden Temperatur.

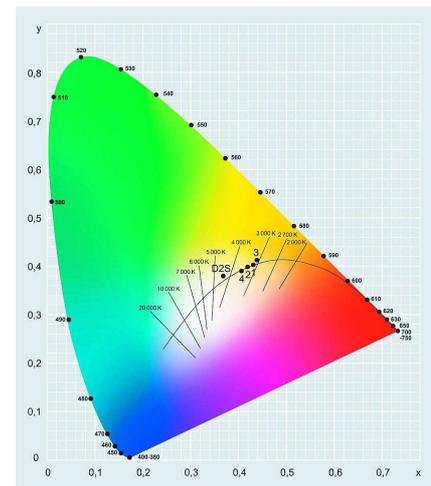


Bsp. soll eine Lampe die Farbe des Sonnenlichtes wiedergeben, so beträgt die Farbtemperatur 5000 K – 6000 K. Fällt die Temperatur kleiner aus, so ist das Maximum der Kurve zu größeren Wellenlängen, also in den roten Bereich verschoben, fällt sie höher aus, so erscheint das Licht blauer.

Warmweiß 3000 K, angenehme Raumbelichtung

Neutralweiß 4000 K, mehr Blauanteil, kälter

Glühlampe 2700 K, stärkerer Rotanteil, wärmer



Farb-Erzeugung

a) Dispersion: Weißes Licht durch ein Glasprisma schicken

Zerlegung in seine Farbteile

Umkehrprozess: alle Farbanteile wieder zusammenführen ergibt Weiß.

b) Additive Farbmischung: gleich intensive Lichtquellen von 2 - 3 Farben ergeben:

Blau, Rot und Grün => weiß

Grün und Rot => Gelb

Blau und Grün => Cyan

Blau und Rot => Magenta

Bildschirm: alle Farben und Weiß lassen sich durch drei Lichtquellen mit ihren drei Wellenlängen erzeugen. Eine kontinuierliche Verteilung aller Wellenlängen zwischen 400 nm und 800 nm wie bei einem schwarzen Strahler, ist nicht nötig.

1.2 Glühlampen

Prinzip: schwarzer Strahler

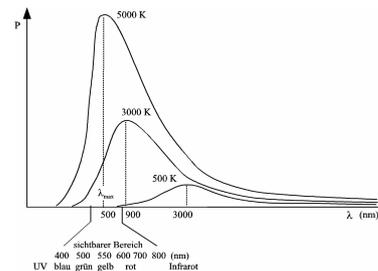
Glühdrahtwendel, meist aus Wolfram, wird bis nahe ca. 3000°C erhitzt.

Wiensches Verschiebungsgesetz: $\lambda_{\max} = \frac{2,898 \text{ mm} \cdot \text{K}}{T}$

Intensitätsmaximum im unsichtbaren Infrarotbereich bei $\lambda_{\max} = 900 \text{ nm}$.

Gesamtleistung des sichtbaren Lichtes:

$$P_{\text{sichtbar}} = \int_{400 \text{ nm}}^{800 \text{ nm}} P(\lambda) d\lambda$$



Ineffizient: nur 5 % – 15% der elektrischen Energie in sichtbares Licht, Rest in Wärme

Um sichtbaren Lichtanteil zu erhöhen: Temperatur des Schwarzen Strahlers erhöhen

1.3 Halogenlampen

Prinzip: schwarzer Strahler bei hoher Temperatur über 3000°C

Problem: Glühwendel verdampft langsam, Lebensdauerverkürzung, Bedampfung des Glaskolbens => Reduktion der nach außen dringenden Lichtintensität.

Lösung: Gas aus Halogenverbindungen im Lampenkolben zerfällt bei hoher Temperatur und die Halogen-Bruchstücke verbinden sich mit den aus der Wolframwendel austretenden Atomen zu Wolframhalogeniden. Sie sorgen für eine gute Wärmeverteilung durch Konvektion und kommen dabei zur Glühwendel zurück, wo sie sich auf den dünnsten und damit heißesten Stellen der Glühwendel ablagern. Dort zerfallen sie und lagern das Wolfram wieder an, sodass sich der Glühfaden regeneriert, während die Halogene in den Gas-Kreislauf zurückkehren. Als Folge werden Lebensdauer und Lichtausbeute der Lampen erhöht, zumal sich der lichtschwächende Metallfilm im Innern des Glaskolbens weniger rasch ausbildet.

Nutzung Autoscheinwerfer, Projektoren, Niedervolt-Lichtquellen im häuslichen Bereich.

Farbe: Warmweiß

Effizienz 30% besser als Glühlampen, hohe Lebensdauer

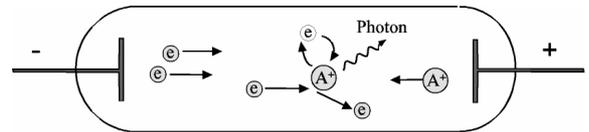
1.4 Gasentladungslampen

Prinzip: Anregung von Schalenübergängen der Leuchtatome durch Elektronenstoß

Aufbau: Glaskolben mit Gas gefüllt.

Metallelektroden außen, angelegte Spannung U beschleunigt wenige, natürlicherweise im Gas vorhandenen freien Elektronen

$$E_{el} = E_{kin}, \quad eU = \frac{1}{2}mv^2$$



Funktion Elektronen stoßen mit Gasatomen und ionisieren diese
 \Rightarrow neue Ladungsträger, werden beschleunigt, ionisieren weitere Atome
 \Rightarrow Lawine von Ladungsträgern, d.h. Elektronen und Ionen entsteht (Plasma)

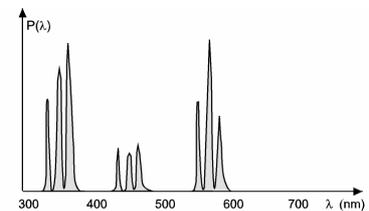
Zündspannung $\sim 1 - 3$ kV um wenige vorhandene Ladungsträger zu beschleunigen
 Betriebsspannung ~ 200 V,
 abhängig von Gasdruck, Gassorte, Elektrodenmaterial, Röhrenform

Lichterzeugung ionisierte Atome fangen sich nach kurzer Zeit wieder ein Elektron ein, Rekombination über diverse Stufen $m \rightarrow n$ in Grundzustand und jeweils

Lichtemission $E_{m,n} = hf$

$$E_{m,n} = E_n - E_m = -R_y \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right).$$

Spektrum vorwiegend UV und sichtbar



Arbeitstemperatur gering (Kaltlichtquellen)

1.5 Leuchtstofflampen

Prinzip: wie Gasentladungslampen, aber zusätzliche Nutzung der UV-Strahlung
 Leuchtstoff Glaskolben ist innen beschichtet, wandelt UV- in sichtbare Strahlung

UV-Wandlung hochenergetische UV-Photonen regen VB – LB – Übergänge an

Rekombination a) LB \Rightarrow VB

$$E_g = hf$$

b) innere Übergänge von Dotierungsatomen

$$E_{m,n} = hf$$

Lichtfarbe: abhängig von Leuchtstoffen

Gasdruck 1 – 20 mbar. Das Gas bleibt während des Betriebes kalt.

Betriebsspannung ~ 200 V, die laufenden Ströme sind gering

1.6 Plasma-Bildschirm

Die Technologie der Plasmabildschirme basiert auf den Lichterzeugungsprozessen der Gasentladungslampen, bzw. der Leuchtstoffröhren.

- Aufbau** zwei parallelen Glasplatten (Frontscheibe, Rückseite)
 Platten schließen sehr kleine Gasentladungszellen mit leuchtendem Plasma ein
- Pixel** besteht aus drei kleinen Gasentladungszellen für Farben Rot, Blau und Grün
- Bildfarbe** individuelle Ansteuerung der Zellen
- Vorteile** Plasmabildschirme können größer als klassische Röhrenfernseher werden
 geringe Bautiefe, hohe Leuchtkraft.
- Nachteil** höherer Energieverbrauch als LCD oder Röhrenfernseher

1.7 Hochdruck-Gasentladungslampen

Bau kompakt, nur wenige cm groß, dicke, druckstabile Quarzglas Kolben

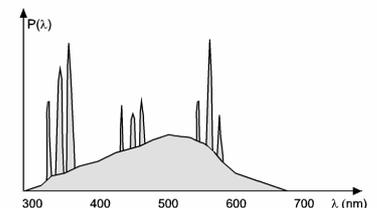
Licht sehr intensiv

Spektrum Linien und breites kontinuierlicher Untergrund

Prinzip: wie Gasentladungslampe, aber
 Wolframelektroden spitz und nah =>
 Hohe elektrische Felder bei geringer Spannung 50 – 200 V
 Starke Ströme => hohe Gastemperatur um 1000°C

Gasdruck 0,1 - 10 bar, oder höher sorgt für starke Linienverbreiterung

Einsatz Stadionbeleuchtung, im Beamer, in Autoscheinwerfer



Xenonlampen Höchstdruckentladungslampen, mit Xenongas gefüllt

Druckbereich 8 – 70 bar.

Gastemperatur bis zu 6000 K.

Lichterzeugung sowohl durch Übergänge in angeregten Xe-Atomen,
 als auch durch die Prozesse des Schwarzen Strahlers, (heißes Xe-Gas)

1.8 Energiesparlampen

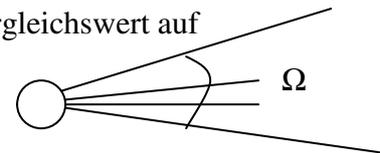
Prinzip	Gasentladung in Leuchtstoffröhre, nur sehr kompakt
Leuchtgas	Hg-Dampf, Niederdruck
Betrieb	Vorschaltgerät sorgt für Startspannung und Strombegrenzung im Betrieb Kathode wird geheizt, um Entladungsstrecke für Start und Hg-Dampf aufzubauen Elektron. Transformator erzeugt 45.000 Hz => flimmerfrei
Typen	a) langsames Vorheizen, max Helligkeit nach 10 – 60 s erreicht b) schneller Start durch höhere Spannung, Nachteil: schneller Kathodenverbrauch

Vergleich

Leuchtmittel	Lichtausbeute	Lebensdauer	Schaltzyklen
Glühlampe	12 lm/W	1.000 h	
Halogenlampe	20 lm/W	2.000 h	
Energiesparlampe langsam	60 lm/W	3.000 – 15.000 h	500.000
Schnell			3.000
LED weiß	10 – 135 lm/W	25.000 – 100.000 h	
Halogen-Metall dampflampe	50 – 120 lm/W	5.000 h	

1.9 Lichtintensitätsgrößen

Größen sind für menschliches Sehvermögen ausgelegt, also als Vergleichswert auf die maximale Augenempfindlichkeit bei 550 nm



Lichtstärke Candela $\phi_e / \Omega \Rightarrow 1 \text{ cd} = \frac{1 \text{ W}}{683 \text{ sr}}$

bezogen auf den Raumwinkel 1 Steradian (sr)

Lichtstrom Lumen $\phi_e \Rightarrow 1 \text{ lm} = 1 \text{ cd} \cdot \text{sr} = \text{W}$

Gesamte, von der Quelle in alle Richtungen abgestrahlte Leistung

Beleuchtungsstärke Lux $\phi_v / A \Rightarrow 1 \text{ lx} = \frac{1 \text{ cd} \cdot \text{sr}}{\text{m}^2} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ genau genommen

$$\phi_v = \int V(\lambda) \phi_e(\lambda) d\lambda$$

$V(\lambda)$ Empfindlichkeitsverhalten des menschlichen Auges

$\phi_e(\lambda)$ spektrale Intensitätsverteilung der Lichtquelle

$$100.000 \text{ lx} = 146 \text{ W/m}^2$$